(الجزء الثانى)

من الكمالات التوفيقية فى الاصول الجبرية

تاليف حضرة أحمد افندى كمال

معلم العلوم الجبرية

بمدرسة المهندسخانة

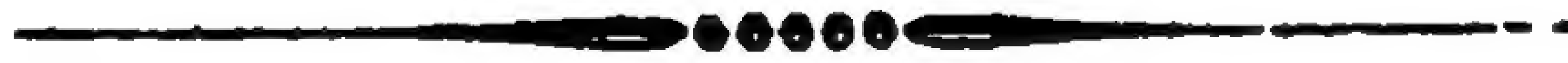
الخديوية

م



المحتوى على ما يلزم تدريسه من علم الجبر لتلامذة

مدرسة المهندسخانه الخديوية

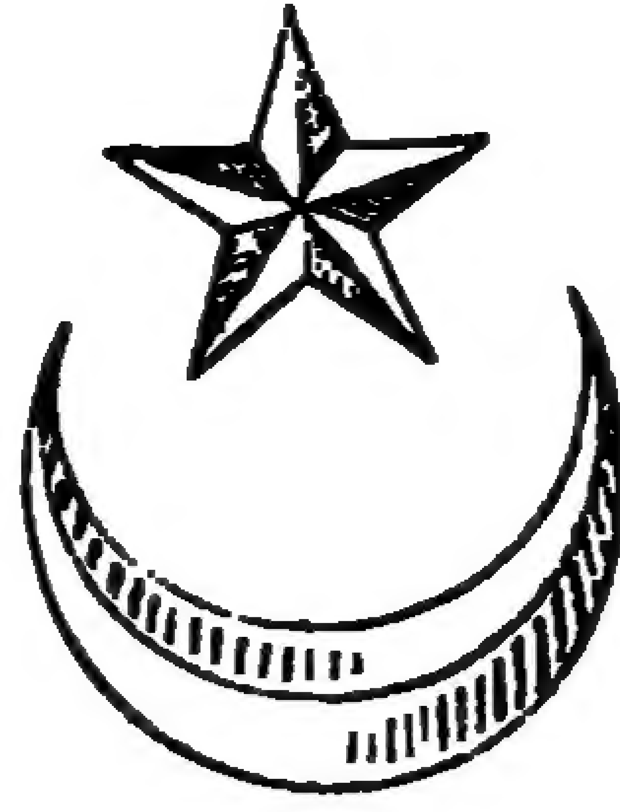


(الطبعة الاولى)

(بمطبعة ديوان عموم المعارف بدرب الجماميز)

سنة ١٢٩٩ هجرية

(على صاحبها أفضل الصلاة وأزكى التحية)



(بسم الله الرحمن الرحيم)

(الباب الاول)

(فى تتمة أصول علم الجبر)

بند ١ نحصر تحت عنوان تتمة أصول علم الجبر شرح قانون ذات الحدين وتطبيقاته والكلام على المحددات وعلى المتسلسلات وتقاربها وعلى الكسور المتسلسلة وعلى النظرية الجبرية للوغاريتمات وعلى حل المعادلات الأسية

(الفصل الاول)

(فى قانون نوتون)

(المبحث الاول)

(فى التراتيب والتباديل والتوافيق)

بند ٢ (تعريف التراتيب وكيفية تكوينها وعددها) اذا فرضت اشياء عددها م فانه يطلق اسم تراتيب هذه الاشياء نونا نونا على الجمل المختلفة التى يمكن تكوينها بهذه الاشياء بأخذها نونا نونا بجميع الكيفيات الممكنة ووضع بعضها بجانب البعض الآخر على خط مستقيم بحيث يختلف كل ترتيبين عن بعضهما بجنس الاشياء المركبة منهما أو بالرتبة المرتبة بها هذه الاشياء فقط

مثلا

مثلا باخذ الثلاثة حروف ح و ء و هـ مثنى مثنى يمكن تكوين التراتيب الستة الآتية وهى

حء , حهـ , ءح , ءهـ , هـح , هـء

فالاول والثالث يختلفان من بعضهما برتبة الحروف وكذا الثانى والخامس وكذا الرابع والسادس ونرمز على العموم للاشياء التى عددها م بالحروف الاول من الحروف الابجدية وهى

ح , ء , هـ , و , ... , ك

ونرمز لعدد التراتيب التى يمكن تكوينها بهذه الاشياء التى عددها م مأخوذة نونا نونا بجميع الكيفيات الممكنة بالرمز $ت_م^ن$

ومن الواضح انه يتحصل على تراتيب حروف عددها م واحدا واحدا باخذ كل منها على حدته وبذلك تتحصل تراتيب عددها م وهى

ح , ء , هـ , و , ... , ك

و بناء على ذلك يكون

$$ت_م^١ = م$$

ونتحصل على تراتيب الحروف التى عددها م مثنى مثنى بوضع كل من الحروف المذكورة ماعدا الحرف الاول بعد هذا الحرف الاول و وضع كل منها ماعدا الحرف الثانى بعد الحرف الثانى وهلم جرا وبذلك يتكون الجدول الآتى وهو

حء , حهـ , حو , ... , حك	و
ءح , ءهـ , ءو , ... , ءك	و
هـح , هـء , هـو , ... , هـك	و
. . . .	و
. . . .	و
كح , كء , كهـ , ... , كع	

فحيث كان الصف الاول الافقى مشتملا على التراتيب التى تبتدأ بالحرف ح والصف الثانى مشتملا على التراتيب التى تبتدأ بالحرف ء وهكذا فتتكون بذلك جميع تراتيب الاشياء التى عددها م مثنى مثنى وحيث ان كل صف افقى يحتوى على تراتيب عددها

م - ١ وتوجد صفوف عددها م فيكون عدد التراتيب المشتمل عليها الجدول هو م (م - ١) وحينئذ يكون

$$\text{ت}^{٢}_{\text{م}} = \text{م}(\text{م} - ١)$$

وكذلك اذا وضع عقب كل من التراتيب مثنى مثنى كل من الحروف التى عددها م - ٢ تتكون التراتيب ثلاث ثلاث وهى

حده، حدو، . . . . . . ، حدك ،
حهد، حهو، . . . . . . ، حهك ،
. . . . ،
دحه، دحو، . . . . . . ، دحك ،
. . . .
. . . .

فقد كتبنا بعد الترتيب الاول حد بحرفين كلا من الحروف ه، و، . . . . ، ك وكذلك قد كتبنا عقب الترتيب الثانى حه كلا من الحروف الاخر د، و، . . . . . ، ك وهكذا وبذلك قد كونا جميع التراتيب ثلاث ثلاث لان كل ترتيب مركب من ثلاثة حروف يتركب بالضرورة من ترتيب حرفين متبوعا بحرف آخر ولا يتكرر الترتيب المذكور مرتين لان تراتيب اى صف فى تختلف عن بعضها بالحرف الثالث وكل ترتيبين ماخوذين من أى صفين يختلفان عن بعضهما بترتيب الحرفين الاولين وحيث ان كل صف يشتمل على تراتيب عددها م - ٢ وتوجد صفوف عددها م (م - ١) الذى هو عدد التراتيب مثنى مثنى فحينئذ يكون عدد تراتيب الحروف التى عددها م ثلاث ثلاث هو

$$\text{ت}^{٣}_{\text{م}} = \text{م}\ (\text{م} - ١)\ (\text{م} - ٢)$$

وبالاستمرار على هذا يتوصل الى القانون الآتى وهو

$$\text{ت}^{\text{ن}}_{\text{م}} = \text{م}(\text{م} - ١)(\text{م} - ٢)(\text{م} - ٣) \cdots\cdots (\text{م} - \text{ن} + ١)$$

ويكون عدد تراتيب اشياء عددها م نونا نونا مساويا للحاصل ضرب اعداد متوالية عددها ن وآخذة فى النقص ومبتدئة بالعدد م

بعد (تعميم القانون) ولنثبت على ان القانون المتقدم الذى تحصلنا عليه بالقياس يكون عموميا فنقول

لنفرض اننا كونا تراتيب حروف عددها م نونانا قصا واحدا نونانا قصا واحدا وانه يراد تكوين تراتيب هذه الحروف نونا نونا فيكتب بعد كل من التراتيب نونانا قصا واحدا نونانا قصا واحدا كل من الحروف الاخر التى عددها م ـ هـ + ١ بالتوالى فتحصل جميع التراتيب نونا نونا لان كل ترتيب مكون من حروف عددها هـ يتركب من ترتيب مكون من حروف عددها هـ ـ ١ متبوعا بحرف آخر وهذا الترتيب لا يوجد مكررا مرتين لان كل ترتيبين من التراتيب المتحصلة بهذه الكيفية يختلفان عن بعضهما امابالحرف الاخير واما بالترتيب المكون من الحروف الاول التى عددها هـ ـ ١ وحيث انه يتحصل بكل ترتيب من التراتيب السابقة تراتيب جديدة عددها م ـ هـ + ١ فيوجد القانون العمومى وهو

$$\text{ر}_{\text{م}}^{\text{هـ}}=\text{ر}_{\text{م}}^{\text{هـ}-1}(\text{م}-\text{هـ}+1)$$

وباعطاء هـ مقادير ٢ و ٣ و ٤ و ٥ ..... و هـ فى هذا القانون ينتج ان

$$\text{ر}_{\text{م}}^{2}=\text{ر}_{\text{م}}^{1}(\text{م}-1)=\text{م}(\text{م}-1)$$ و

$$\text{ر}_{\text{م}}^{3}=\text{ر}_{\text{م}}^{2}(\text{م}-2)$$ و

$$\text{ر}_{\text{م}}^{4}=\text{ر}_{\text{م}}^{3}(\text{م}-3)$$ و

.... و

.... و

$$\text{ر}_{\text{م}}^{\text{هـ}}=\text{ر}_{\text{م}}^{\text{هـ}-1}(\text{م}-\text{هـ}+1)$$

فاذا ضربت هذه المتساويات فى بعضها تنمحى العوامل المتوسطة و يوجد القانون

$$\text{ر}_{\text{م}}^{\text{هـ}}=\text{م}(\text{م}-1)(\text{م}-2)(\text{م}-3)\cdots\cdots(\text{م}-\text{هـ}+1)$$

(تطبيقات) الاول ماهو عدد التراتيب ثلاث ثلاث لسبعة حروف

(الجواب) هو حاصل ضرب ثلاثة أعداد صحيحة متوالية آخذة فى النقص ومبتدئة بعدد ٧ أعنى يساوى

$$ق_{٧}^{٣}=٧\times٦\times٥=٢١٠$$

(الثانى) كم عدد الاعداد المركبة من رقمين معنويين مختلفين

(الجواب) عدد هذه الاعداد يساوى عدد تراتيب الارقام التسعة المعنوية مثنى مثنى أعنى يساوى

$$ق_{٩}^{٢}=٩\times٨=٧٢$$

(الثالث) كم عدد الاعداد المركبة من خمسة أرقام معنوية مختلفة

(الجواب) عدد هذه الاعداد يساوى عدد تراتيب الارقام التسعة المعنوية خماس خماس أعنى يساوى

$$ق_{٩}^{٥}=٩\times٨\times٧\times٦\times٥=١٥١٢٠$$

بند ٤ (التباديل وتكوينها وعددها) يطلق اسم تباديل أشياء عددها م على الجمل المختلفة التى يمكن اعطاؤها لهذه الاشياء التى عددها م بوضع بعضها بجانب البعض الآخر على خط مستقيم واحد بحيث يكون كل ترتيب محتويا على جميع هذه الاشياء ولا يختلف كل ترتيبين عن بعضهما الا برتبة الاشياء المذكورة

مثلا بحرفين ح , ء يمكن تكوين تبديلين وهما

ءح , حء

ونرمز على العموم بالرمز $|\underline{م}$ لعدد تباديل أشياء عددها م فينتج من التعريف ان تباديل أشياء عددها م لا تكون الا تراتيب هذه الاشياء التى عددها م مأخوذة جميعها أعنى ميما ميما وحينئذ يكون

$$|\underline{م}=ق_{م}^{م}=م(م-١)(م-٢)\cdots\cdots\times٣\times٢\times١$$

أو

$$|\underline{م}=١\times٢\times٣\times\cdots\cdots\times م$$

ويعلم من ذلك ان عدد تباديل أشياء عددها م يساوى حاصل ضرب الاعداد الاول الصحيحة

(تطبيقات) الاول كم كلمة يمكن تكوينها بثلاثة حروف مختلفة من ثلاثة حروف معلومة

(الجواب) يمكن تكوين كلمات بقدر عدد تباديل هذه الحروف الثلاثة وهو

$|\underline{٣}$

$$ل_{٣}=١\times٢\times٣=٦$$

(الثانى) بكم كيفية يمكن وضع عشرة عساكر على مستقيم واحد

(الجواب) بقدر عدد التباديل لعشرة أشياء وهو

$$ل_{١٠}=١\times٢\times٣\times٤\times٥\times٦\times٧\times٨\times٩\times١٠=٣٦٢٨٨٠٠$$

(الثالث) كم عددا يمكن تكوينه بخمسة أرقام معلومة

(الجواب) يمكن تكوين أعداد بخمسة أرقام معلومة بقدر عدد تباديل هذه الارقام وهو

$$ل_{٥}=١\times٢\times٣\times٤\times٥=١٢٠$$

بند (تنبيه) ولو اننا قد استنتجنا قانون عدد التباديل من قانون عدد التراتيب الا انه يمكن استنتاجه مباشرة وهاك الكيفية

من الواضح انه لا يمكن اعطاء حرف واحد سوى وضع واحد واذن يكون

$$ل_{١}=١$$

ومن الواضح انه يمكن تكوين تبديلين من حرفين ح و ء وهما

حء , ءح

واذن يكون

$$ل_{٢}=١\times٢$$

فاذا أدخل حرف هـ فى كل من التبديلين السابقين فى جميع الاوضاع أعنى فى الآخر وفى الوسط وفى الاول تحصل تباديل الحروف الثلاثة ح,ء,هـ وهى

حءهـ , حهـء , هـحء

ءحهـ , ءهـح , هـءح

وبهذه الكيفية تتكون جميع تباديل الحروف الثلاثة لان أى تبديل مكون من ثلاثة حروف يتركب من تبديل مكون من الحرفين الاولين ح,ء مضافا اليهما الحرف الثالث هـ فى وضع معين ولا يتكرر ذلك التبديل مرتين لان كل تبديلين حيثما اتفق يختلفان عن بعضهما إما بوضع الحرف هـ وأما بترتيب الحرفين الآخرين وحيث ان كل تبديل من التباديل المتقدمة يحدث ثلاثة تباديل جديدة فيوجد القانون

$$ل_{٣}=ل_{٢}\times٣=١\times٢\times٣$$

وكذا اذا ادخل فى كل من تباديل الحروف الثلاثة ح, ء, هـ الحرف و فى جميع الاوضاع التى عددها اربعة اثنان متوسطان واثنان متطرفان تحصل تباديل الحروف الاربعة ح, ء, هـ, و وحيث انه يحصل بكل تبديل من التباديل السابقة اربعة تباديل جديدة فيوجد ان

$$ل_{٤} = ل_{٣} \times ٤ = ١ \times ٢ \times ٣ \times ٤$$

وبالاستمرار على هذا يتوصل الى القانون العمومى وهو

$$ل_{م} = ١ \times ٢ \times ٣ \cdots م$$

بحث (التوافيق وعددها) يطلق اسم توافيق لاشياء عددها م نوناً نوناً على الجمل المختلفه التى يمكن تكوينها بهذه الاشياء باخذها نوناً نوناً بجميع الكيفيات الممكنة بحيث ان كل جملتين تختلفان بجنس شئ واحد بالاقل

وفى التوافيق لا يعتبر ترتيب الاشياء

مثلا بالحروف الثلاثة ح, ء, هـ ماخوذة مثنى مثنى لا يمكن الا تكوين ثلاثة توافيق وهى

حء , حهـ , ءهـ

على ان لها ستة تراتيب

ونرمز على العموم بالرمز $ق^{ن}_{م}$ لعدد التوافيق نوناً نوناً لاشياء عددها م فقانون التوافيق يستنتج من قانون التراتيب وقانون التباديل لاننا اذا تصورنا ان توافيق حروف عددها م نوناً نوناً مكونة واعطينا الحروف التى عددها ن المركبة لكل من هذه التوافيق جميع الاوضاع الممكنة أعنى اذا كونا تباديل هذه الحروف التى عددها ن فاننا نحصل على تراتيب الحروف التى عددها م نوناً نوناً وبهذه الكيفية نحصل على جميع التراتيب لان أى ترتيب حيثما اتفق يكون توفيقاً تكون فيه الحروف النونية عدد المركبة لهذا التوفيق مرتبة ترتيباً ما ولا يتكرر هذا الترتيب مرتين لان التراتيب الحادثة من توفيق واحد تختلف عن بعضها بالرتبة التى تشغلها الحروف وتختلف التراتيب الحادثة من توافيق مختلفة عن بعضها بجنس حرف واحد بالاقل وحيث انه يحصل بكل توفيق على تراتيب عددها يساوى $ل_{ن}$ فيكون

$$ر^{ن}_{م} = ق^{ن}_{م} \times ل_{ن}$$

واذن

واذن يكون

$$ق_{م}^{ه}=\frac{م_{\vee}^{ه}}{ل_{ه}}$$

وبتعويض كل من $م_{\vee}^{ه}$ و $ل_{ه}$ بمقداره يحدث

$$ق_{م}^{ه}=\frac{م(م-١)(م-٢)\cdots\cdots(م-ه+١)}{١\times٢\times٣\times\cdots\cdots\times ه}$$

(تطبيقات) لاجل تطبيق هذا القانون تكتب الاعداد الاول الصحيحة التى عددها ه في المقام ثم تكتب بقدرها في البسط اعداد صحيحة مبتدئة بعدد م واخذة في النقص

(الاول) عدد توافيق خمسة اشياء مثنى مثنى هو

$$ق_{٥}^{٢}=\frac{٥\times٤}{١\times٢}=١٠$$

(الثاني) عدد توافيق عشرة حروف سداس سداس هو

$$ق_{١٠}^{٦}=\frac{٥\times٦\times٧\times٨\times٩\times١٠}{١\times٢\times٣\times٤\times٥\times٦}=٢١٠$$

(الثالث) عدد توافيق عشرة حروف رباع رباع هو

$$ق_{١٠}^{٤}=\frac{٧\times٨\times٩\times١٠}{١\times٢\times٣\times٤}=٢١٠$$

(الرابع) عدد توافيق حروف عددها م واحدا واحدا هو م وهذا بديهى من أول وهلة

(الخامس) عدد توافيق حروف عددها م ميما ميما هو

$$ق_{م}^{م}=\frac{م(م-١)(م-٢)\cdots\cdots\times٣\times٢\times١}{١\times٢\times٣\times\cdots\cdots\times م}=١$$

وفى الواقع انه من الواضح اذا أخذت جميع الحروف لا يمكن ان يكون سوى توفيق واحد ولنثبت نظريتين على التوافيق ننتفع بهما فيما بعد ان شاء الله تعالى فنقول

بند ٧ (نظرية أولى) عدد التوافيق لاشياء عددها م نونا نونا يساوى عدد توفيق أشياء عددها م ميما ناقصا نونا ميما ناقصا نونا

لاننا اذا تصورنا وجود نمر عددها م في علبة وأخرجت منها نمر عددها ه يبقى نمر عددها

م ـ ه ويعلم من ذلك انه يطابق لكل توفيق مركب من غير مخرجة عددها ه توفيق مركب من غير باقية عددها م ـ ه وبالعكس واذن يكون

$$\text{ق}_{\text{م}}^{\text{ه}} = \text{ق}_{\text{م}}^{\text{م}-\text{ه}}$$

وغير ذلك فانه يمكن تحقيق تساوى العددين

$$\text{ق}_{\text{م}}^{\text{ه}} = \frac{\text{م}(\text{م}-1)\cdots\cdots(\text{م}-\text{ه}+1)}{1\times2\times3\cdots\cdots\times\text{ه}} \quad ,$$

$$\text{ق}_{\text{م}}^{\text{م}-\text{ه}} = \frac{\text{م}(\text{م}-1)\cdots\cdots(\text{ه}+1)}{1\times2\times3\cdots\cdots(\text{م}-\text{ه})}$$

بالسهولة لانه اذا ضرب حدا الكسر الاول فى الحاصل ١×٢ ٠٠٠٠٠ (م ـ ه) وحدا الكسر الثانى فى ١×٢ ٠٠٠٠٠ ×ه يصير المقامان متساويين و يوجد فى البسطين حاصل ضرب الاعداد الصحيحة المتوالية من ابتداء الواحد الى م بحيث يكون

$$\text{ق}_{\text{م}}^{\text{ه}} = \text{ق}_{\text{م}}^{\text{م}-\text{ه}} = \frac{1\times2\times3\cdots\cdots\times\text{م}}{1\times2\cdots\cdots\times\text{ه}\times1\times2\cdots\cdots(\text{م}-\text{ه})}$$

وهو المطلوب

مثلا عدد توافيق خمسة أشياء ربا ع ربا ع يساوى عدد توافيق خمسة أشياء واحدا واحدا وعدد توافيق خمسة أشياء ثلاث ثلاث يساوى عدد توافيق خمسة أشياء مثنى مثنى

بسند (نظرية ثانية) عدد توافيق أشياء عددها م نونا نونا يساوى عدد توافيق أشياء عددها م ـ ١ نونا نونا مضافا اليه عدد توافيق أشياء عددها م ـ ١ نونا ناقصا واحدا نونا ناقصا واحدا

لان التوافيق لحروف عددها مثل ح و ء و هـ و ٠٠٠٠ ك مأخوذة نونا نونا يمكن تقسيمها الى قسمين متميزين احدهما لا يشتمل على حرف ما ك والآخر يشتمل عليه فالقسم الاول يتركب بداهة من توافيق الحروف الاول التى عددها م ـ ١ مأخوذة نونا نونا و يتحصل على توافيق القسم الثانى بتكوين توفيق الحروف الاول التى عددها م ـ ١ نونا ناقصا واحدا نونا ناقصا واحدا واضافة الحرف ك الى كل منها واذن يكون

$$\text{ق}_{\text{م}}^{\text{ه}} = \text{ق}_{\text{م}-1}^{\text{ه}} + \text{ق}_{\text{م}-1}^{\text{ه}-1}$$

ويمكن

ويمكن كذلك تحقيق هذه المساواة بواسطة قانون التوافيق
مثلا عدد التوافيق ثلاث ثلاث لسبعة أشياء يساوي عدد التوافيق ثلاث ثلاث لستة أشياء مضافا اليه عدد التوافيق لستة أشياء مثنى مثنى

(المبحث الثاني)

(في قانون ذات الحدين)

بند ٩ (حاصل ضرب كميات ذات حدين عددها م مختلفة الحد الثاني في بعضها)
من المعلوم ان حاصل ضرب عدة كميات كثيرة الحدود يساوي مجموع حواصل الضرب التي يمكن تكوينها بضرب كل حد منها في جميع حدود الكميات الكثيرة الحدود الاخرى

فلنطبق هذه القاعدة على تكوين حاصل ضرب كميات ذات حدين عددها م متحدة الحد الاول أعني لنكون الحاصل

$$(س+ح)(س+ء)(س+هـ) \cdots\cdots (س+ل)$$

فاذا رتبنا هذا الحاصل على حسب القوى التنازلية الى س فمن الواضح ان الحد الاول يكون هو $س^م$ الذي هو حاصل ضرب الحدود الاول التي عددها م من الكمية ذات الحدين

والحد الذي يحتوي على $س^{م-١}$ يتركب من حواصل ضرب الحدود الاول من كميات ذات حدين عددها (م−١) في الحد الاخير من الكمية ذات الحدين الباقية وبناء على ذلك يكون معامل $س^{م-١}$ هو مجموع الحدود الثانية من الكميات ذات الحدين المفروضة

والحد الذي يحتوي على $س^{م-٢}$ يتركب من حواصل ضرب الحدود الاول من كميات ذات حدين عددها (م−٢) في الحدين الاخيرين من الكميتين ذاتي الحدين الباقيتين وبناء على ذلك يكون معامل $س^{م-٢}$ مساويا لمجموع حواصل ضرب الحدود الثانية مثنى مثنى

وبمثل ذلك يشاهد أن معامل $س^{م-٣}$ هو مجموع حواصل الضرب ثلاث ثلاث للحدود

الثانية وعلى العموم يكون معامل $\text{س}^{\text{م}-\text{ن}}$ مجموع حواصل ضربها نوناً نوناً ويكتب هذا الناتج غالبا بهذه الكيفية وهي

$$\left.\begin{array}{l}(\text{س}+\text{ح})(\text{س}+\text{ء})(\text{س}+\text{هـ})\cdots\cdot(\text{س}+\text{ك})(\text{س}+\text{ل})\\ =\text{س}^{\text{م}}+\text{س}^{\text{م}-١}\,\text{مح ح}+\text{س}^{\text{م}-٢}\,\text{مح حء}+\text{س}^{\text{م}-٣}\,\text{مح حءهـ}+\cdots\cdots\\ +\,\text{س}^{\text{م}-\text{ن}}\,\text{مح حءهـ}\cdots\cdot\text{ع}+\text{حءهـ}\cdots\cdot\text{كل}\end{array}\right\}\quad(١)$$

وذلك بان تبين بالرموز مح ح, محء, محءهـ, ... الخ مجموع الحدود الثانية ومجموع حواصل ضربها مثنى مثنى ومجموع حواصل ضربها ثلاث ثلاث وهكذا

بند (قانون ذات الحدين) لاستنتاج مقدار $(\text{س}+\text{ح})^{\text{م}}$ مما سبق يكفي ان يفرض ح=ء=هـ=....=ل فاذذاك يكون الحد الاول باقيا على حاله اى يكون هو $\text{س}^{\text{م}}$

ويؤل معامل $\text{س}^{\text{م}-١}$ المساوي لمجموع الحدود الثانية الى م ح

ويؤل معامل $\text{س}^{\text{م}-٢}$ المساوي لمجموع حواصل ضرب الحدود الثانية مثنى مثنى الى $\text{ح}^{٢}$ مضروبا فى عدد هذه الحواصل اى فى عدد توافيق الحدود الثانية مثنى مثنى واذن يؤل هذا المعامل الى

$$\frac{\text{م}(\text{م}-١)}{١\times٢}\,\text{ح}^{٢}$$

ويؤل معامل $\text{س}^{\text{م}-٣}$ المساوي لمجموع حواصل ضرب الحدود الثانية ثلاث ثلاث الى $\text{ح}^{٣}$ مضروبا فى عدد هذه الحواصل اى فى عدد توافيق الحدود الثانية ثلاث ثلاث واذن يكون هذا المعامل هو

$$\frac{\text{م}(\text{م}-١)(\text{م}-٢)}{١\times٢\times٣}\,\text{ح}^{٣}$$

وعلى العموم يكون معامل $\text{س}^{\text{م}-\text{ع}}$ المساوي لمجموع حواصل ضرب الحدود الثانية عاعا الى $\text{ح}^{\text{ع}}$ مضروبا فى عدد هذه الحواصل اى فى عدد توافيق الحدود الثانية عاعا وبناء على ذلك يكون هذا المعامل هو

$$\frac{\text{م}(\text{م}-١)(\text{م}-٢)\cdots\cdot(\text{م}-\text{ع}+١)}{١\times٢\times٣\times\cdots\cdot\times\text{ع}}\,\text{ح}^{\text{ع}}$$

وحينئذ

وحينئذ يكون

$$\left.\begin{array}{l}(\text{س}+\text{ح})^{\text{م}}=\text{س}^{\text{م}}+\text{م}\,\text{ح}\,\text{س}^{\text{م}-١}+\frac{\text{م}(\text{م}-١)}{١\times٢}\text{ح}^{٢}\text{س}^{\text{م}-٢}+\cdots\cdots\\ +\frac{\text{م}(\text{م}-١)\cdots(\text{م}-\text{ع}+١)}{١\times٢\cdots\times\text{ع}}\text{ح}^{\text{ع}}\text{س}^{\text{م}-\text{ع}}+\cdots\cdots+\text{ح}^{\text{م}}\end{array}\right\}\quad(٢)$$

وهذا هو قانون ذات الحدين المنسوب الى نوتون

بند ١١ (تنبيه أول) يشاهد انه فى تحليل $(\text{س}+\text{ح})^{\text{م}}$ يتناقص أس س بواحد من ابتداء م الى الصفر وان أس ح يتزايد بواحد من ابتداء الصفر الى م بحيث انه فى كل حد يكون مجموع الاسين ثابتا ومساويا م ويكون عدد حدود التحليل هو (م+١) ويسمى حدا عموميا الحد المسبوق بحدود عددها ه ويرمز اليه بالرمز $\text{ى}_{\text{ه}}$ يكون

$$\text{ى}_{\text{ه}}=\frac{\text{م}(\text{م}-١)(\text{م}-٢)\cdots(\text{م}-\text{ه}+١)}{١\times٢\times٣\cdots\times\text{ه}}\text{ح}^{\text{ه}}\text{س}^{\text{م}-\text{ه}}\quad(٣)$$

بند ١٢ (تنبيه ثان) معاملات الحدود المتساوية البعد من الطرفين تكون متساوية لانه اذا كتب قانون ذات الحدين مصحوبا بالرموز الدالة على عدد التوافيق يوجد أن

$$(\text{س}+\text{ح})^{\text{م}}=\text{س}^{\text{م}}+\text{ق}^{١}_{\text{م}}\text{ح}\,\text{س}^{\text{م}-١}+\text{ق}^{٢}_{\text{م}}\text{ح}^{٢}\text{س}^{\text{م}-٢}+\cdots$$
$$+\text{ق}^{\text{م}-٢}_{\text{م}}\text{ح}^{\text{م}-٢}\text{س}^{٢}+\text{ق}^{\text{م}-١}_{\text{م}}\text{ح}^{\text{م}-١}\text{س}+\text{ح}^{\text{م}}$$

فيشاهد ان كلا من معاملى الحد الاول والحد الاخير يساوى واحدا وان معاملى الحد الثانى والحد الذى قبل الحد الاخير هما $\text{ق}^{١}_{\text{م}}$ و $\text{ق}^{\text{م}-١}_{\text{م}}$ وقد تقرر فى بند ٧ ان هذين الحدين يكونان متساويين وبمثل ذلك يشاهد ان معاملى الحدين الثالثين بالابتداء من الطرفين هما $\text{ق}^{٢}_{\text{م}}$ و $\text{ق}^{\text{م}-٢}_{\text{م}}$ وان هذين العددين متساويان وهلم جرا

بند ١٣ (تنبيه ثالث) اذا عوض حرف ح بالكمية −ح يتحصل تحليل $(\text{س}-\text{ح})^{\text{م}}$ وهو

$$(\text{س}-\text{ح})^{\text{م}}=\text{س}^{\text{م}}-\text{م}\,\text{ح}\,\text{س}^{\text{م}-١}+\frac{\text{م}(\text{م}-١)}{١\times٢}\text{ح}^{٢}\text{س}^{\text{م}-٢}-\cdots\cdots\pm\text{ح}^{\text{م}}$$

وليتنبه لان اشارة الحد الاخير تكون + اذا كان م زوجيا وتكون − اذا كان م

فردماوان اشارات الحدود المتساوية البعد من الطرفين تكون متحدة فى الحالة الاولى ومختلفة فى الحالة الثانية

بند ١٤ (تنبيه رابع) معاملات الحدود تستنتج بعضها من بعض بقانون بسيط وهو انك اذا ضربت معامل آخر حد تحصل فى أس س الموجود فى هذا الحد وقسمت المتحصل على رتبة هذا الحد فانك تحصل على الحد التالى

لان الحد الذى رتبته ه + ١ هو

$$\frac{\text{م}(\text{م}-١)\cdots\cdots(\text{م}-\text{ه}+٢)(\text{م}-\text{ه}+١)}{١\times٢\times\cdots\cdots\times\text{ه}}\,\text{ح}^{\text{ه}}\,\text{س}^{\text{م}-\text{ه}}$$

والحد السابق له هو

$$\frac{\text{م}(\text{م}-١)\cdots\cdots(\text{م}-\text{ه}+٢)}{١\times٢\times٣\cdots(\text{ه}-١)}\,\text{ح}^{\text{ه}-١}\,\text{س}^{\text{م}-\text{ه}+١}$$

فيشاهد ان الحد الذى رتبته ه + ١ يستنتج من الحد السابق له بزيادة أس ح بواحد ونقص أس س بواحد وان المعامل يتكون بضرب معامل الحد السابق له فى الاس م − ه + ١ الموجود لحرف س فى هذا الحد السابق وقسمة الناتج على ه التى هى رتبة هذا الحد

(أمثلة) من المهم التمرين على تحليل قوة كمية ذات حدين بسرعة وبواسطة القاعدة التى ذكرناها يصير الحساب مختصرا اختصارا عظيما

المثال الاول

$$(\text{س}+\text{ح})^{٧}=\text{س}^{٧}+٧\text{ح}\,\text{س}^{٦}+٢١\text{ح}^{٢}\text{س}^{٥}+٣٥\text{ح}^{٣}\text{س}^{٤}$$
$$+٣٥\text{ح}^{٤}\text{س}^{٣}+٢١\text{ح}^{٥}\text{س}^{٢}+٧\text{ح}^{٦}\text{س}+\text{ح}^{٧}$$

فللمرور من الحد الثانى الى الحد الثالث يلزم أن يضرب فى ٦ ويقسم على ٢ وهذا يرجع الى الضرب فى ٣ وللمرور من الحد الثالث الى الحد الرابع يلزم الضرب فى ٥ والقسمة على ٣ فيقسم فى أول الامر ٢١ على ٣ فيوجد ٧ ثم يضرب فى ٥ فيوجد ٣٥ وحيث ان التحليل يحتوى على حدود عددها (٧ + ١) أى على ٨ حدود وعلم ان معاملات الحدود المتساوية البعد عن الطرفين تكون متساوية فيكفى ايجاد المعاملات الاربعة الاول وأما المعاملات الاربعة الاخر فانها تكون مساوية للاربعة الاول مأخوذة

مأخوذة على عكس الترتيب

المثال الثانى

$$(\text{س}+\text{ح})^{8}=\text{س}^{8}+8\,\text{ح}\,\text{س}^{7}+28\,\text{ح}^{2}\text{س}^{6}+56\,\text{ح}^{3}\text{س}^{5}$$
$$+70\,\text{ح}^{4}\text{س}^{4}+56\,\text{ح}^{5}\text{س}^{3}+28\,\text{ح}^{6}\text{س}^{2}+8\,\text{ح}^{7}\text{س}+\text{ح}^{8}$$

فحيث ان التحليل يحتوى على تسعة حدود يلزم حساب الخمسة الحدود الاول وعند الوصول الى الحد $70\,\text{ح}^{4}\text{س}^{4}$ يتنبه لان المعاملات تكون هى التى سبق حسابها

المثال الثالث

$$(\text{س}-\text{ح})^{11}=\text{س}^{11}-11\,\text{ح}\,\text{س}^{10}+55\,\text{ح}^{2}\text{س}^{9}-165\,\text{ح}^{3}\text{س}^{8}$$
$$+330\,\text{ح}^{4}\text{س}^{7}-462\,\text{ح}^{5}\text{س}^{6}+462\,\text{ح}^{6}\text{س}^{5}-330\,\text{ح}^{7}\text{س}^{4}+165\,\text{ح}^{8}\text{س}^{3}$$
$$-55\,\text{ح}^{9}\text{س}^{2}+11\,\text{ح}^{10}\text{س}-\text{ح}^{11}$$

فحيث ان درجة القوة عدد فردى تكون اشارة الحد الاخير − وتكون الحدود المتساوية البعد من الطرفين مقرونة باشارات مختلفة

المثال الرابع

$$(\text{س}-\text{ح})^{12}=\text{س}^{12}-12\,\text{ح}\,\text{س}^{11}+66\,\text{ح}^{2}\text{س}^{10}-220\,\text{ح}^{3}\text{س}^{9}+495\,\text{ح}^{4}\text{س}^{8}$$
$$-792\,\text{ح}^{5}\text{س}^{7}+924\,\text{ح}^{6}\text{س}^{6}-792\,\text{ح}^{7}\text{س}^{5}+495\,\text{ح}^{8}\text{س}^{4}-220\,\text{ح}^{9}\text{س}^{3}$$
$$+66\,\text{ح}^{10}\text{س}^{2}-12\,\text{ح}^{11}\text{س}+\text{ح}^{12}$$

فحيث ان درجة القوة زوجية تكون اشارة الحد الاخير + وتكون الحدود المتساوية البعد من الطرفين متحدة الاشارة

بند (تنبيه خامس) المعاملات تأخذ فى الازدياد من ابتداء الحد الاول الى الحد المتوسط من حدود التحليل وتأخذ فى النقص بالابتداء من الحد المتوسط الى الحد الاخير لان النسبة بين معامل الحد الذى رتبته ه+١ ومعامل الحد السابق له هى بموجب ما تقدم

$$\frac{\text{م}-\text{ه}+1}{\text{ه}}$$

فهذه النسبة هى التى يضرب فيها معامل الحد الذى رتبته ه لاجل تكوين معامل الحد

الذى رتبته ه+١ فالحدود تأخذ فى الازدياد مادام المضروب فيه أكبر من الواحد وتأخذ فى النقص متى صار المضروب فيه أقل من الواحد وحينئذ نضع

$$\frac{م-ه+١}{ه} > ١$$

ولنحل هذه المتباينة بالنسبة الى ه فنجد أن

$$ه < \frac{م+١}{٢}$$

وحيث ان الكسر $\frac{م+١}{٢}$ يدل على نصف عدد حدود التحليل فيعلم من ذلك ان المعاملات تأخذ فى الازدياد الى الوسط وبالابتداء من الوسط تتغير جهة المتباينة وتأخذ المعاملات فى النقص

وهنالك حالتان الاولى اذا كان م زوجيا يكون عدد حدود التحليل وهو م+١ فرديا ويوجد حد وسطى معامله أكبر من جميع المعاملات الأخر فى تحليل $(س+١)^{٨}$ الذى معاملاته هى

١ و٨ و٢٨ و٥٦ و٧٠ و٥٦ و٢٨ و٨ و١

يكون المعامل ٧٠ هو الاكبر

الثانية اذا كان م فرديا يكون عدد الحدود زوجيا ويوجد فى الوسط معاملان متساويان أكبر من المعاملات الأخر فى تحليل $(س+ح)^{٧}$ الذى معاملات حدوده هى

١ و٧ و٢١ و٣٥ و٣٥ و٢١ و٧ و١

يكون المعاملان الوسطيان المساويان ٣٥ هما الاكبر

ومما تقدم تستنتج خاصية جديدة للتوافيق فليكن المطلوب معرفة الكيفية التى يلزم توفيق ثمانية أشياء بها بحيث يتحصل على أكبر عدد للتوافيق فمن الواضح انه يلزم توفيقها رباع رباع لان معاملات تحليل $(س+ح)^{٨}$ بالابتداء من المعامل الثانى هى اعداد التوافيق التى يمكن تكوينها بهذه الثمانية الاشياء بأخذها واحدا واحدا ومثنى مثنى وثلاث ثلاث الخ وحيث ان أكبر معامل هو المعامل الخامس فينتج من ذلك ان عدد توافيق الثمانية الاشياء رباع رباع يكون أكبر من أعداد التوافيق الاخر للثمانية الاشياء المذكورة

وبمثل ذلك يعلم انه يتحصل على أكبر عدد لتوافيق سبعة أشياء بأخذها ثلاث ثلاث اورباع رباع

بند ١٦ (تنبيه سادس) اذا جعل س = ١ و ح = ١ في تحليل $(س + ح)^{م}$ يؤول كل حد الى معامله ويكون

$$٢^{م} = ١ + م + \frac{م(م-١)}{١×٢} + \cdots + ١$$

ويعلم من ذلك ان مجموع معاملات التحليل يساوي $٢^{م}$

فاذا طرح المعامل الاول الذي لا يدل على عدد توافيق يستنتج من ذلك ان العدد الكلي للتوافيق التي يمكن ان توفق بها أشياء عددها م واحدا واحدا ومثنى مثنى الخ يساوي $٢^{م} - ١$ واذن يكون

$$ق_{م}^{١} + ق_{م}^{٢} + ق_{م}^{٣} + \cdots + ق_{م}^{م} = ٢^{م} - ١$$

بند ١٧ (تنبيه سابع) اذا جعل س = ١ و ح = ١ في تحليل $(س - ح)^{م}$ يوجد أن

$$٠ = ١ - ق_{م}^{١} + ق_{م}^{٢} - ق_{م}^{٣} + \cdots \pm ق_{م}^{م}$$

ومن هنا يستنتج أن

$$ق_{م}^{١} + ق_{م}^{٣} + \cdots = ١ + \left(ق_{م}^{٢} + ق_{م}^{٤} + \cdots\right)$$

ويعلم من ذلك أنه متى كونت جميع التوافيق الممكنة لاشياء عددها م يكون عدد التوافيق التي تحتوي على اشياء فردية العدد زائدا بواحد عن عدد التوافيق التي تحتوي على اشياء زوجية العدد وحينئذ اذا رمزنا للعددين بحرفي ع و ر يكون

$$ع + ر = ٢^{م} - ١ \quad و$$

$$ع - ر = ١$$

ويستنتج من ذلك أن

$$ع = ٢^{م-١} \quad و \quad ر = ٢^{م-١} - ١$$

مثلا عشرة اشياء يمكن بها تكوين توافيق عددها الكلي $٢^{١٠} - ١$ أي ١٠٢٣ توفيقا ومن هذه التوافيق ٥١٢ توفيقا تحتوي على اشياء فردية العدد و ٥١١ توفيقا تحتوي على اشياء زوجية العدد

(المبحث الثالث)

(فى التباديل والتوافيق المكررة الحروف)

١٨ ـ بند (التباديل) قد رمزنا بالرمز لـم لعدد التباديل التى يمكن تكوينها بحروف عددها م متى كانت جميع الحروف مختلفة ولنفرض الآن أنه يوجد ضمن هذه الحروف التى عددها م حروف عددها ح مساوية ح وانتظر ماذا يؤل اليه عدد التباديل ولذلك نرمز بحرف سه لعدد التباديل المختلفة التى يمكن تكوينها بواسطة الحروف المفروضة التى عددها م بما فيها الحروف التى عددها ح المساوية ح فاذا ابقيت الحروف د , ه , و , ز ..... الخ فى مواضعها فى كل من هذه التراتيب وابدلت الحروف التى عددها ح المساوية ح لا يحصل ادنى تغيير ظاهرى لكن اذا قرنت الحروف المساوية ح بأدلة اى اذا رمزنا اليها بالرموز

$$\text{ح}_1 \text{ , ح}_2 \text{ , ح}_3 \text{ ..... ح}_\text{ح}$$

كى يتميز بعضها عن البعض الآخر فان كل ترتيب من التراتيب السابقة التى عددها سه يحدث تراتيب متميزة عددها لـح وحيث انه يوجد الآن حروف مختلفة عددها م فبذلك تتكون تباديل عددها لـم للحروف المختلفة المعينة العدد واذن يكون

$$\text{لـم} = \text{سه} \times \text{لـح}$$

ومن هنا يوجد أن

$$\text{سه} = \frac{\text{لـم}}{\text{لـح}} \qquad (1)$$

مثلا بالحروف الثلاثة ح , ح , د التى فيها حرفان مساويا ح لا يمكن ان يكون الا تباديل عددها $\frac{\text{لـ}3}{\text{لـ}2}$ اى ٣ تباديل مختلفة وهى

ححد , حدح , دحح

ولاجل اعادة الدليل المتقدم على هذا المثال كى يثبت فى الذهن نقرن الحرفين المساويين ح بدليلين ونبدل الحرفين ح_1 , ح_2 فيتولد بالترتيب الاول وهو ح ح د ترتيبان متميزان وهما $\text{ح}_1\text{ح}_2\text{د}$, $\text{ح}_2\text{ح}_1\text{د}$ وكذلك يتولد من الترتيب الثانى وهو

حدح

حـ د حـ ترتيبان وهما $حـ_{١}$ د $حـ_{٢}$ و $حـ_{٢}$ د $حـ_{١}$ ويتولد من الثالث ترتيبان وهما د $حـ_{١}$ $حـ_{٢}$ و د $حـ_{٢}$ $حـ_{١}$ وبذلك تتكون التباديل الستة وهي

$حـ_{١}$ $حـ_{٢}$ د و $حـ_{١}$ د $حـ_{٢}$ و د $حـ_{١}$ $حـ_{٢}$ و

$حـ_{٢}$ $حـ_{١}$ د و $حـ_{٢}$ د $حـ_{١}$ و د $حـ_{٢}$ $حـ_{١}$

التي هي تباديل الحروف الثلاثة $حـ_{١}$ و $حـ_{٢}$ و د

ولنفرض أن من ضمن الحروف التي عددها م حروفا عددها ح مساوية حـ وحروفا عددها ط مساوية د وان الحروف الاخر مختلفة ولنرمز بحرف سـ لعدد التباديل التي يمكن تكوينها بهذه الحروف التي عددها م فاذا قرنت الحروف التي عددها ط المساوية د كي يمتاز بعضها عن بعض وابدلت هذه الحروف التي عددها ط في كل من التراتيب السابقة فان كلا من التراتيب التي عددها سـ يولد تراتيب متميزة عددها ط! ويكون عدد جميع التراتيب هو سـ × ط! وتكون هذه التراتيب هي تباديل الحروف التي عددها م التي منها حروف عددها ح مساوية حـ والحروف الاخر مختلفة وحيث ان عدد هذه التباديل يساوي $\frac{م!}{ح!}$ فيكون

$$سـ \times ط! = \frac{م!}{ح!}$$

ومن هنا نوجد أن

$$سـ = \frac{م!}{ح!\,ط!} \qquad (٢)$$

ويمكن ان يستمر هذا الدليل فاذا وجدت حروف عددها ح مساوية حـ وحروف عددها ط مساوية د وحروف عددها ك مساوية هـ وكانت الحروف الاخر مختلفة يكون عدد التباديل التي يمكن تكوينها بهذه الحروف المعينة العدد مبينا بالقانون

$$\frac{م!}{ح!\,ط!\,ك!} \qquad (٣)$$

وهلم جرا

مثلا اذا كان هناك خمسة حروف مساوية حـ وثلاثة حروف مساوية د وحرفان

مساويا ه حروف واحد و فانه يمكن ان تكون بهذه الحروف الاحد عشر تباديل عددها

$$\frac{\text{ل}_{11}}{\text{ل}_{1}\ \text{ل}_{2}\ \text{ل}_{3}\ \text{ل}_{5}} = \frac{11\times10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{1\times2\times1\times3\times2\times1\times5\times4\times3\times2\times1} = 27720$$

بـ ١٩ د (التوافيق) قد رمزنا بالرمز $\text{ق}^{\text{ن}}_{\text{م}}$ لعدد التوافيق التي يمكن تكوينها بحروف مختلفة عددها م اذا أخذت نونا نونا بجميع الكيفيات الممكنة بحيث لا يدخل كل حرف الا مرة واحدة في الغاية في كل توفيق ولنفرض الآن انه يمكن تكرار الحرف الواحد مرارا بقدر ما يراد ولنرمز بالرمز $\text{ع}^{\text{ن}}_{\text{م}}$ لعدد التوافيق التي يمكن تكوينها بهذه الكيفية مثلا اربعة حروف مختلفة ح، ء، ه، و يمكن بها تكوين اربعة توافيق ثلاث ثلاث متى دخل الحرف الواحد في كل توفيق مرة واحدة في الغاية وهذه التوافيق هي

حءه , حءو , حهو , ءهو

وهي التوافيق التي اعتبرناها الى الآن لكن اذا أمكن تكرار الحرف الواحد توجد توافيق أخر خلاف هذه التوافيق وهي

ححء , ححه , ححو ,

ءءح , ءءه , ءءو ,

ههح , ههء , ههو ,

ووح , ووء , ووه ,

ححح , ءءء , ههه , ووو

يدخل فيها الحرف الواحد مرتين أو ثلاث مرات وفي هذا المثال يكون

$$\text{ق}^{3}_{4} = 4 \quad , \quad \text{ع}^{3}_{4} = 20$$

ولنبين كيف يمكن ايجاد عدد التوافيق اذا كررت الحروف فنقول لنتصور أنه كون جدول يحتوي على جميع توافيق الحروف التي عددها م نونا نونا اذا كررت الحروف ولنعد عدد الحروف المكتوبة في الجدول فكل توفيق يحتوي على حروف عددها ن مختلفة او غير مختلفة وحيث ان عدد التوافيق هو $\text{ع}^{\text{ن}}_{\text{م}}$ فيكون عدد جميع الحروف المكتوبة في الجدول هو $\text{ن}\times\text{ع}^{\text{ن}}_{\text{م}}$ وحيث ان الحروف التي عددها

م تدخل جميعها فيه مرارا محتفظة العدد فـ دخل احدها وليكن ح مرارا عددها

$$\frac{\text{ه}\times \text{ع}^{\text{ه}}_{\text{م}}}{\text{م}}$$

لكن يمكن ايجاد هذا العدد بكيفية أخرى لاننا اذا وضعنا التوافيق التي تحتوى على الحرف ح بجانب ورفعنا من كل منها الحرف ح مرة واحدة فمن الواضح انه يتبقى توافيق الحروف التي عددها م نونا ناقصا واحدا نونا ناقصا واحدا مكررة فيها الحروف وهذه التوافيق عددها $\text{ع}^{\text{ه}-١}_{\text{م}}$ وبموجب الدليل المتقدم يدخل الحرف ح في هذه التوافيق مرارا عددها

$$\frac{(\text{ه}-١)\times \text{ع}^{\text{ه}-١}_{\text{م}}}{\text{م}}$$

فاذا اضيف الآن لكل منها حرف ح المحذوف كي تتكون التوافيق الاصلية يشاهد أن الحرف ح يدخل في الجدول مرارا عددها

$$\frac{(\text{ه}-١)\times \text{ع}^{\text{ه}-١}_{\text{م}}}{\text{م}} + \text{ع}^{\text{ه}-١}_{\text{م}} \quad \text{أو} \quad \frac{(\text{م}+\text{ه}-١)\times \text{ع}^{\text{ه}-١}_{\text{م}}}{\text{م}}$$

واذن يكون

$$\frac{\text{ه}\times \text{ع}^{\text{ه}}_{\text{م}}}{\text{م}} = \frac{(\text{م}+\text{ه}-١)\times \text{ع}^{\text{ه}-١}_{\text{م}}}{\text{م}}$$

أو

$$\text{ع}^{\text{ه}}_{\text{م}} = \text{ع}^{\text{ه}-١}_{\text{م}} \times \frac{\text{م}+\text{ه}-١}{\text{ه}}$$

ومن هنا يستنتج باعطاء ه المقادير ٢و٣و٤و....و ه على التوالي أن

$$\text{ع}^{٢}_{\text{م}} = \text{ع}^{١}_{\text{م}} \times \frac{\text{م}+١}{٢} = \frac{\text{م}}{١} \times \frac{\text{م}+١}{٢} \quad ,$$

$$\text{ع}^{٣}_{\text{م}} = \text{ع}^{٢}_{\text{م}} \times \frac{\text{م}+٢}{٣} \quad ,$$

$$\text{ع}^{٤}_{\text{م}} = \text{ع}^{٣}_{\text{م}} \times \frac{\text{م}+٣}{٤} \quad ,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad ,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad ,$$

$$\text{ع}^{\text{ه}}_{\text{م}} = \text{ع}^{\text{ه}-١}_{\text{م}} \times \frac{\text{م}+\text{ه}-١}{\text{ه}}$$

فاذا ضربت جميع هذه المتساويات فى بعضها تنمحى جميع العوامل المتوسطة ويتحصل القانون

$$ع^{ه}_{م} = \frac{م(م+١)(م+٢)\cdots\cdots(م+ه-١)}{١×٢×٣\cdots\cdots×ه} \qquad (٤)$$

وفى التوافيق المعتادة التى يكون عددها مبينا بالرمز $ق^{ه}_{م}$ لا يمكن ان يزيد ه الذى هو عدد الحروف التى تدخل فى كل توفيق عن م الذى هو عدد الحروف المعلومة لكن متى كرّر الحرف الواحد مرارا بقدر ما يراد فانه لا مانع يمنع ان ه يكون أكبر من م

(المبحث الرابع)

(فى رفع كمية كثيرة الحدود الى أى قوة)

بند (رفع اى كمية كثيرة الحدود الى اى قوة) ليكن المطلوب تحليل

$$(حـ+ء+ه+\cdots\cdots+ك)^{م}$$

أعنى ليكن المطلوب ايجاد حاصل ضرب كميات كثيرة الحدود متساوية عددها م فى بعضها فلا يخفى ان حاصل ضرب عدة كميات كثيرة الحدود هو مجموع حواصل الضرب التى يتحصل عليها باخذ حد فى كل منها بجميع الكيفيات الممكنة فاذا أخذنا الحرف حـ فى عوامل عددها ح والحرف ء فى عوامل أخر عددها ط والحرف ه فى عوامل أخر عددها ك الخ نجد حدا بالصورة

$$حـ^{ح}\, ء^{ط}\, ه^{ك} \cdots\cdots$$

(هذه النقط الموضوعة معوضة لحروف أخر) ويكون مجموع الاساس أى درجة الحد مساوية م دائما ومن الواضح ان يتحصل على هذا الحد مرارا بقدر عدد التراتيب التى يمكن تكوينها بحروف عددها ح مساوية حـ وحروف عددها ط مساوية ء وحروف عددها ك مساوية ه الخ لانه يطابق كل من هذه التراتيب كيفية مخصوصة بها يتحصل على الحد $حـ^{ح} ء^{ط} ه^{ك}$ ..... فاذا جمعت هذه الحدود المتساوية يوجد

$$\frac{ل_{م}}{ل_{ح}\, ل_{ط}\, ل_{ك} \cdots\cdots} حـ^{ح}\, ء^{ط}\, ه^{ك} \cdots\cdots$$

وحينئذ

وحينئذ يمكن ان يستدل على التحليل بواسطة القانون

$$(\text{ح}+\text{ء}+\text{هـ}+\cdots+\text{ك})^{\text{م}}=\text{مج}\ \frac{\text{لم}}{\text{لع}\ \text{لط}\ \text{لك}\cdots}\ \text{ح}^{\text{ع}}\ \text{ء}^{\text{ط}}\ \text{هـ}^{\text{ك}}\cdots\cdots \quad (٥)$$

والعلامة مج تدل على مجموع حدود صورتها كصورة الحد الموضوع بعدها فاذا كان احد الاساس ع وط وك الخ يساوى صفرا لزم أن يصطلح على ان لـ٠ الذى لا معنى له فى نفسه يكون معوّضا بواحد مثلا اذا فرضنا ان ع=٠ وانه اخذ الحرف ء فى عوامل عددها ط والحرف هـ فى عوامل عددها ط وهكذا فان الحد $\text{ء}^{\text{ط}}\text{هـ}^{\text{ك}}$ ..... الذى فيه مجموع الاس وهو ط+ك+..... مساو م يكون مكررا مرارا بقدر عدد التباديل التى يمكن تكوينها بحروف عددها ط مساوية ء وحروف اخر عددها ك مساوية هـ وهكذا وهذا العدد هو

$$\frac{\text{لم}}{\text{لط}\ \text{لك}\cdots\cdots}$$

وحينئذ يكون القانون العمومى موافقا اذا عوّض فيه الرمز لـ٠ بالواحد

بند ٢١ (عدد حدود التحليل) ويمكن بسهولة معرفة عدد حدود التحليل لاننا اذا رمزنا بحرف ب لعدد حدود الكمية الكثيرة الحدود التى ترفع الى القوة الميمية يكون كل حد بصرف النظر عن معامله بالصورة $\text{ح}^{\text{ع}}\text{ء}^{\text{ط}}\text{هـ}^{\text{ك}}$ ...... أى بالصورة

ححح.......ءء.......هـ.......

ويكون مشتملا على حروف عددها م ولاشك ان ذلك توفيق تكرارى ميمامميا للحروف ح ء هـ ...... ك التى عددها ب وحينئذ يكون عدد حدود التحليل مساويا للعدد التوافيق التكرارية لحروف عددها ب ميمامميا اعنى مساويا

$$\text{ع}_{\text{ب}}^{\text{م}}=\frac{\text{ب}(\text{ب}+١)(\text{ب}+٢)\cdots\cdots(\text{ب}+\text{م}-١)}{١\times٢\times٣\cdots\cdots\times\text{م}} \quad (٦)$$

وهذا العدد مساو لعدد التوافيق الغير التكرارية لحروف عددها (ب+م−١) ميمامميا ولا يخفى ان

$$\text{ق}_{\text{ب}+\text{م}-١}^{\text{م}}=\text{ق}_{\text{ب}+\text{م}-١}^{\text{ب}-١}$$

وحينئذ يكون

$$ع_{ب}^{م} = \frac{(م+١)(م+٢)\cdots\cdots(م+ب-١)}{١\times٢\times٣\cdots\cdots(ب-١)} \qquad (٧)$$

فيطبق احد هذين القانونين او الآخر على حسب ما تقتضيه الاحوال

بند ٢٣ (تطبيقات) ولنعتبر على الخصوص المربع $(ح+د+هـ+\cdots)^{٢}$ لكمية كثيرة الحدود أعني حاصل الضرب

$$(ح+د+هـ+\cdots\cdots)\times(ح+د+هـ+\cdots\cdots)$$

لكميتين كثيرتى الحدود متساويتين فاذا اخذ حرف ح فى الكميتين الكثيرتى الحدود يتحصل الحد $ح^{٢}$ وحيث انه لا يمكن ان يتحصل على هذا الحد الا بهذه الكيفية فيكون معامله الواحد واذا اخذ حرف ح فى احدى الكميتين الكثيرتى الحدود وحرف د فى الاخرى يوجد الحد حد ومن الواضح انه يمكن ان يتحصل على هذا الحد بكيفيتين إما باخذ الحرف ح فى الكمية الاولى والحرف د فى الثانية وإما باخذ الحرف ح فى الثانية والحرف د فى الاولى وهاتان الكيفيتان تطابقان للترتيبين حد , دح وحينئذ يكون معامل هذا الحد مساويا ٢ ويكون هو ٢حد ويعلم من ذلك ان مربع أي كمية كثيرة الحدود يساوي مجموع مربعات جميع حدودها زائدا ضعف مجموع حواصل ضرب حدودها مثنى مثنى

ولنعتبر أيضا المكعب $(ح+د+ع+\cdots\cdots)^{٣}$ لكمية كثيرة الحدود فبموجب القانون العمومي (٥) يحتوي التحليل على ثلاثة أنواع من الحدود الاول حدود بالصورة $ح^{٣}$ معاملاتها تساوي واحدا الثاني حدود بالصورة $ح^{٢}د$ معاملاتها تساوي $\frac{٣!}{٢!\,١!}$ أي تساوي ٣ الثالث حدود بالصورة حده معاملاتها تساوي $\frac{٣!}{١!\,١!\,١!}$ أي تساوي ٦ ويعلم من ذلك ان مكعب أي كمية كثيرة الحدود يساوي مجموع مكعبات حدودها زائدا ثلاثة أمثال مجموع حواصل الضرب التي يتحصل عليها بضرب مربع حد حيثما اتفق فى حد آخر زائدا ستة أمثال حواصل ضرب حدودها ثلاث ثلاث فاذا طبق نفس القانون (٥) لاجل تحليل قوة كمية ذات حدين يوجد أن

(ح.

$$(ح+ء)^{م} = مج \frac{م!}{ح!\;ط!}\, ح^{ل}\, ء^{ط}$$

وهذا القانون هو عين القانون الذي وجد سابقا (بـ ١٠ـد) حيث ان ح+ط=م وان (بـ ٧ـد)

$$\frac{م!}{ح!\;ط!} = ق^{ح}_{م} = ق^{م-ح}_{م}$$

(المبحث الخامس)

في جذر الكميات الكثيرة الحدود

بـ ٢٣ـد (الجذر التربيعي) لنفرض ان المطلوب استخراج الجذر التربيعي لكمية كثيرة الحدود صحيحة ح مرتبة على حسب القوى التنازلية لحرف س ولنفرض وجود كمية كثيرة الحدود صحيحة اذا ربعت تحدث الكمية المفروضة بالضبط ولنرمز بالحروف ح, ء, هـ, ... الخ للحدود المختلفة لهذه الكمية التي هي الجذر التربيعي مرتبة كذلك على حسب القوى التنازلية الى س فنجد أن

$$ح=(ح+ء+هـ+\ldots)^{2}$$

$$=ح^{2}+2ح(ء+هـ+\ldots)+(ء+هـ+\ldots)^{2}$$

وحيث ان الحد $ح^{2}$ بدرجة أكبر من جميع درجات الحدود الأخر فلا يمكن اختصاره مع أدنى حد آخر وبناء على ذلك يكون مساويا للحد الاول من الكمية الكثيرة الحدود ح واذن يتحصل على الحد الاول ح من ناتج الجذر باستخراج الجذر التربيعي للكمية الكثيرة الحدود المفروضة فاذا طرح مربع الحد الاول لناتج الجذر من كثيرة الحدود المذكورة ورمز للباقي بحرف ر يكون

$$ر=2ح(ء+هـ+\ldots)+(ء+هـ+\ldots)^{2}$$

ويكون الجزء الاول من الطرف الثاني بدرجة أعلا من درجة الجزء الثاني والحد الاول من هذا الجزء الاول هو ٢ حء وحيث كان هذا الحد هو ٢ حء بدرجة أعلا من درجة جميع الحدود الأخر فيكون مساويا للحد الاول من كثيرة الحدود ر التي هي الباقي وحينئذ يتحصل على الحد الثاني وهو ء من ناتج الجذر بقسمة الحد الاول من

الباقى ر على ٢ ح أعنى على ضعف الحد الاول من ناتج الجذر
فاذا اعتبر الآن الحدان الاولان المعلومان من ناتج الجذر حدا واحدا يكون

$$\text{ع} = \{(\text{ح}+\text{د}) + (\text{هـ}+\text{و}+\ldots\ldots)\}^{2}$$

$$= (\text{ح}+\text{د})^{2} + ٢(\text{ح}+\text{د})(\text{هـ}+\text{و}+\ldots\ldots) + (\text{هـ}+\text{و}+\ldots\ldots)^{2}$$

و بطرح مربع مجموع الحدين الاولين من ناتج الجذر من كثيرة الحدود المفروضة والرمز بحرف ر للباقى الجديد يوجد أن

$$\text{ر}' = ٢(\text{ح}+\text{د})(\text{هـ}+\text{و}+\ldots\ldots) + (\text{هـ}+\text{و}+\ldots\ldots)^{2}$$

فالجزء الاول من الطرف الثانى بدرجة أعلا من درجة الجزء الثانى والحد الاول من هذا الجزء الاول هو ٢ ح هـ وحيث ان الحد ٢ ح هـ بدرجة أعلا من درجة جميع الحدود الاخر فيكون مساويا للحد الاول من كثيرة الحدود ر' وحينئذ يتحصل على الحد الثالث هـ من ناتج الجذر بقسمة الحد الاول من الباقى الثانى على ٢ ح أى على ضعف الحد الاول من ناتج الجذر

فاذا اعتبرت الآن الحدود الثلاثة الاول المعلومة من ناتج الجذر حدا واحدا يكون

$$\text{ع} = \{(\text{ح}+\text{د}+\text{هـ}) + (\text{و}+\text{ز}+\ldots\ldots)\}^{2}$$

$$= (\text{ح}+\text{د}+\text{هـ})^{2} + ٢(\text{ح}+\text{د}+\text{هـ})(\text{و}+\text{ز}+\ldots\ldots) + (\text{و}+\text{ز}+\ldots\ldots)^{2}$$

واذا طرحنا مربع مجموع الحدود الثلاثة الاول من ناتج الجذر من كثيرة الحدود المفروضة ورمزنا بحرف ر'' للباقى الجديد نجد أن

$$\text{ر}'' = ٢(\text{ح}+\text{د}+\text{هـ})(\text{و}+\text{ز}+\ldots\ldots) + (\text{و}+\text{ز}+\ldots\ldots)^{2}$$

والحد الاول من هذا الباقى مساو ٢ ح و وحينئذ اذا قسم هذا الحد على ٢ ح لتحصل الحد الرابع و من ناتج الجذر فيداوم العمل بهذه الكيفية الى ان يتوصل الى الحد الاخير من ناتج الجذر الذى يتحصل عليه مباشرة لان الاثبات الذى ذكرناه يطبق متى كانت كثيرة الحدود مرتبة على حسب القوى التصاعدية الى س وحينئذ يتحصل على الحد الاخير مباشرة باستخراج الجذر التربيعى للحد الاخير من كثيرة الحدود المفروضة فاذا وصلت العملية الى هذا الحد الاخير وكان الباقى التالى معدوما استنتج من ذلك ان كثيرة الحدود المفروضة تكون مربعا كاملا ومن الواضح انه يمكن تغيير اشارات جميع حدود ناتج الجذر بحيث لا يتغير المربع

ويمكن اختصار حساب البواقى قليلا كما فى علم الحساب ففى وجد الحدان الاولان من ناتج

ناتج الجذر يلزم طرح (ح+ء)^٢ أى ح^٢+٢ح ء + ء^٢ من كثيرة الحدود المفروضة وحيث سبق طرح ح^٢ فيكفى طرح الكمية ٢ح ء+ ء^٢ أى (٢ح+ء)ء من الباقى وكذا متى وجد الحد الثالث ه يلزم طرح (ح+ء+ه)^٢ أى (ح+ء)^٢ +٢ (ح+ء)ه+ه^٢ من كثيرة الحدود المفروضة وحيث سبق طرح (ح +ء)^٢ فيكفى طرح الكمية ٢ (ح+ء)ه+ه^٢ أى (٢ح+٢ء+ه)ه من الباقى الثانى ثم وعلى العموم متى وجد حد جديد من ناتج الجذر يكتب هذا الحد الجديد على شمال ضعف الجزء الذى سبق الحصول عليه ويضرب فى هذا الحد ويطرح حاصل الضرب من الباقى السابق

مثلا لنعتبر كثيرة الحدود وهى

٢٥ سه^٦ − ٧٠ سه^٥ + ٨٩ سه^٤ − ٨٦ سه^٣ + ٥٨ سه^٢ − ٢٤ سه + ٩

فلاجل ان تكون هذه الكمية الكثيرة الحدود مربع كمية كثيرة الحدود صحيحة يلزم أولا ان يكون الحد الاول والحد الاخير مربعين كاملين وهذان الشرطان مستوفيان هنا فاذا كان للجذر وجود يكون حده الاول هو ٥ سه^٣ ويكون حده الاخير ± ٣ فاذا أجريت العملية كما ذكرنا يتوصل الى الحد الاخير −٣ والى باق معدوم ويكون الجذر المطلوب هو ٥ سه^٣ −٧ سه^٢ + ٤ سه −٣ وصورة العمل هكذا

٢٥ سه^٦ − ٧٠ سه^٥ + ٨٩ سه^٤ − ٨٦ سه^٣ + ٥٨ سه^٢ − ٢٤ سه + ٩	٥ سه^٣ − ٧ سه^٢ + ٤ سه − ٣
+ ٧٠ سه^٥ − ٤٩ سه^٤	١٠ سه^٣ − ٧ سه^٢
	١٠ سه^٣ − ٧ سه^٢ + ٤ سه
+ ٤٠ سه^٤ − ٨٦ سه^٣ + ٥٨ سه^٢ − ٢٤ سه + ٩	١٠ سه^٣ − ١٤ سه^٢ + ٨ سه − ٣
− ٤٠ سه^٤ + ٥٦ سه^٣ − ١٦ سه^٢	
− ٣٠ سه^٣ + ٤٢ سه^٢ − ٢٤ سه + ٩	
+ ٣٠ سه^٣ − ٤٢ سه^٢ + ٢٤ سه − ٩	
٠	

بند ٢٤ (الجذر الميمى) لاستخراج الجذر الميمى لكمية كثيرة الحدود يتبع سير مشابه للسير الذى استعمل لاستخراج الجذر التربيعى لكمية كثيرة الحدود ولنفرض ان كثيرة الحدود ح مرتبة على حسب القوى التنازلية الى سه ولنرمز كذلك بحروف ح و ء وه ...... للحدود المختلفة لناتج الجذر فنجد أن

$$\text{ع}=(\text{ح}+\text{د}+\text{هـ}+\cdots)^{\text{م}}$$

$$=\text{ح}^{\text{م}}+\text{م}\,\text{ح}^{\text{م}-١}(\text{د}+\text{هـ}+\cdots)+\frac{\text{م}(\text{م}-١)}{١\times٢}\text{ح}^{\text{م}-٢}(\text{د}+\text{هـ}+\cdots)^{٢}+\cdots$$

ويكون الحد الاول من كثيرة الحدود المفروضة مساويا $\text{ح}^{\text{م}}$ وحينئذ اذا أخذ الجذر الميمى لهذا الحد الاول يتحصل الحد الاول من ناتج الجذر فاذا طرح $\text{ح}^{\text{م}}$ من الكمية المفروضة يوجد أن

$$\text{ر}=\text{م}\,\text{ح}^{\text{م}-١}(\text{د}+\text{هـ}+\cdots)+\frac{\text{م}(\text{م}-١)}{١\times٢}\text{ح}^{\text{م}-٢}(\text{د}+\text{هـ}+\cdots)^{٢}+\cdots$$

ويكون الحد الاول من الباقى ر مساويا $\text{م}\,\text{ح}^{\text{م}-١}\,\text{د}$ فاذا قسم هذا الحد الاول على $\text{م}\,\text{ح}^{\text{م}-١}$ يتحصل الحد الثانى د من ناتج الجذر ولنعتبر الآن المقدار الجبرى وهو

$$\text{ع}=\left|(\text{ح}+\text{د})+(\text{هـ}+\text{و}+\cdots)\right|^{\text{م}}$$

$$=(\text{ح}+\text{د})^{\text{م}}+\text{م}(\text{ح}+\text{د})^{\text{م}-١}(\text{هـ}+\text{و}+\cdots)+\cdots$$

ولنطرح $(\text{ح}+\text{د})^{\text{م}}$ من كثيرة الحدود المفروضة فيتحصل باق

$$\text{ر}'=\text{م}(\text{ح}+\text{د})^{\text{م}-١}(\text{هـ}+\text{و}+\cdots)+\cdots$$

حده الاول $\text{م}\,\text{ح}^{\text{م}-١}\,\text{هـ}$ فاذا قسم هذا الحد الاول على $\text{م}\,\text{ح}^{\text{م}-١}$ يتحصل الحد الثالث هـ من ناتج الجذر وهلم جرا

(المبحث السادس)

(فى معرفة مجموع أكوام الجلل)

بند (مسئلة) انحصر طريقة لمعرفة مجموع اكوام الجلل مؤسسة على حل هذه المسئلة وهى المطلوب معرفة مجموع القوى المتشابهة لحدود متوالية عددية ولحل هذه المسئلة نفرض المتوالية

$$\div\ \text{ح}.\text{د}.\text{هـ}.\text{و}.\cdots\text{ك}$$

المكونة من حدود عددها ن ونرمز بحرف ر لاساسها وبالرمز مج لمجموع القوى الميمية لجميع الحدود فبموجب قانون نوتون يكون

$$(\text{ح}+$$

$$(\text{ح}+\text{ن})^{\text{م}+1}=\text{ح}^{\text{م}+1}+\frac{\text{م}+1}{1}\text{ح}^{\text{م}}\text{ن}+\frac{(\text{م}+1)\text{م}}{1\times2}\text{ح}^{\text{م}-1}\text{ن}^{2}+\cdots+\frac{\text{م}+1}{1}\text{ح}\,\text{ن}^{\text{م}}+\text{ن}^{\text{م}+1}\ \text{و}$$

$$(\text{ء}+\text{ن})^{\text{م}+1}=\text{ء}^{\text{م}+1}+\frac{\text{م}+1}{1}\text{ء}^{\text{م}}\text{ن}+\frac{(\text{م}+1)\text{م}}{1\times2}\text{ء}^{\text{م}-1}\text{ن}^{2}+\cdots+\frac{\text{م}+1}{1}\text{ء}\,\text{ن}^{\text{م}}+\text{ن}^{\text{م}+1}\ \text{و}$$

$$(\text{ه}+\text{ن})^{\text{م}+1}=\text{ه}^{\text{م}+1}+\frac{\text{م}+1}{1}\text{ه}^{\text{م}}\text{ن}+\frac{(\text{م}+1)\text{م}}{1\times2}\text{ه}^{\text{م}-1}\text{ن}^{2}+\cdots+\frac{\text{م}+1}{1}\text{ء}\,\text{ن}^{\text{م}}+\text{ن}^{\text{م}+1}\ \text{و}$$

. . . . و

. . . . و

$$(\text{ے}+\text{ن})^{\text{م}+1}=\text{ے}^{\text{م}+1}+\frac{\text{م}+1}{1}\text{ے}^{\text{م}}\text{ن}+\frac{(\text{م}+1)\text{م}}{1\times2}\text{ے}^{\text{م}-1}\text{ن}^{2}+\cdots+\frac{\text{م}+1}{1}\text{ے}\,\text{ن}^{\text{م}}+\text{ن}^{\text{م}+1}\ \text{و}$$

$$(\text{ك}+\text{ن})^{\text{م}+1}=\text{ك}^{\text{م}+1}+\frac{\text{م}+1}{1}\text{ك}^{\text{م}}\text{ن}+\frac{(\text{م}+1)\text{م}}{1\times2}\text{ك}^{\text{م}-1}\text{ن}^{2}+\cdots+\frac{\text{م}+1}{1}\text{ك}\,\text{ن}^{\text{م}}+\text{ن}^{\text{م}+1}$$

فاذا أضيفت هذه المتساويات النونية العدد الى بعضها طرفا الى طرف وحذفت الحدود المتساوية وهى

$$(\text{ح}+\text{ن})^{\text{م}+1}\ \text{و}\ \text{ء}^{\text{م}+1},\ (\text{ء}+\text{ن})^{\text{م}+1}\ \text{و}\ \text{ه}^{\text{م}+1},\ \ldots\ldots,\ (\text{ے}+\text{ن})^{\text{م}+1}\ \text{و}\ \text{ك}^{\text{م}+1}$$

التى توجد فى الطرفين وعوض العدد $\text{ك}+\text{ن}$ بالعدد $\text{ح}+\text{ه}\,\text{ن}$ المساوى له نجد أن

$$(\text{ح}+\text{ه}\,\text{ن})^{\text{م}+1}=\text{ح}^{\text{م}+1}+\frac{\text{م}+1}{1}\text{ن}\,\text{ع}_{\text{م}}+\frac{(\text{م}+1)\text{م}}{1\times2}\text{ن}^{2}\,\text{ع}_{\text{م}-1}+\cdots\cdots+\frac{\text{م}+1}{1}\text{ن}^{\text{م}}\,\text{ع}_{1}+\text{ه}\,\text{ن}^{\text{م}+1}\qquad(1)$$

فاذا جعل م=١ يوجد المجموع المعلوم وهو ع_1 الذى هو مجموع حدود المتوالية واذا جعل م=٢ يتحصل ع_2 بواسطة ع_1 واذا جعل م=٣ يتحصل ع_3 بواسطة ع_1 و ع_2 وهلم جرا

مثلا اذا فرض ان المطلوب معرفة مجموع القوى المتشابهة للاعداد الاول الصحيحة التى عددها ه يجعل ح=١ و ن=١ فى القانون (١) وباجراء العمل كما ذكرنا يوجد على التوالى أن

$$\text{ع}_1=\frac{\text{ه}(\text{ه}+1)}{2}\ ,\ \text{ع}_2=\frac{\text{ه}(\text{ه}+1)(2\text{ه}+1)}{2\times3}\ ,\ \text{ع}_3=\left\{\frac{\text{ه}(\text{ه}+1)}{2}\right\}^{2}\ ,\ \ldots$$

بند ٢٦ (الكوم المثلثي) قاعدة الكوم المثلثي تتكون من جلل مرتبة على شكل مثلث متساوى الاضلاع واول صف يحتوى على جلة واحدة والثانى على ٢ والثالث على ٣ وهكذا الى الصف النونى الذى يحتوى على جلل عددها ه واذن تكون عدد الجلل التى تحتوى عليها القاعدة هو

$$١+٢+٣+\cdots+ه=\frac{ه^{٢}+ه}{٢}$$

وضلع المثلث المكون للطبقة التى تعلو القاعدة مباشرة يحتوى على جلل ينقص عددها عن عدد الجلل التى يحتوى عليها اضلاع القاعدة جلة واحدة أى يحتوى على جلل عددها (ه-١) واذن يكون عدد جلل هذه الطبقة هو (بتغيير ه الى ه-١)

$$١+٢+٣+\cdots+(ه-١)=\frac{(ه-١)^{٢}+(ه-١)}{٢}$$

وبمثل ذلك يكون عدد جلل الطبقة التالية هو

$$١+٢+٣+\cdots+(ه-٢)=\frac{(ه-٢)^{٢}+(ه-٢)}{٢}$$

وهكذا الى الطبقة العليا التى تحتوى على جلل عددها

$$١=\frac{١^{٢}+١}{٢}$$

وحينئذ يكون العدد الكلى للجلل التى يحتوى عليها الكوم المثلثي هو

$$ع=\frac{ه^{٢}+ه}{٢}+\frac{(ه-١)^{٢}+(ه-١)}{٢}+\frac{(ه-٢)^{٢}+(ه-٢)}{٢}+\cdots+\frac{١^{٢}+١}{٢}$$

أو

$$ع=\frac{ه^{٢}+(ه-١)^{٢}+(ه-٢)^{٢}+\cdots+١^{٢}}{٢}+\frac{ه+(ه-١)+(ه-٢)+\cdots+١}{٢}$$

أى

$$ع=\frac{ع_{٢}}{٢}+\frac{ع_{١}}{٢}=\frac{ه(ه+١)(٢ه+١)}{١٢}+\frac{ه(ه+١)}{٤}$$

أو

$$ع=\frac{ه(ه+١)(ه+٢)}{٦}$$

بند ٢٧ (الكوم المربع القاعدة) قاعدة هذا الكوم مربع يحتوى على جلل عددها

عددها $\text{ه}^{٢}$ اذا فرض ان ه عدد الجلل التى يحتوى عليها ضلع هذا المربع والطبقة التالية تحتوى على جلل عددها $(\text{ه}-١)^{٢}$ والثالثة على $(\text{ه}-٢)^{٢}$ وهكذا الى الطبقة الاخيرة التى لا تحتوى الا على جلة واحدة أى $١^{٢}$ واذن يكون العدد الكلى لجلل الكوم هو

$$\text{ع} = \text{ه}^{٢} + (\text{ه}-١)^{٢} + \cdots + ١^{٢} = \frac{\text{ه}(\text{ه}+١)(٢\text{ه}+١)}{٦}$$

بحث ٤٨ د (الكوم المستطيل القاعدة) قاعدة الكوم المستطيلى مستطيل و ينتهى من جزئه العلوى بصف واحد من الجلل وليكن $(\text{م}+١)$ عدد الجلل التى يحتوى عليها هذا الصف فالطبقة التى تحت هذا الصف مباشرة تتركب من صفين كل منهما يحتوى على جلل عددها $(\text{م}+٢)$ واذن يكون عدد جلل هذه الطبقة هو $٢(\text{م}+٢)$ وكذا تتركب الطبقة التالية من ثلاثة صفوف يحتوى كل منها على جلل عددها $(\text{م}+٣)$ وتحتوى حينئذ على جلل عددها $٣(\text{م}+٣)$ وهكذا الى القاعدة المركبة من صفوف عددها ه يحتوى كل منها على جلل عددها $(\text{م}+\text{ه})$ والتى تحتوى على جلل عددها $\text{ه}(\text{م}+\text{ه})$ واذن يكون عدد الجلل التى يحتوى عليها الكوم المستطيلى هو

$$\text{ع} = (\text{م}+١) + ٢(\text{م}+٢) + ٣(\text{م}+٣) + \cdots + \text{ه}(\text{م}+\text{ه})$$

أو

$$\text{ع} = \text{م}(١+٢+٣+\cdots+\text{ه}) + (١^{٢}+٢^{٢}+٣^{٢}+\cdots+\text{ه}^{٢})$$

أى

$$\text{ع} = \text{م}\,\text{ع}_{١} + \text{ع}_{٢} = \frac{\text{م}\cdot\text{ه}(\text{ه}+١)}{٢} + \frac{\text{ه}(\text{ه}+١)(٢\text{ه}+١)}{٦}$$

ومن هنا يوجد أن

$$\text{ع} = \frac{\text{ه}(\text{ه}+١)(٣\text{م}+٢\text{ه}+١)}{٦}$$

(الفصل الثانى)

(فى المحددات)

(المبحث الاول)

(تعاريف واصطلاحات)

بند ٢٩ (تعريفات) لنعتبر تباديل الاعداد الاول التي عددها ﻫ وهي

١و٢و٣و....و٩

أعني التراتيب المختلفة التي يمكن تكوينها بهذه الحروف التي عددها ﻫ بوضع بعضها بجانب البعض الآخر على خط مستقيم واحد (بند ٤) فمتى كان عددان من الاعداد المكونة لترتيب واحد موضوعين بحيث يكون أول عدد أكبر من العدد الآخر يقال ان هذين العددين يكونان قلبة وتنقسم التراتيب من حيث هي الى قسمين متميزين على حسب ما يكون العدد الكلي للقلبات التي يحتوي عليها كل ترتيب من هذه التراتيب زوجيا أو فرديا ويقال ان التراتيب التي تحتوي على قلبات زوجية العدد من القسم الاول وان التراتيب التي تحتوي على قلبات فردية العدد من القسم الثاني

مثلا بالاعداد الثلاثة وهي ١و٢و٣ يمكن تكوين ستة تراتيب وهي

٣٢١ و ١٣٢ و ٢١٣ و

٣١٢ و ٢٣١ و ١٢٣

ولا يحتوي الاول على قلبات مطلقا والثاني يحتوي على قلبتين وهما (٢و١) و (٣و١) والثالث يحتوي كذلك على قلبتين وهما (٣و١) و (٣و٢) وكل من الرابع والخامس يحتوي على قلبة واحدة واما السادس فانه يحتوي على ثلاث قلبات وهي (٣و٢) و (٣و١) و (٢و١) وتكون التراتيب الثلاثة الاول من القسم الاول والتراتيب الثلاثة الاخيرة من القسم الثاني

بند ٣٠ (نظرية) اذا بدل حرفان و ور من ترتيب واحد ببعضهما فان الترتيب الحادث يكون من قسم خلاف القسم الذي منه الترتيب الاول لانه يمكن بيان الترتيب بالرمز

ح و ى ر ﻫ

وذلك بالرمز بحرف ح للجزء السابق لحرف و وبحرف ى للجزء الواقع بين و ور وبحرف ﻫ للجزء التالي لحرف ر فمتى بدل الحرفان و ور ببعضهما وجد الترتيب الجديد وهو

ح ر ى و ﻫ

ولننبه في أول الامر على انه اذا قورنت أجزاء ح من الترتيبين ببعضها وبالاجزاء التالية لها توجد قلبات متحدة العدد وعلى انه اذا قورنت أجزاء ﻫ ببعضها وبالاجزاء السابقة لها توجد كذلك قلبات متحدة العدد وحينئذ يمكن صرف النظر عن هذه الاجزاء والاقتصار

والاقتصار على مقارنة الترتيبين و و ر ، ر و و

وحيث ان القلبات التى تحصل بمقارنة أجزاء ء ببعضها منهما متحدة العدد فلا لزوم للاشتغال بها ولنفرض ان و أصغر من ر ونرمز بحرف م لعدد أجزاء ء ونفرض انه يوجد من ضمن هذه الاجزاء أجزاء عددها ح أقل من و وأجزاء عددها ك أكبر من ر

ولنختبر الترتيب الاول فبمقارنة أجزاء ء بعدد و توجد قلبات عددها ح وبمقارنة هذه الاجزاء بعدد ر توجد قلبات عددها ك وحيث انه لا يحصل بواسطة العددين و ر على قلبات فيحتوى الترتيب الاول بدون عد القلبات التى تكونها أجزاء ء على قلبات عددها ح + ك ولنختبر الآن الترتيب الثانى فحيث انه يوجد فى ء أجزاء عددها م ـ ك أقل من ر وأجزاء عددها م ـ ح أكبر من و فيحصل بمقارنة أجزاء ء بالعدد ر على قلبات عددها م ـ ك ويحصل بمقارنتها بالعدد و على قلبات عددها م ـ ح وحيث ان العددين و ر يكونان قلبة واحدة فيحتوى الترتيب الثانى حينئذ على قلبات عددها ٢م ـ ح ـ ك + ١ بدون عد قلبات ء ويكون الفرق بين عددى القلبات التى يحتوى عليها الترتيبان مساويا ± (٢م ـ ٢ح ـ ٢ك + ١) أعنى يكون عددا فرديا ويتتج من ذلك ان الترتيبين يكونان من قسمين مختلفين

وحيث ان عدد التراتيب مساو لحاصل ضرب الاعداد الاول الصحيحة التى عددها ه فيكون زوجيا ويكون عدد التراتيب التى من أحد القسمين مساويا لعدد التراتيب التى من القسم الآخر لانه يمكن مطابقة تراتيب أحد القسمين لتراتيب القسم الثانى التى تستنتج منها بتبديل حرفين معينين مثل و ر ففى المثال السابق مثلا نستنتج تراتيب القسم الثانى الثلاثة من تراتيب القسم الاول الثلاثة بتبديل العددين ١ و ٢

بند ٣١ (تعريف المحدد وكيفية تكوينه) اذا تقرر هذا واعتبرنا الجدول

$ح^{١}_{١}$	$ح^{٢}_{١}$	$ح^{٣}_{١}$	.....	$ح^{ه}_{١}$
$ح^{١}_{٢}$	$ح^{٢}_{٢}$	$ح^{٣}_{٢}$	.....	$ح^{ه}_{٢}$
$ح^{١}_{٣}$	$ح^{٢}_{٣}$	$ح^{٣}_{٣}$	.....	$ح^{ه}_{٣}$
.	.	.	.	.
$ح^{١}_{ه}$	$ح^{٢}_{ه}$	$ح^{٣}_{ه}$	.....	$ح^{ه}_{ه}$

ه ج فى

المكوّن من كميات عددها ن كل كمية منها ممتازة بدليلين يدلان على الصفين الافقى والرأسى الذين توجد بهما الكمية المذكورة وكونا الحاصل

$$\text{ح}^{1}_{1}\ \text{ح}^{2}_{2}\ \text{ح}^{3}_{3}\ \cdots\cdots\ \text{ح}^{ن}_{ن}$$

الذى هو حاصل ضرب الاجزاء الموضوعة على قطر المربع وتركنا الادلة السفلى على حالها وبدلنا الادلة العليا فى هذا الحاصل بجميع الكيفيات الممكنة ووضعنا امام كل حاصل علامة + أو علامة − على حسب ما يكون ترتيب الادلة العليا من القسم الاول أو من القسم الثانى فالمجموع الجبرى لجميع حواصل الضرب المذكورة هو ما يسمى محدد الكميات التى عددها ن ويبين المحدد بحصر جدول الكميات المذكورة بين مستقيمين رأسيين وعدد حدود المحدد يساوى عدد تراتيب مقادير الادلة العليا التى عددها ن وحيث انه يمكن وضع هذه الادلة فى أوضاع حيثما اتفق بتبديل دليلين عدة مرات متوالية وعلم انه متى أبدل دليلان ببعضهما يتغير القسم الذى منه هذا الترتيب فيمكن تكوين جميع حدود المحدد بواسطة الحد الاول الذى تقدمت كتابته بأن يبدل دليلان من الادلة العليا عدة مرات متوالية وتغير الاشارة فى كل تبديل

مثلا

$$\begin{vmatrix} \text{ح}^{1}_{1} & \text{ح}^{2}_{1} \\ \text{ح}^{1}_{2} & \text{ح}^{2}_{2} \end{vmatrix} = \text{ح}^{1}_{1}\text{ح}^{2}_{2} - \text{ح}^{2}_{1}\text{ح}^{1}_{2}$$

وكذا

$$\begin{vmatrix} \text{ح}^{1}_{1} & \text{ح}^{2}_{1} & \text{ح}^{3}_{1} \\ \text{ح}^{1}_{2} & \text{ح}^{2}_{2} & \text{ح}^{3}_{2} \\ \text{ح}^{1}_{3} & \text{ح}^{2}_{3} & \text{ح}^{3}_{3} \end{vmatrix} = \text{ح}^{1}_{1}\text{ح}^{2}_{2}\text{ح}^{3}_{3} - \text{ح}^{1}_{1}\text{ح}^{3}_{2}\text{ح}^{2}_{3} + \text{ح}^{3}_{1}\text{ح}^{1}_{2}\text{ح}^{2}_{3} - \text{ح}^{2}_{1}\text{ح}^{1}_{2}\text{ح}^{3}_{3} + \text{ح}^{2}_{1}\text{ح}^{3}_{2}\text{ح}^{1}_{3} - \text{ح}^{3}_{1}\text{ح}^{2}_{2}\text{ح}^{1}_{3}$$

بند ٣٢ (طريقة أخرى لتكوين المحدد) بموجب قانون تكوين المحدد يشتمل كل حد على جزء من كل من الخطوط الافقية وجزء من كل من العمد الرأسية وحينئذ تكون حدود المحدد هى حواصل الضرب المختلفة التى يتحصل عليها بأخذ جزء من كل خط ومن كل عمود بجميع الكيفيات الممكنة وقد عرفنا اشارة كل حد بفرض ان العوامل

مرتبة

مرتبة بحيث ان الادلة السفلى تكون مرتبة كترتيب الاعداد التصاعدية وهى ١ و٢ و٣ و ...... و ه وحيث لم يحدث ترتيبها على قلبات فيجب اعتبارها من القسم الاول ولا صعوبة فى معرفة انه اذا غير ترتيب العوامل تكون اشارة كل حد + أو − بحسب مايكون ترتيب الادلة السفلى وترتيب الادلة العليا من قسم واحد أو من قسمين مختلفين لانه حيث ان تبديل كل عاملين يغير قسمى الترتيبين فى آن واحد فيكون الترتيبان من قسم واحد اذا كانا من الاصل من قسم واحد ويكونان من قسمين مختلفين اذا كانا من قسمين مختلفين

فاذا فرضنا اننا رتبنا العوامل بحيث تكون الادلة العليا مرتبة على حسب ترتيب الاعداد التصاعدية فحيث انه لا يكون بترتيبها قلبات يكون من القسم الاول وبموجب ما تقدم يصير كل حد مصحوبا باشارة + او باشارة − على حسب ما يكون ترتيب الادلة السفلى من القسم الاول أو من القسم الثانى ويتنتج من ذلك انه يمكن تكوين المحدد بواسطة الحد الاول بتبديل الادلة السفلى لا العليا واعطاء كل حاصل ضرب من الحواصل المتحصلة بهذه الكيفية اشارة + او اشارة − على حسب ما يكون ترتيب الادلة السفلى من القسم الاول أو من القسم الثانى

(المبحث الثانى)

فى خواص المحددات

بند ٣٣ (نظرية أولى) اذا عوض كل صف أفقى بالصف الرأسى المتحد معه فى الرتبة فان المحدد لا يتغير

مثلا أقول ان

$$\begin{vmatrix} \text{ح}^{1}_{\text{ه}} & \cdots & \text{ح}^{1}_{3} & \text{ح}^{1}_{2} & \text{ح}^{1}_{1} \\ \text{ح}^{2}_{\text{ه}} & \cdots & \text{ح}^{2}_{3} & \text{ح}^{2}_{2} & \text{ح}^{2}_{1} \\ \text{ح}^{3}_{\text{ه}} & \cdots & \text{ح}^{3}_{3} & \text{ح}^{3}_{2} & \text{ح}^{3}_{1} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \text{ح}^{\text{ه}}_{\text{ه}} & \cdots & \text{ح}^{\text{ه}}_{3} & \text{ح}^{\text{ه}}_{2} & \text{ح}^{\text{ه}}_{1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ح}^{\text{ه}}_{1} & \cdots & \text{ح}^{3}_{1} & \text{ح}^{2}_{1} & \text{ح}^{1}_{1} \\ \text{ح}^{\text{ه}}_{2} & \cdots & \text{ح}^{3}_{2} & \text{ح}^{2}_{2} & \text{ح}^{1}_{2} \\ \text{ح}^{\text{ه}}_{3} & \cdots & \text{ح}^{3}_{3} & \text{ح}^{2}_{3} & \text{ح}^{1}_{3} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \text{ح}^{\text{ه}}_{\text{ه}} & \cdots & \text{ح}^{3}_{\text{ه}} & \text{ح}^{2}_{\text{ه}} & \text{ح}^{1}_{\text{ه}} \end{vmatrix}$$

لاننا قد ذكرنا ان حدود أى محدّد هى حواصل الضرب التى يمكن تكوينها بأخذ جزء من كل صف ومن كل عمود ومن الواضح ان هذه الحواصل متحدة فى المحددين المتقدمين وقد ذكرنا انه يلزم قرن كل حاصل باشارة + أو باشارة − على حسب ما تكون ترانيب سلسلتى الادلة الدالة احداهما على رتب الصفوف والاخرى على رتب العمد من قسم واحد أو من قسمين مختلفين ومن الواضح أن الترتيب المنسوب فى أحد المحددين للصفوف منسوب فى الآخر للعمد وبالعكس وحيث كان هذان الترتيبان متساويين فتكون اشارتهما متحدة وبناء على ذلك يكون المحددان متساويين

بـ ٣٤ ـ د (نظرية ثانية) اذا بدل صفان متوازيان ببعضهما من محدد فان اشارة المحدد الحادث تكون مغايرة لاشارة المحدد المفروض

لاننا اذا بدلنا الصفين الراسيين اللذين رتبتاهما ل و ط يكون كل حد من المحدد الاول بالصورة $\pm ح\, ح^{ل}_{ا}\, ح^{ط}_{ك}\, د\, ح_{هـ}$ ويطابق لهذا الحد حدّ آخر بالصورة $\mp ح\, ح^{ط}_{ا}\, ح^{ل}_{ك}\, د\, ح_{هـ}$ ويصير هذان الحدان هما $\pm ح\, ح^{ط}_{ا}\, ح^{ل}_{ك}\, د\, ح_{هـ}$ و $\mp ح\, ح^{ل}_{ا}\, ح^{ط}_{ك}\, د$ فى المحدد الثانى وحينئذ يكون المحددان متساويين ومختلفين فى الاشارة

بـ ٣٥ ـ د (نظرية ثالثة) اذا تساوى صفان متوازيان فان المحدد يكون معدوما

فلنفرض ان أجزاء الصفين الراسيين اللذين رتبتاهما ل و ط تكون متساوية على التناظر فقد شاهدنا ان كل حد مثل $\pm ن\, ح^{ل}_{ع}\, ر\, ح^{ط}_{ك}\, ع$ من المحدد يطابقه حد آخر مثل $\mp ن\, ح^{ط}_{ع}\, ر\, ح^{ل}_{ك}\, ع$ وحيث كان الجزآن $ح^{ل}_{ع}$ و $ح^{ط}_{ك}$ متساويين وكذلك $ح^{ل}_{ك}$ و $ح^{ط}_{ك}$ فيكون هذان الحدان متساويين ومختلفين فى الاشارة ويكون المحدد معدوما

بـ ٣٦ ـ د (ترتيب المحدد على حسب أجزاء صف واحد) المحدد دالة متجانسة بدرجة أولى لاجزاء صف واحد فمثلا كل حد من حدود المحدد يحتوى على جزء واحد من الصف الاوّل الافقى فاذا جمعت الحدود التى تحتوى على الجزء $ح_{١}$ على بعضها والحدود التى تحتوى على الجزء $ح^{٢}_{١}$ على بعضها وهكذا ايمكن وضع المحدد بالصورة

$$ع = ن^{١}_{١}\, ح^{١}_{١} + ن^{٢}_{١}\, ح^{٢}_{١} + ن^{٣}_{١}\, ح^{٣}_{١} + \cdots\cdots\, ن^{هـ}_{١}\, ح^{هـ}_{١}$$

والكميات

والكميات ب^{1}_{1} و ب^{2}_{1} و $\cdots$ و $\text{ب}^{\text{ه}}_{1}$ لاتحتوى على أدنى جزء من هذا الصف الاول ونرمز بكيفية عمومية بالرمز $\text{ب}^{\text{ط}}_{\text{ل}}$ لمجموع حدود المحدد التى تحتوى على الجزء $\text{ح}^{\text{ط}}_{\text{ل}}$ وننبه على ان الكمية $\text{ب}^{\text{ط}}_{\text{ل}}$ لاتحتوى على أدنى جزء من أجزاء الصف اللامى أو من أجزاء العمود الطائى فبالترتيب بالنسبة لاجزاء الصف اللامى نجد أن

$$\text{م} = \text{ب}^{1}_{\text{ل}}\text{ح}^{1}_{\text{ل}} + \text{ب}^{2}_{\text{ل}}\text{ح}^{2}_{\text{ل}} + \cdots + \text{ب}^{\text{ه}}_{\text{ل}}\text{ح}^{\text{ه}}_{\text{ل}}$$

وبالنسبة لاجزاء العمود الطائى نجد أن

$$\text{م} = \text{ب}^{\text{ط}}_{1}\text{ح}^{\text{ط}}_{1} + \text{ب}^{\text{ط}}_{2}\text{ح}^{\text{ط}}_{2} + \cdots + \text{ب}^{\text{ط}}_{\text{ه}}\text{ح}^{\text{ط}}_{\text{ه}}$$

ولاجل تكوين الكميات التى مثل $\text{ب}^{\text{ط}}_{\text{ل}}$ نرمز بالرمز $\text{م}^{\text{ط}}_{\text{ل}}$ للمحدد الجزئى الذى يتحصل عليه بحذف الصف اللامى والعمود الطائى من الجدول فمن الواضح ان الكمية ب^{1}_{1} تساوى المحدد الجزئى وهو

$$\text{م}^{1}_{1} = \begin{vmatrix} \text{ح}^{2}_{2} & \text{ح}^{3}_{2} & \cdots & \text{ح}^{\text{ه}}_{2} \\ \text{ح}^{2}_{3} & \text{ح}^{3}_{3} & \cdots & \text{ح}^{\text{ه}}_{3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \text{ح}^{2}_{\text{ه}} & \text{ح}^{3}_{\text{ه}} & \cdots & \text{ح}^{\text{ه}}_{\text{ه}} \end{vmatrix}$$

لانه يكفى لاجل الحصول على سلسلة الحدود المحتوية على الجزء ح^{1}_{1} أخذ الحد الاول وهو $\text{ح}^{1}_{1}\text{ح}^{2}_{2}\cdots\text{ح}^{\text{ه}}_{\text{ه}}$ ووضع الجزء ح^{1}_{1} بجانب وتبديل الادلة العليا من الجزء $\text{ح}^{2}_{2}\text{ح}^{3}_{3}\cdots\text{ح}^{\text{ه}}_{\text{ه}}$ مثنى مثنى وهذا يرجع الى تكوين المحدد الجزئى وهو م^{1}_{1}

ولنتصور الآن اننا بدلنا العمودين الاولين ببعضهما بحيث نجعل الجزء ح^{2}_{1} فى رأس الجدول فى الوضع الذى كان يشغله ح^{1}_{1} من الاصل فتصير سلسلة الحدود التى تحتوى على الجزء ح^{2}_{1}

فى المحدد الجديد هى $\text{مح}^{٢}_{١}$ $\text{ح}^{٢}_{١}$ وحيث ان اشارة المحدد الكلى تتغير فيكون $\text{ق}^{٢}_{١} = - \text{مح}^{٢}_{١}$

وينقل العمود الثالث الى العمود الاول بابداله فى أول الامر بالعمود الثانى ثم بالاول

فحيث ان الاشارة تتغير مرتين فتبقى على ما كانت عليه ويكون $\text{ق}^{٣}_{١} = \text{مح}^{٣}_{١}$

وبمثل ذلك يوجد $\text{ق}^{٤}_{١} = - \text{مح}^{٤}_{١}$ وهلم جرا

وعلى العموم لنفرض ان المطلوب ايجاد سلسلة الحدود التى تحتوى على الجزء $\text{ح}^{ط}_{ل}$ فينقل الصف اللامى الى الصف الاول بواسطة تبديلات عددها ل - ١ لصفين متواليين ثم ينقل العمود الطائى الى العمود الاول بتبديلات عددها ط - ١ لعمودين متواليين وبذلك تتغير الاشارة مرارا عددها ل + ط - ٢ ويصير الجزء $\text{ح}^{ط}_{ل}$ موضوعا فى رأس الجدول ويكون $\text{ق}^{ط}_{ل} = (-١)^{ل+ط-٢} \text{مح}^{ط}_{ل}$

مثلا

$$\begin{vmatrix} \text{ح}_{١} & \text{ء}_{١} & \text{ه}_{١} \\ \text{ح}_{٢} & \text{ء}_{٢} & \text{ه}_{٢} \\ \text{ح}_{٣} & \text{ء}_{٣} & \text{ه}_{٣} \end{vmatrix} = \text{ح}_{١} \begin{vmatrix} \text{ء}_{٢} & \text{ه}_{٢} \\ \text{ء}_{٣} & \text{ه}_{٣} \end{vmatrix} - \text{ح}_{٢} \begin{vmatrix} \text{ء}_{١} & \text{ه}_{١} \\ \text{ء}_{٣} & \text{ه}_{٣} \end{vmatrix} + \text{ح}_{٣} \begin{vmatrix} \text{ء}_{١} & \text{ه}_{١} \\ \text{ء}_{٢} & \text{ه}_{٢} \end{vmatrix}$$

$$= \text{ح}_{١}(\text{ء}_{٢}\text{ه}_{٣} - \text{ه}_{٢}\text{ء}_{٣}) - \text{ح}_{٢}(\text{ء}_{١}\text{ه}_{٣} - \text{ه}_{١}\text{ء}_{٣}) + \text{ح}_{٣}(\text{ء}_{١}\text{ه}_{٢} - \text{ه}_{١}\text{ء}_{٢})$$

(نتيجة) لاجل ضرب محدد فى عدد يضرب هذا العدد فى جميع أجزاء صف واحد من صفوفه

لاننا اذا فرضنا ان المحدد مرتب على حسب أجزاء الصف الاول الافقى وموضوع بالصورة

$$\text{مح} = \text{ق}^{١}_{١}\text{ح}^{١}_{١} + \text{ق}^{٢}_{١}\text{ح}^{٢}_{١} + \cdots + \text{ق}^{ن}_{١}\text{ح}^{ن}_{١}$$

وضربنا الطرفين فى عدد ع يكون

$$\text{ع مح} = \text{ق}^{١}_{١}\,\text{ع}\,\text{ح}^{١}_{١} + \text{ق}^{٢}_{١}\,\text{ع}\,\text{ح}^{٢}_{١} + \cdots + \text{ق}^{ن}_{١}\,\text{ع}\,\text{ح}^{ن}_{١}$$

وهذا محدد جديد يستنتج من المحدد الاول بتعويض أجزاء الصف الاول بالحواصل

$$\text{ع ح}^{١}_{١} ،\ \text{ع ح}^{٢}_{١} ،\ \text{ع ح}^{٣}_{١} ،\ \cdots ،\ \text{ع ح}^{ن}_{١}$$

مثلا

مثلا

$$\begin{vmatrix} \text{ه}_1 & \text{د}_1 & \text{ح}\,\text{ج}_1 \\ \text{ه}_2 & \text{د}_2 & \text{ح}\,\text{ج}_2 \\ \text{ه}_3 & \text{د}_3 & \text{ح}\,\text{ج}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ح}\,\text{ه}_1 & \text{ح}\,\text{د}_1 & \text{ح}\,\text{ج}_1 \\ \text{ه}_2 & \text{د}_2 & \text{ج}_2 \\ \text{ه}_3 & \text{د}_3 & \text{ج}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ه}_1 & \text{د}_1 & \text{ج}_1 \\ \text{ه}_2 & \text{د}_2 & \text{ج}_2 \\ \text{ه}_3 & \text{د}_3 & \text{ج}_3 \end{vmatrix}\text{ح}$$

نمـ ٣٧ د (نظرية رابعة) مجموع أي محددين متحدين في الدرجة لا يختلفان عن بعضهما الا باجزاء صف واحد يكون محددا جديدا يتحصل عليه باضافة هذه الاجزاء مثنى مثنى لانه اذا رتب المحدد

$$\begin{vmatrix} \text{ج}^{\text{ه}}_1 , & \cdots\cdots , & \text{ج}^3_1 , & \text{ج}^2_1 , & \text{د}_1 + \text{ج}_1 \\ \text{ج}^{\text{ه}}_2 , & \cdots\cdots , & \text{ج}^3_2 , & \text{ج}^2_2 , & \text{د}_2 + \text{ج}_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \text{ج}^{\text{ه}}_{\text{ه}} , & \cdots\cdots , & \text{ج}^3_{\text{ه}} , & \text{ج}^2_{\text{ه}} , & \text{د}_{\text{ه}} + \text{ج}_{\text{ه}} \end{vmatrix}$$

على حسب أجزاء العمود الاول يكون

$$\left(\text{د}_{\text{ه}} + \text{ج}_{\text{ه}}\right)\text{ن}^1_{\text{ه}} + \cdots\cdots + \left(\text{د}_2 + \text{ج}_2\right)\text{ن}^1_2 + \left(\text{د}_1 + \text{ج}_1\right)\text{ن}^1_1 = \text{ح}$$

أو

$$\text{ج}_{\text{ه}}\,\text{ن}^1_{\text{ه}} + \cdots\cdots + \text{ج}_2\,\text{ن}^1_2 + \text{ج}_1\,\text{ن}^1_1 = \text{ح}$$

$$\text{د}_{\text{ه}}\,\text{ن}^1_{\text{ه}} + \cdots\cdots + \text{د}_2\,\text{ن}^1_2 + \text{د}_1\,\text{ن}^1_1 +$$

وهو مساو لمجموع المحددين الآتيين وهو

$$\begin{vmatrix} \text{ج}^{\text{ه}}_1 & \cdots\cdots & \text{ج}^2_1 & \text{د}_1 \\ \text{ج}^{\text{ه}}_2 & \cdots\cdots & \text{ج}^2_2 & \text{د}_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \text{ج}^{\text{ه}}_{\text{ه}} & & \text{ج}^2_{\text{ه}} & \text{د}_{\text{ه}} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{ج}^{\text{ه}}_1 & \cdots\cdots & \text{ج}^2_1 & \text{ج}_1 \\ \text{ج}^{\text{ه}}_2 & \cdots\cdots & \text{ج}^2_2 & \text{ج}_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \text{ج}^{\text{ه}}_{\text{ه}} & \cdots\cdots & \text{ج}^2_{\text{ه}} & \text{ج}_{\text{ه}} \end{vmatrix}$$

نمـ ٣٨ د (نظرية خامسة) لا يتغير مقدار أي محدد اذا عوض أي صف بالنواتج التي يتحصل عليها باضافة الاجزاء المطابقة لاجزاء هذا الصف من صف آخر موازله مضروبة

فى عدد واحد

مثلا اذا اضيفت اجزاء العمود الثانى مضروبة فى ح لاجزاء العمود الاول يكون

$$\begin{vmatrix} \text{ح}^{١}_{١}+\text{ح}\,\text{ح}^{٢}_{١} ، \text{ح}^{٢}_{١} \cdots\cdots \text{ح}^{ه}_{١} \\ \text{ح}^{١}_{٢}+\text{ح}\,\text{ح}^{٢}_{٢} ، \text{ح}^{٢}_{٢} \cdots\cdots \text{ح}^{ه}_{٢} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \text{ح}^{١}_{ه}+\text{ح}\,\text{ح}^{٢}_{ه} ، \text{ح}^{٢}_{ه} \cdots\cdots \text{ح}^{ه}_{ه} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ح}^{١}_{١} ، \text{ح}^{٢}_{١} \cdots\cdots \text{ح}^{ه}_{١} \\ \text{ح}^{١}_{٢} ، \text{ح}^{٢}_{٢} \cdots\cdots \text{ح}^{ه}_{٢} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \text{ح}^{١}_{ه} ، \text{ح}^{٢}_{ه} \cdots\cdots \text{ح}^{ه}_{ه} \end{vmatrix} + \text{ح} \begin{vmatrix} \text{ح}^{٢}_{١} ، \text{ح}^{٢}_{١} \cdots\cdots \text{ح}^{ه}_{١} \\ \text{ح}^{٢}_{٢} ، \text{ح}^{٢}_{٢} \cdots\cdots \text{ح}^{ه}_{٢} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \text{ح}^{٢}_{ه} ، \text{ح}^{٢}_{ه} \cdots\cdots \text{ح}^{ه}_{ه} \end{vmatrix}$$

وحيث كان المحدد الاخير معدوما (بند ٣٥) فيكون المحددان الاولان متساويين ويمكن تعميم النظرية المتقدمة والنطق بها هكذا لا يتغير مقدار أى محدد متى عوضت أجزاء أى صف أفقى أو رأسى بالنواتج التى يتحصل عليها باضافة اجزاء عدة صفوف أخر بعد ضرب كل من هذه الاجزاء فى عدد اختيارى لاجزاء الصف المذكور

(المبحث الثالث)

(فى تطبيق المحددات على حل المعادلات ذات الدرجة الاولى)

بند ٣٩ لنبدأ بتذكار قاعدة اساسية اصلية أثبتناها فى الجزء الاول من الكمالات التوفيقية فى الاصول الجبرية (المبحث الاول من الفصل الثالث) وهى اذا علمت مجموعة مركبة من معادلات عددها ه مثل

$$\text{س}_{١}=٠ ، \text{س}_{٢}=٠ ، \text{س}_{٣}=٠ ، \cdots\cdots ، \text{س}_{ه}=٠ \qquad (١)$$

تحتوى على مجاهيل عددها ه فان المعادلة

$$\text{ح}_{١}\text{س}_{١}+\text{ح}_{٢}\text{س}_{٢}+\text{ح}_{٣}\text{س}_{٣}+\cdots\cdots+\text{ح}_{ه}\text{س}_{ه}$$

التى يتحصل عليها باضافة هذه المعادلات الى بعضها طرفا لطرف بعد ضربها فى كميات ثابتة مثل $\text{ح}_{١}$ ، $\text{ح}_{٢}$ ، $\text{ح}_{٣}$ ، ..... ، $\text{ح}_{ه}$ يمكن ان تعوض احدى المعادلات المفروضة أعنى انه اذا أخذت المعادلة الجديدة مع المعادلات الاخرى التى عددها ه ـ ١ تتكون مجموعة مكافئة للمجموعة المفروضة بشرط ان تكون الكميات الثابتة $\text{ح}_{١}$ ، $\text{ح}_{٢}$ ، ..... ، $\text{ح}_{ه}$ مخالفة للصفر

اذا تقرر هذا فلنعتبر مجموعة مثل

$$(٢)\left\{\begin{array}{l} ح^{١}_{١}س_{١}+ح^{٢}_{١}س_{٢}+\cdots\cdots+ح^{ه}_{١}س_{ه}=ك_{١}\ \text{و} \\ ح^{١}_{٢}س_{١}+ح^{٢}_{٢}س_{٢}+\cdots\cdots+ح^{ه}_{٢}س_{ه}=ك_{٢}\ \text{و} \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\ \text{و} \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\ \text{و} \\ ح^{١}_{ه}س_{١}+ح^{٢}_{ه}س_{٢}+\cdots\cdots+ح^{ه}_{ه}س_{ه}=ك_{ه} \end{array}\right.$$

مركبة من معادلات عددها ه ذات درجة اولى وبمجاهيل $س_{١}$ و $س_{٢}$ و .... و $س_{ه}$ عددها ه ولنرمز بالرمز ع لمحدد المعاملات التي عددها $ه^{٢}$ وهي معاملات المجاهيل أعني لنفرض أن

$$ع=\left|\begin{array}{cccc} ح^{١}_{١} & ح^{٢}_{١} & \cdots\cdots & ح^{ه}_{١} \\ ح^{١}_{٢} & ح^{٢}_{٢} & \cdots\cdots & ح^{ه}_{٢} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ ح^{١}_{ه} & ح^{٢}_{ه} & \cdots\cdots & ح^{ه}_{ه} \end{array}\right|$$

ولنفرض ان هذا المحدد مخالف للصفر بحيث انه يساوي دالة متجانسة بدرجة أولى لاجزاء صف واحد أفقي أو لاجزاء صف واحد رأسي فيكون محدد واحد بالاقل من المحددات الجزئية المطابقة بالاقل مخالفا للصفر ولنتصور ان المحدد المفروض مرتب بالنسبة للعمود الاول وليكن

$$ع=ق^{١}_{١}ح^{١}_{١}+ق^{١}_{٢}ح^{١}_{٢}+\cdots\cdots+ق^{١}_{ه}ح^{١}_{ه}$$

ولنجمع المعادلات المفروضة على بعضها طرفا على طرف بعد ضربها على التناظر في $ق^{١}_{١}$ و $ق^{١}_{٢}$ و .... و $ق^{١}_{ه}$ فيكون معامل $س_{١}$ في المعادلة الجديدة مساويا للمحدد ع ويكون معامل $س_{٢}$ هو

$$ق^{١}_{١}ح^{٢}_{١}+ق^{١}_{٢}ح^{٢}_{٢}+\cdots\cdots+ق^{١}_{ه}ح^{٢}_{ه}$$

وهـذا هو الحد مأخوذا فيه العمود الاول مساو للثانى وحينئذ يكون معدوما وهكذا تكون المعاملات التالية وبناء على ذلك تؤل المعادلة الناتجة الى

$$\text{ع}\,\text{س}_1 = \text{ن}^1_1\,\text{ك}_1 + \text{ن}^1_2\,\text{ك}_2 + \cdots + \text{ن}^1_{\text{ه}}\,\text{ك}_{\text{ه}} \qquad (٣)$$

فاذا قبلت المعادلات المفروضة حلا فحيث انه يجب ان يكون مقدار س_1 موفيا للمعادلة (٣) فيكون هذا المقدار هو

$$\text{س}_1 = \frac{\text{ن}^1_1\,\text{ك}_1 + \text{ن}^1_2\,\text{ك}_2 + \cdots + \text{ن}^1_{\text{ه}}\,\text{ك}_{\text{ه}}}{\text{ع}} \qquad (٤)$$

وبمثل ذلك يشاهد ان مقدار س_2 يكون هو

$$\text{س}_2 = \frac{\text{ن}^2_1\,\text{ك}_1 + \text{ن}^2_2\,\text{ك}_2 + \cdots + \text{ن}^2_{\text{ه}}\,\text{ك}_{\text{ه}}}{\text{ع}} \qquad (٥)$$

وهلم جرا فجميع هذه الكسور متحدة المقام وهو ع وبسط كل مجهول هو المحدد الذى يتحصل عليه متى عوضت معاملات هذا المجهول بالاطراف الثانية للمعادلات المفروضة

بعد ذلك ولنثبت الآن أن مقادير المجاهيل التى تعلم بواسطة القوانين (٤) و (٥) و .... الخ تحقق المعادلات المفروضة ولذلك نضع هذه المقادير فى المعادلات (٢) فيؤل الطرف الاول من المعادلة الاولى الى

$$\frac{1}{\text{ع}}\left\{\begin{array}{l} \text{ك}_1\left(\text{ح}^1_1\,\text{ن}^1_1 + \text{ح}^2_1\,\text{ن}^2_1 + \cdots + \text{ح}^{\text{ه}}_1\,\text{ن}^{\text{ه}}_1\right) \\ +\,\text{ك}_2\left(\text{ح}^1_1\,\text{ن}^1_2 + \text{ح}^2_1\,\text{ن}^2_2 + \cdots + \text{ح}^{\text{ه}}_1\,\text{ن}^{\text{ه}}_2\right) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ +\,\text{ك}_{\text{ه}}\left(\text{ح}^1_1\,\text{ن}^1_{\text{ه}} + \text{ح}^2_1\,\text{ن}^2_{\text{ه}} + \cdots + \text{ح}^{\text{ه}}_1\,\text{ن}^{\text{ه}}_{\text{ه}}\right) \end{array}\right\}$$

ويكون معامل ك_1 فى كثيرة الحدود الموضوعة بين الحافظتين هو المحدد ع مرتبا

بالنسبة

بالنسبة لاجزاء الصف الاول الافقى ويكون معامل ى٢ هو المحدد المذكور مرتبا بالنسبة لاجزاء الصف الثانى الافقى معوضا فيه الصف الثانى بالصف الاول وحينئذ يكون هذا المعامل معدوما وهكذا تكون المعاملات التالية وبناء على ذلك يؤول الطرف الاول الى ى١ وتصير المعادلة محققة وبمثل ذلك يشاهد أن المعادلات الاخرى محققة وينتج من ذلك انه متى كان المحدد مخالفا للصفر يكون للمعادلات المفروضة حل واحد لا غير

بند ٤١ ولنختبر الآن الحالة التى يكون فيها المحدد مح معدوما بدون ان تكون المحددات الجزئية التى عددها ن معدومة فى آن واحد فنقول

اذا كان المحدد الجزئى مح١ مخالفا للصفر يتحصل على مجموعة معادلات عددها ن مكافئة للمجموعة المفروضة بتعويض المعادلة الاولى من المعادلات (٢) التى ضربت فى الكمية ى١ المخالفة للصفر بالمعادلة (٣) فمتى كان الطرف الثانى من المعادلة (٣) مخالفا للصفر فحيث ان هذه المعادلة لا تقبل ادنى حل تكون المجموعة الثانية مستحيلة الحل وبناء عليه تكون المجموعة الاولى مستحيلة الحل كذلك ومتى كان هذا الطرف الثانى معدوما فحيث ان المعادلة (٣) تصير متطابقة تؤول المجموعة المفروضة الى مجموعة معادلات عددها ن - ١ ذات مجاهيل عددها ن ويمكن اعطاء س١ مقدارا اختياريا وحيث ان المحدد مح١ غير معدوم فيطابق كل مقدار يعطى الى س١ مجموعة مقادير معينة الى س٢ و س٣ و .... و سن

واذا كانت جميع المحددات الجزئية التى برتبة اولى معدومة تعتبر المحددات التى برتبة ثانية والتى تنتج من حذف صفين وعمودين ونرمز لها بالرمز مح ط و ط َ / ل و لَ (ل و لَ هما رتبتا الصفين و ط و طَ هما رتبتا العمودين) ولنفرض ان المحدد الذى برتبة ثانية وهو مح ١ و ٢ / ١ و ٢ مخالف للصفر فبترتيب المحددين اللذين برتبة اولى وهما مح١ و مح٢ بالنسبة لاجزاء العمود الاول

يوجد ان

$$\text{م}^{1}_{1}=\text{م}^{\text{١و٢}}_{\text{٢و١}}\,\text{ح}^{2}_{2}-\text{م}^{\text{١و٢}}_{\text{٣و١}}\,\text{ح}^{2}_{3}+\text{م}^{\text{١و٢}}_{\text{٤و١}}\,\text{ح}^{2}_{4}-\cdots+(-1)^{\text{ه}}\,\text{م}^{\text{١و٢}}_{\text{ه و١}}\,\text{ح}^{2}_{\text{ه}}\ \text{و}$$

$$\text{م}^{2}_{1}=\text{م}^{\text{١و٢}}_{\text{٢و١}}\,\text{ح}^{1}_{2}-\text{م}^{\text{١و٢}}_{\text{٣و١}}\,\text{ح}^{1}_{3}+\text{م}^{\text{١و٢}}_{\text{٤و١}}\,\text{ح}^{1}_{4}-\cdots+(-1)^{\text{ه}}\,\text{م}^{\text{١و٢}}_{\text{ه و١}}\,\text{ح}^{1}_{\text{ه}}$$

والمحددات الجزئية التي برتبة ثانية واحدة في هاتين المعادلتين فاذا عوض العمود الاول باحد العمد التالية له تحصل نواتج معدومة هكذا

$$0=\text{م}^{\text{١و٢و٣}}_{\text{٢و١}}\,\text{ح}^{3}_{2}-\text{م}^{\text{١و٢و٣}}_{\text{٣و١}}\,\text{ح}^{3}_{3}+\text{م}^{\text{١و٢و٣}}_{\text{٤و١}}\,\text{ح}^{3}_{4}-\cdots\ \text{و}$$

$$0=\text{م}^{\text{١و٢و٤}}_{\text{٢و١}}\,\text{ح}^{4}_{2}-\text{م}^{\text{١و٢و٤}}_{\text{٣و١}}\,\text{ح}^{4}_{3}+\text{م}^{\text{١و٢و٤}}_{\text{٤و١}}\,\text{ح}^{4}_{4}-\cdots\ \text{و}$$

. . . . و

$$0=\text{م}^{\text{١و٢و ه}}_{\text{٢و١}}\,\text{ح}^{\text{ه}}_{2}-\text{م}^{\text{١و٢و ه}}_{\text{٣و١}}\,\text{ح}^{\text{ه}}_{3}+\text{م}^{\text{١و٢و ه}}_{\text{٤و١}}\,\text{ح}^{\text{ه}}_{4}-\cdots\ \text{و}$$

فاذا جمعت الآن المعادلة الثانية من المعادلات المفروضة على المعادلات الاخيرة التي عددها ه − ٢ طرفا على طرف بعد ضربها على التناظر في

$$\text{م}^{\text{١و٢}}_{\text{٢و١}}\ \text{و}\ -\text{م}^{\text{١و٢}}_{\text{٣و١}}\ \text{و}\ +\text{م}^{\text{١و٢}}_{\text{٤و١}}\ \text{و}\ \cdots\ \text{و}\ (-1)^{\text{ه}}\,\text{م}^{\text{١و٢}}_{\text{ه و١}}$$

تحصل المعادلة

$$\text{م}^{2}_{1}\,\text{س}_{1}+\text{م}^{1}_{1}\,\text{س}_{2}=\text{م}^{\text{١و٢}}_{\text{٢و١}}\,\text{ل}_{2}-\text{م}^{\text{١و٢}}_{\text{٣و١}}\,\text{ل}_{3}+\text{م}^{\text{١و٢}}_{\text{٤و١}}\,\text{ل}_{4}-\cdots\qquad(٦)$$

التي يمكن ان تعوض بها المعادلة الثانية التي ضرب طرفاها في كمية مخالفة للصفر وكذلك اذا وفقت المعادلة الاولى مع المعادلات الاخيرة التي عددها ه − ٢ تحصل المعادلة

$$\text{م}^{2}_{2}\,\text{س}_{1}+\text{م}^{1}_{2}\,\text{س}_{2}=\text{م}^{\text{١و٢}}_{\text{١و٢}}\,\text{ل}_{1}-\text{م}^{\text{١و٢}}_{\text{٣و٢}}\,\text{ل}_{3}+\text{م}^{\text{١و٢}}_{\text{٤و٢}}\,\text{ل}_{4}-\cdots\qquad(٧)$$

التي يمكن ان تعوض بها المعادلة الاولى وحيث كان الطرفان الاولان من هاتين المعادلتين

المعادلتين (٦) و (٧) معدومين فيكون الحل مستحيلا اذا كان احد الطرفين الثانيين مخالفا للصفر واما اذا كان الطرفان الثانيان مساويين للصفر فحيث ان هاتين المعادلتين تكونان متطابقتين فتؤل المجموعة المفروضة الى المعادلات الاخيرة التى عددها ه‍-٢ ويمكن اعطاء $س_١$ و $س_٢$ مقدارين اختياريين وحيث كان المحدد $مح^{٣،٤،٥}_{٣،٤،٥}$ مخالفا للصفر فتستنتج من ذلك مقادير الى $س_٣$ و $س_٤$ و .... و $س_ه$ مطابقة لهما وبادامة العمل بهذه الكيفية يتوصل الى محدد جزئى مخالف للصفر ولتكن ح رتبة هذا المحدد فيمكن ان يفرض ان الحدود فى كل معادلة بل والمعادلات نفسها تكون موضوعة بترتيب بحيث ينتج هذا المحدد من حذف الصفوف الاول التى عددها ح والعمد الاول التى عددها ح ولاجل الاختصار نرمز بحرف ف لتتابع الادلة الاول التى عددها ح وهى ١ و٢ و٣ و.... وح وبالرمز $ف_ل$ أو $ف_ط$ لهذا التتابع مطروحا منه الدليل ل أو ط فبترتيب المحدد الجزئى الذى رتبته ح-١ بالنسبة لاجزاء العمود الاول يوجد أن

$$مح^{ف}_{ف_ط} = مح^{ف_ط}_{ف_ل} \, ح_{ل،ط} - مح^{ف}_{ف_ل،ح+١} \, ح_{ح+١،ط} + مح^{ف}_{ف_ل،ح+٢} \, ح_{ح+٢،ط} - \ldots$$

وبتعويض العمود الاول باحد العمد التالية له توجد نواتج معدومة فاذا اضيفت احدى المعادلات الاول التى عددها ح والمعادلة التى رتبتها ل على المعادلات الاخيرة التى عددها ح-٢ بعد ضربها على التناظر فى المحددات الجزئية التى رتبتها ح الداخلة فى الارتباط السابق تحصل المعادلة

$$مح^{ف}_{ف_ل} س_١ + مح^{ف}_{ف_ل} س_٢ + \ldots + مح^{ف}_{ف_ل} س_ه = مح^{ف}_{ف} \, ل_ح - مح^{ف}_{ف_ل،ح+١} \, ل_{ح+١} + \ldots \quad (٨)$$

التى تعوض المعادلة التى رتبتها ل وحينئذ تصير المعادلات الاول التى عددها ح معوضة بمعادلات عددها ح بالصورة (٨) وحيث كانت الاطراف الاول معدومة فحينئذ اذا كان احد الاطراف الثانية مخالفا للصفر يكون الحل مستحيلا واذا كانت الاطراف الثانية التى عددها ح معدومة فحيث ان المعادلات التى عددها ح المشابهة

المعادلة (٩) تؤول الى متطابقات تؤول المجموعة المفروضة الى المعادلات الاخيرة التى عددها ن ـ ح ويمكن اعطاء المجاهيل الاول وهى س١ و س٢ و .... و سح مقادير اختيارية وحيث كان المحدد مح الذى رتبته ح مخالف للصفر فتستنتج من ذلك مقادير للمجاهيل الاخر التى عددها ن ـ ح وهى سح+١ و سح+٢ و .... و سن مطابقة للقادير التى اعطيت للمجاهيل الاول

ويستنتج مما سبق انه اذا كان المحدد الاصلى وهو مح مساويا للصفر يكون الحل مستحيلا أو غير معين برتبة معينة برتبة أول محدد جزئى مخالف للصفر

(الفصل الثالث)

فى المتسلسلات

(المبحث الاول)

تعاريف

بحث ٤٢ (تعاريف) المتسلسلة هى تتابع لانهائى مركب من عدة كميات يستنتج بعضها من البعض الآخر على حسب قانون حيثما اتفق وهذه الكميات تسمى حدود المتسلسلة ويقال للمتسلسلة تقاربية متى قرب مجموع حدودها الاول التى عددها ن من نهاية محدودة ومعينة عندما يزيد ن الى مالانهاية ويقال انها تباعدية متى زاد مجموع حدودها الاول التى عددها ن الى مالانهاية عندما يزيد ن الى مالانهاية او متى لم يقرب هذا المجموع من نهاية معينة ونرمز للحدود المتوالية للمتسلسلة بالرموز

$$ع_{(٠)} ، ع_{١} ، ع_{٢} ، ع_{٣} ، \ldots\ldots$$

ونرمز بالرمز عن لمجموع الحدود الاول التى عددها ن فتكون المتسلسلة تقاربية متى قرب هذا المجموع وهو

$$ع_{ن} = ع_{(٠)} + ع_{١} + ع_{٢} + \ldots\ldots + ع_{ن-١}$$

من نهاية محدودة ع متى زاد ن الى مالانهاية

والكمية ع تسمى مجموع المتسلسلة والفرق ع ـ عن يسمى باقى هذه المتسلسلة

محدودة

محدودة بالحدود الاول التى عددها ن وحينئذ اذا رمزنا لهذا الباقى بالرمز $ب_ن$ يكون

$$ع = ع_ن + ب_ن$$

وبموجب ما ذكر تكون المتوالية الهندسية الممتدة الى ما لا نهاية وهى

$$ح ، ح س ، ح س^٢ ، ح س^٣ ، \dots$$

متسلسلة تقاربية اذا كان المقدار المطلق للاساس س أقل من الواحد لان مجموع الحدود الاول التى عددها ن هو

$$ع_ن = \frac{ح}{١-س} - \frac{ح}{١-س} س^ن$$

وهذا المجموع يميل الى النهاية

$$ع = \frac{ح}{١-س}$$

متى زاد ن الى ما لا نهاية غير ان هذه المتوالية تكون متسلسلة تباعدية متى كان المقدار المطلق للاساس أكبر من الواحد لانه فى هذه الحالة يزيد المجموع $ع_ن$ بحيث يصير أكبر من كل كمية معلومة وتكون تباعدية بالدليل نفسه اذا كان س = +١ ثم انه فى الحالة التى يكون فيها س = −١ لا يميل $ع_ن$ من نهاية معينة ولا يمكن اعتبار المتسلسلة تقاربية

بند ٤٣ (تنبيه) لاجل ان تكون المتسلسلة تقاربية يلزم انه اذا اعتبرت الحدود بالابتداء من حد بعيد بالكفاية تميل هذه الحدود من الصفر متى زاد ن الى ما لا نهاية لانه اذا كانت المتسلسلة تقاربية ومجموعها ع يمكن أخذ ن كبيرا كبرا كافيا بحيث لا تختلف المجموعات $ع_ن$ و $ع_{ن+١}$ و $ع_{ن+٢}$ عن ع الا بكمية صغيرة بقدر ما يراد واذ ذاك يكون الفرقان $ع_{ن+١} - ع_ن$ و $ع_{ن+٢} - ع_{ن+١}$ صغيرين بقدر ما يراد وحيث ان $ع_{ن+١} - ع_ن = ح_ن$ و $ع_{ن+٢} - ع_{ن+١} = ح_{ن+١}$ فيميل الحدان $ح_ن$ و $ح_{ن+١}$ الى الصفر الا ان هذا الشرط اللازم ليس كافيا لان الحدود يمكن ان تميل الى الصفر بدون ان تكون المتسلسلة تقاربية ولايضاح ذلك نأخذ المتسلسلة التوافقية وهى

$$١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} + \frac{١}{٤} + \dots + \frac{١}{ن} + \dots$$

المتكونة من كسور بسطها الواحد ومقاماتها الاعداد الصحيحة المتتالية فالحد العمومى $\frac{١}{ن}$ يميل من الصفر ومع ذلك فان المتسلسلة تباعدية لانه اذا كتبت المتسلسلة هكذا

$$١ + \frac{١}{٢} + \left(\frac{١}{٣} + \frac{١}{٤}\right) + \left(\frac{١}{٥} + \frac{١}{٦} + \frac{١}{٧} + \frac{١}{٨}\right) + \cdots\cdots$$

$$+ \left(\frac{١}{ه+١} + \frac{١}{ه+٢} + \frac{١}{ه+٣} + \cdots\cdots + \frac{١}{٢ه}\right) + \cdots\cdots$$

يعلم ان كل جزء محصور بين قوسين أكبر من $\frac{١}{٢}$ لان الاخير مثلا يحتوى على حدود عددها ه جميعها أكبر أو بالاقل مساوية $\frac{١}{٢ه}$ وحيث ان المتسلسلة مركبة من سلاسل لانهاية لعددها فمن الواضح ان مجموعها يمكن ان يزيد عن كل كمية معلومة

بند ٤٤ (الخاصية العمومية المميزة للتسلسلات التقاربية) الخاصية المميزة للتسلسلات التقاربية تنحصر فى هذا الشرط وهو

لاجل أن تكون متسلسلة مثل

$$ى_{(٠)} + ى_{١} + ى_{٢} + \cdots\cdots + ى_{ه-١} + \cdots\cdots$$

تقاربية يلزم ويكفى أن يميل المجموع

$$ى_{ه} + ى_{ه+١} + \cdots\cdots + ى_{ه+ح-١}$$

الى الصفر مهما كان ح اذا زاد ه الى مالانهاية

فهذا الشرط لازم لاننا اذا رمزنا بحرف ع لمجموع المتسلسلة أى للنهاية التى يميل اليها مجموع الحدود الاول التى عددها ه وهو

$$ع_{ه} = ى_{(٠)} + ى_{١} + ى_{٢} + \cdots\cdots + ى_{ه-١}$$

وفرضنا ان المتسلسلة تقاربية فان الفرق

$$ع - ع_{ه} \qquad (١)$$

يميل الى الصفر متى زاد ه الى مالانهاية وكذلك يميل كل من الفروق التى عددها ح وهى

$$ع - ع_{ه+١} \ ، \ ع - ع_{ه+٢} \ ، \ \cdots\cdots \ ، \ ع - ع_{ه+ح} \qquad (٢)$$

الى الصفر متى زاد ه الى مالانهاية

فاذا طرحنا هذه الفروق (٢) من الفرق (١) تحصل النواتج الآتية وهى

$$ع_{ه+١} - ع_{ه} \ ، \ ع_{ه+٢} - ع_{ه} \ ، \ \cdots\cdots \ ، \ ع_{ه+ح} - ع_{ه}$$

التى تنعدم كذلك عندما يكون ه = ∞ لكن

$$ع_{ه+١} - ع_{ه} = ى_{ه} \ ،$$

$ع_{ه}$

$$ع_{ه+٢} - ع_{ه} = ى_{ه} + ى_{ه+١} \quad \text{و}$$

. . . .

$$ع_{ه+ح} - ع_{ه} = ى_{ه} + ى_{ه+١} \cdots\cdots + ى_{ه+ح-١}$$

فيعلم من ذلك أولا انه يجب ان حدود المتسلسلة التقاربية تأخذ فى النقص الى مالانهاية بحيث تكون نهايتها الصفر وثانيا انه اذا أخذت حدود بقدر مايراد بالابتداء من الحد $ى_{ه}$ يميل مجموعها الى الصفر متى زاد $ه$ الى مالانهاية

والشرط المذكور كاف أى انه اذا مال المجموع

$$ى_{ه} + ى_{ه+١} + ى_{ه+٢} + \cdots\cdots + ى_{ه+ح-١}$$

الى الصفر مهما كان $ح$ عندما يزيد $ه$ الى مالانهاية تكون المتسلسلة

$$ى_{(٠)} + ى_{١} + ى_{٢} + \cdots + ى_{ه} + ى_{ه+١} + \cdots\cdots$$

تقاربية ولاثبات ذلك نرمز بحرف $ف$ لكمية موجبة صغيرة بقدر مايراد وبالرمز $ع_{ه}$ لمجموع الحدود الاول التى عددها $ه$ من المتسلسلة فحيث ان الفرق

$$ع_{ه+ح} - ع_{ه} = ى_{ه} + ى_{ه+١} + \cdots\cdots + ى_{ه+ح-١}$$

يميل الى الصفر فرضا مهما كان $ح$ اذا زاد $ه$ الى مالانهاية فيمكن اعطاء $ه$ مقدارا معينا كبيرا كافيا بحيث يكون الفرق المذكور محصورا بين $-ف$ و $+ف$ مهما كان $ح$ واذن يكون

$$ع_{ه} - ف < ع_{ه+ح} < ع_{ه} + ف$$

اذا تقرر هذا وأبقى $ه$ على حاله وزيد $ح$ الى مالانهاية فان المجموع $ع_{ه+ح}$ يبقى دائما محصورا بين كميتين معينتين وهما $ع_{ه} - ف$ و $ع_{ه} + ف$ فرقهما وهو $٢ف$ صغير بقدر مايراد وحينئذ يميل $ع_{ه+ح}$ من نهاية معينة متى زاد $ح$ أو $ه+ح$ الى مالانهاية

وهذا الاثبات يصير أوضح بواسطة الاعتبارات الهندسية فلتكن $و$ نقطة ثابتة على محور $و\,س$ ولنأخذ على $و\,س$ بالابتداء من $و$ طولا $و\,ه = ع_{ه}$ ثم نجعل



$ب\,ه = ه\,ت = ف$ ونأخذ كذلك $و\,ح = ع_{ه+ح}$ فتقع النقطة $ح$ بين $ب$ و $ت$

ويمكن بيان المجموع $ع_{ن+ح}$ الذى هو مجموع الحدود الاول التى عددها ن+ح من المتسلسلة بطول تقع نهايته دائما بين نقطتين معلومتين ب و ت ويمكن ان يصير البعد ب ت أقل من كل طول معلوم

(المبحث الثانى)

في المتسلسلات الموجبة الحدود

بند ٤٥ (نظرية أولى) اذا كانت حدود متسلسلة موجبة الحدود أقل من الحدود المناظرة لها من متسلسلة تقاربية موجبة الحدود فان المتسلسلة الاولى تكون تقاربية كذلك

لان المقدار الرقمى للفرق $ع_{ن+ح} - ع_{ن}$ من المتسلسلة المفروضة يكون أقل من المقدار الرقمى للفرق المطابق له من المتسلسلة التقاربية أو يكون فى الغاية مساويا له وحيث ان هذا الفرق الاخير يميل فى المتسلسلة التقاربية الى الصفر فيميل كذلك فى المتسلسلة المفروضة الى الصفر واذن تكون المتسلسلة المفروضة تقاربية

ومن هذه النظرية تنتج طريقة لمعرفة تقارب أى متسلسلة موجبة الحدود وذلك أن تقارن حدودها بحدود المتوالية الهندسية التنازلية فان كانت حدود المتسلسلة المفروضة أقل او فى الغاية مساوية للحدود المناظرة لها من المتوالية الهندسية تكون هذه المتسلسلة تقاربية

وعلى العموم تقارن حدود المتسلسلة المفروضة بحدود متسلسلة أخرى معلوم انها تقاربية فان كانت حدود المتسلسلة المفروضة أقل من الحدود المناظرة لها من المتسلسلة المذكورة تكون المتسلسلة المفروضة تقاربية

بند ٤٦ (نظرية ثانية) المتسلسلة ذات الحدود الموجبة تكون تقاربية اذا اعتبرت حدودها بالابتداء من رتبة ما وكانت النسبة بين أى حد وسابقه مساوية دائما او أقل من عدد معين أقل من الواحد

ولاثبات ذلك نصرف النظر عن الحدود الاول النونية العدد التى مقدار مجموعها محدود ومعين ونعتبر المتسلسلة

$$ي_{ن} + ي_{ن+1} + ي_{ن+2} + \cdots\cdots$$

المتكونة

المتكونة من الحدود التالية فعلى حسب المنطوق يكون

$$\frac{ه_{ن+١}}{ه_{ن}} < ك \text{ ،}$$

$$\frac{ه_{ن+٢}}{ه_{ن+١}} < ك \text{ ،}$$

$$\frac{ه_{ن+٣}}{ه_{ن+٢}} < ك \text{ ،}$$

. . . . . . ،

. . . . . .

ومن المتباينة الاولى يستنتج أن

$$ه_{ن+١} < ك\, ه_{ن}$$

ومن الثانية يوجد أن

$$ه_{ن+٢} < ك\, ه_{ن+١}$$

واذا عوض الحد $ه_{ن+٢}$ بالكمية $ك\, ه_{ن}$ الاكبر منه يوجد بالاولوية أن

$$ه_{ن+٢} < ك^{٢}\, ه_{ن}$$

وبمثل ذلك يستنتج من المتباينة الثالثة أن

$$ه_{ن+٣} < ك\, ه_{ن+٢}$$

وبتعويض $ه_{ن+٢}$ بالكمية $ك^{٢}\, ه_{ن}$ الاكبر منه يكون

$$ه_{ن+٣} < ك^{٣}\, ه_{ن}$$

وهكذا

وينتج من ذلك ان حدود المتسلسلة

$$ه_{ن} + ه_{ن+١} + ه_{ن+٢} + \cdots \qquad (١)$$

تكون أقل من الحدود المناظرة لها من المتوالية الهندسية التنازلية وهى

$$ه_{ن} + ك\, ه_{ن} + ك^{٢}\, ه_{ن} + \cdots \qquad (٢)$$

التى أساسها ك أقل من الواحد وبموجب النظرية المتقدمة تكون المتسلسلة المفروضة تقاربية

واذا كانت النسبة بين كل حد وسابقه أكبر من الواحد فمن الواضح ان الحدود تأخذ فى الازدياد شيأ فشيأ ويزيد مجموعها عن كل كمية معلومة وتكون المتسلسلة تباعدية

بند ٤٧ *(تنبيه)* الاثبات السابق لا يوصل الى الغرض متى كان الكمية ك مساوية للواحد وفى هذه الحالة يمكن ان تكون المتسلسلة تقاربية ويمكن أن تكون تباعدية كما سنوضحه ببعض أمثلة

بند ٤٨ (كيفية تطبيق هذه النظرية) عادة تميل النسبة بين كل حد وسابقه الى نهاية ل متى زاد ه الى مالانهاية فاذا كانت النهاية ل اقل من الواحد يمكن انتخاب عدد معين اختيارى مثل ك محصور بين ل و ١ وحيث ان النسبة تميل الى ل فيمكن اخذ ه كبيرا بالكفاية بحيث تصير هذه النسبة اقل دائما من الكمية ك الاقل من الواحد وحينئذ تكون المتسلسلة تقاربية

واذا كانت النهاية ل اكبر من الواحد يمكن كذلك انتخاب عدد معين اختيارى مثل ك محصور بين ١ و ل وحيث ان النسبة تقرب قربا لانهائيا من ل فتنتهى بان تصير دائما اكبر من الكمية ك الاكبر من الواحد واذن تكون المتسلسلة تباعدية

واذا كانت ل = ١ يحصل شك وتكون النظرية الثانية غير كافية لبت تقارب المتسلسلة او تباعدها ومع ذلك فانه اذا كانت النسبة $\frac{\text{ه}^{\text{ن}}+1}{\text{ه}^{\text{ن}}}$ تنتهى بان تكون على الدوام اكبر من نهايتها وهى ١ تكون المتسلسلة تباعدية لان الحدود تأخذ فى الكبر اذ ذاك شيأ فشيأ وحيث انها جميعها موجبة فيمكن ان يصير مجموعها اكبر من كل كمية معلومة

بند ٤٩ (نهاية الخطأ الواقع) اذا اخذت الحدود الاول التى عددها ه واهملت الحدود التالية لها يكون الخطأ الواقع اى نهاية مجموع حدود المتسلسلة (١) (بند ٤٦) اقل من نهاية مجموع حدود المتوالية الهندسية التنازلية (٢) وحينئذ اذا رمزنا لهذا الخطأ الواقع بحرف خ يكون

$$\text{خ} < \frac{\text{ق}^{\text{ن}}}{1-\text{ك}}$$

بند ٥٠ (امثلة) الاول لتكن المتسلسلة

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{1\times2\times3\times4}+\cdots+\frac{1}{1\times2\times3\cdots\times ه}+\cdots \quad (٣)$$

فالنسبة بين الحد الذى رتبته ه + ١ والحد السابق له هى $\frac{1}{ه}$ ونهاية هذه النسبة صفر متى زاد ه الى ما لا نهاية وحينئذ تكون المتسلسلة تقاربية

فاذا اوقفت المتسلسلة بالحد $\frac{1}{1\times2\times3\cdots\times ح}$ تكون النسبة بين أى حد من الحدود التالية له والحد السابق له اقل دائما من $\frac{1}{1+ح}$ وحينئذ يمكن أخذ $ك=\frac{1}{1+ح}$ ويكون الخطأ الواقع هو

$$خ<\frac{1}{1\times2\times3\ \cdots\ \times ه}\left(1+\frac{1}{ح}\right)$$

الثانى اذا اعتبرت المتسلسلة التوافقية (بند ٤٣ د) تكون النسبة بين الحد الذى رتبته ه والحد السابق له هى $\frac{ه-1}{ه}$ أى $\left(1-\frac{1}{ه}\right)$ وهى دائما اقل من الواحد الا ان نهايتها هى الواحد متى زاد ه الى ما لا نهاية وحينئذ يحصل شك لكن قد أثبتنا بكيفية مخصوصة فى بند ٤٣ د أن المتسلسلة تباعدية

الثالث لتكن المتسلسلة

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{ه^2}+\cdots \quad (٤)$$

فالنسبة بين الحد الذى رتبته ه وسابقه هى $\frac{(ه-1)^2}{ه^2}$ أو $\left(1-\frac{1}{ه}\right)^2$ ونهايتها هى الواحد وحينئذ لا يمكن تطبيق النظرية الثانية لمعرفة تقارب هذه المتسلسلة لكن اذا وضعت حدود المتسلسلة هكذا

$$1+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\left(\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{8^2}+\frac{1}{9^2}+\cdots+\frac{1}{15^2}\right)+\cdots$$

أعنى اذا وضعت بحيث ان كل سلسلة تبتدئ بحد مقامه قوة لعدد ٢ يكون مقدار السلسلة الاولى اقل من حاصل ضرب ٢ فى $\frac{1}{2^2}$ اى اقل من $\frac{1}{2}$ ويكون مقدار السلسلة الثانية اقل من اربعة امثال $\frac{1}{4^2}$ اى اقل من $\frac{1}{4}$ ويكون مقدار السلسلة الثالثة اقل من ثمانية امثال $\frac{1}{8^2}$ اى اقل من $\frac{1}{8}$ وهلم جرا وحينئذ يكون مجموع حدود المتسلسلة اقل

من مجموع حدود المتوالية الهندسية التنازلية وهو

$$١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٨} + \cdots$$

وحينئذ تكون المتسلسلة تقاربية

بحث د (الحالة التى تكون فيها المتسلسلة مرتبة على حسب قوى متغير) قد يتأتى غالبا ان المتسلسلة تكون مرتبة على حسب القوى الصحيحة والتنازلية لمتغير مثل س فاذا كان الحد العمومى $ع_{هـ}$ مساويا $ب_{هـ} س^{هـ}$ تكون النسبة $\frac{ع_{هـ+١}}{ع_{هـ}}$ مساوية $\frac{ب_{هـ+١}}{ب_{هـ}}$ فاذا رمز بحرف ل للنهاية التى تميل اليها النسبة $\frac{ب_{هـ+١}}{ب_{هـ}}$ الواقعة بين المعاملين $ب_{هـ}$ ، $ب_{هـ+١}$ متى زاد هـ الى ما لا نهاية تكون نهاية النسبة بين الحدين هى ل س وحينئذ تكون المتسلسلة تقاربية اذا كان (بحث ٤٨ د)

$$ل س < ١ \quad \text{اى اذا كان} \quad س < \frac{١}{ل}$$

ويعلم من ذلك ان المتسلسلة تكون تقاربية مادام س اقل من $\frac{١}{ل}$ وتباعدية متى كان س اكبر من $\frac{١}{ل}$ ويحصل شك اذا اعطى المقدار $\frac{١}{ل}$ الى س

(مثالان) الاول هذه المتسلسلة

$$١ + \frac{س}{١} + \frac{س^{٢}}{١×٢} + \frac{س^{٣}}{١×٢×٣} + \cdots + \frac{س^{هـ}}{١×٢×٣\cdots×هـ} + \cdots \qquad (٥)$$

معاملات حدودها هى حدود المتسلسلة (٣) وحينئذ تكون النسبة بين المعاملات وهى $\frac{ب_{هـ+١}}{ب_{هـ}}$ مساوية $\frac{١}{هـ}$ وتكون نهايتها ل = ٠ وحينئذ تكون المتسلسلة تقاربية بكل مقدار يعطى الى س اقل من $\frac{١}{٠}$ أى مهما كان س

الثانى هذه المتسلسلة

$$\frac{س}{١} + \frac{س^{٢}}{٢} + \frac{س^{٣}}{٣} + \frac{س^{٤}}{٤} + \cdots + \frac{س^{هـ}}{هـ} + \cdots \qquad (٦)$$

معاملاتها هى حدود المتسلسلة التوافقية وهى

$$١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} + \frac{١}{٤} + \cdots$$

وحينئذ تكون النسبة بين المعاملات هى $(١ - \frac{١}{هـ})$ ويكون نهايتها الواحد وحينئذ تكون المتسلسلة تقاربية بكل مقدار يعطى الى س أصغر من ١ وتكون تباعدية

بكل

بكل مقدار يعطى الى س اكبر من ١ ويحصل شك اذا كان س = ١ لكن قد علمنا فيما تقدم ان المتسلسلة تكون حينئذ تباعدية

بند ٥٣ (نظرية ثالثة) اذا اعتبرت حدود المتسلسلة بالابتداء من رتبة ما وكان مقدار $\sqrt[ه]{ق_ه}$ مساويا دائما أو اقل من عدد معين أقل من الواحد فان المتسلسلة المذكورة تكون تقاربية

لاننا اذا فرضنا من ابتداء حد برتبة ما ان مقدار $\sqrt[ه]{ق_ه}$ يبقى دائما مساويا أو اقل من عدد معين ك اصغر من الواحد يكون

$$\sqrt[ه]{ق_ه} < ك$$

واذن يكون

$$ق_ه < ك^ه$$

وتكون حدود المتسلسلة أقل على التناظر من حدود المتوالية الهندسية التنازلية وهى

$$ك^ه + ك^{ه+1} + ك^{ه+2} + \cdots\cdots$$

واذن تكون المتسلسلة تقاربية

فاذا كان مقدار $\sqrt[ه]{ق_ه}$ أكبر دائما من الواحد فان الحدود تأخذ على الدوام فى الكبر وتكون المتسلسلة تباعدية

(تنبيه) الاثبات المتقدم لا يوصل للغرض اذا كانت الكمية ك = ١ وفى هذه الحالة لا يمكن تطبيق هذه النظرية بل يلزم استعمال طرق خصوصية

بند ٥٤ (كيفية تطبيق هذه النظرية) عادة يميل مقدار $\sqrt[ه]{ق_ه}$ من نهاية معينة ل متى زاد ه الى ما لا نهاية فاذا كانت النهاية ل أقل من الواحد تكون المتسلسلة تقاربية واذا كانت أكبر من الواحد تكون المتسلسلة تباعدية واذا كانت مساوية للواحد يحصل شك واذ ذاك يلزم استعمال طرق خصوصية لا يمكن بيانها هنا

مثال فى المتسلسلة

$$1 + \frac{3}{2}س + \left(\frac{4}{3}س\right)^2 + \left(\frac{5}{4}س\right)^3 + \cdots\cdots + \left(\frac{ه+2}{ه+1}س\right)^ه + \cdots\cdots$$

يكون

$$\sqrt[ه]{ق_ه} = \frac{ه+2}{ه+1}س = \frac{1+\frac{2}{ه}}{1+\frac{1}{ه}}س$$

ونهاية هذا المقدار عندما يزيد ه الى ما لا نهاية تساوى س وحينئذ تكون المتسلسلة

تقاربية اذا كان $سه < ١$ وتكون تباعدية اذا كان $سه > ١$

بند ٥٤ (نهاية الخطأ الواقع) في الحالة التي تكون فيها المتسلسلة تقاربية يتوصل بواسطة الاثبات المتقدم الى معرفة نهاية للخطأ غ الذي يقع متى أوقفت المتسلسلة بحد مثل $ح_{ن-١}$ لانه من الواضح أن

$$غ < \frac{ك^{ن}}{١-ك}$$

(و ك نهاية كبرى للكمية $\sqrt[ه]{ح_{ه}}$)

بند ٥٥ (نظرية رابعة) اذا تناقصت حدود أى متسلسلة مثل

$$ح_{(٠)} + ح_{١} + ح_{٢} + ح_{٣} + \cdots\cdots + ح_{ه} + \cdots\cdots$$

على الدوام بالابتداء من الحد الاول أقول ان هذه المتسلسلة تكون تقاربية أو تباعدية على حسب ما تكون المتسلسلة

$$ح_{(٠)} + ٢ح_{١} + ٤ح_{٣} + ٨ح_{٧} + ١٦ح_{١٥} + \cdots\cdots$$

تقاربية أو تباعدية

ولاثبات ذلك نفرض في أول الامر أن المتسلسلة الاولى تقاربية فمن الواضح انه يكون

$$ح_{(٠)} = ح_{(٠)} \text{ ،}$$

$$٢ح_{١} = ٢ح_{١} \text{ ،}$$

$$٤ح_{٣} < ٢ح_{٢} + ٢ح_{٣} \text{ ،}$$

$$٨ح_{٧} < ٢ح_{٤} + ٢ح_{٥} + ٢ح_{٦} + ٢ح_{٧} \text{ ،}$$

$$١٦ح_{١٥} < ٢ح_{٨} + ٢ح_{٩} + ٢ح_{١٠} + \cdots + ٢ح_{١٥} \text{ ،}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

وبجمع هذه المتباينات على بعضها طرفا الى طرف يوجد أن

$$ح_{(٠)} + ٢ح_{١} + ٤ح_{٣} + ٨ح_{٧} + ١٦ح_{١٥} + \cdots\cdots$$

$$< ح_{(٠)} + ٢ح_{١} + ٢ح_{٢} + ٢ح_{٣} + ٢ح_{٤} + \cdots + ٢ح_{١٥} + \cdots\cdots$$

ويعلم من ذلك ان مجموع عدد ما من حدود المتسلسلة الثانية يكون أصغر من ضعف مجموع حدود من المتسلسلة الثانية آخر حد منها دليله كدليل آخر حد مأخوذ في المجموع الاول وحيث كانت المتسلسلة الاولى تقاربية فرضا فبالاولوية تكون المتسلسلة

الثانية

الثانية تقاربية ويعلم من ذلك انه اذا تقاربت الاولى تتقارب الثانية ولنفرض الآن ان المتسلسلة الاولى تباعدية فبوضع الحدود بكيفية اخرى يوجد أن

$$ح_{(٠)} = ح_{(٠)} \text{ ،}$$

$$ح_{٢} + ح_{١} < ٢ح_{١} \text{ ،}$$

$$ح_{٦} + ح_{٥} + ح_{٤} + ح_{٣} < ٤ح_{٣} \text{ ،}$$

$$ح_{١٤} + \cdots + ح_{٩} + ح_{٨} + ح_{٧} < ٨ح_{٧}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

وبجمع هذه المتباينات على بعضها طرفا على طرف يوجد أن

$$\cdots\cdots + ٨ح_{٧} + ٤ح_{٣} + ٢ح_{١} + ح_{(٠)}$$

$$\cdots + ح_{١٤} + \cdots\cdots + ح_{٥} + ح_{٤} + ح_{٣} + ح_{٢} + ح_{١} + ح_{(٠)} <$$

ويعلم من ذلك أنه اذا أخذت حدود بعدد ما من المتسلسلة الثانية يكون مجموعها أكبر من مجموع حدود من المتسلسلة الاولى منتهية بحد دليله ضعف دليل الحد المنتهية به الحدود المكونة للمجموع الاول وحيث ان مجموع الحدود المأخوذة من المتسلسلة الاولى يزيد الى ما لا نهاية بالفرض فتكون المتسلسلة الثانية تباعدية ويعلم من ذلك انه اذا تباعدت الاولى تتباعد الثانية وهذا هو ما اردنا بيانه

بحث ٥٦ (تطبيقات) لتكن المتسلسلة الاولى هى

$$\cdots\cdots + \frac{١}{ه^{ر}} + \cdots\cdots + \frac{١}{٤^{ر}} + \frac{١}{٣^{ر}} + \frac{١}{٢^{ر}} + ١ \qquad (٥)$$

فتكون الثانية هى

$$\cdots\cdots + ٨^{١-ر} + ٤^{١-ر} + ٢^{١-ر} + ١$$

وحيث ان هذه المتسلسلة الثانية متوالية هندسية اساسها $٢^{١-ر}$ فتكون تقاربية اذا كان ر أكبر من الواحد وتكون تباعدية اذا كان ر مساويا للواحد أو أقل منه ويعلم من ذلك ان المتسلسلة الاولى تكون تقاربية اذا كان $ر > ١$ وتباعدية اذا كان ر أصغر من الواحد أو مساويا له

ولنجعل المتسلسلة الاولى هى

$$\cdots + \frac{١}{ه(لوه)^{ر}} + \cdots + \frac{١}{٤(لو٤)^{ر}} + \frac{١}{٣(لو٣)^{ر}} + \frac{١}{٢(لو٢)^{ر}} + ١ \qquad (٨)$$

فتكون الثانية هى

$$١ + \frac{١}{(\text{لو}\,٢)^{ر}} + \frac{١}{(\text{لو}\,٤)^{ر}} + \frac{١}{(\text{لو}\,٨)^{ر}} + \cdots + \frac{١}{(\text{لو}\,٢^{ه})^{ر}} + \cdots$$

وبملاحظة ان $(\text{لو}\,٢^{ه})^{ر} = ه^{ر}(\text{لو}\,٢)^{ر}$ توجد المتسلسلة

$$١ + \frac{١}{(\text{لو}\,٢)^{ر}}\left(١ + \frac{١}{٢^{ر}} + \frac{١}{٣^{ر}} + \cdots + \frac{١}{ه^{ر}} + \cdots\right)$$

وحيث لم تكن المتسلسلة المحصورة بين القوسين الا متسلسلة (٧) فتكون تقاربية اذا كان ر أكبر من الواحد وتباعدية اذا كان ر مساويا للواحد أو أقل منه وحينئذ تكون المتسلسلة (٨) تقاربية اذا كان ر أكبر من الواحد وتباعدية اذا كان ر مساويا للواحد أو أقل منه

بند ٥٧ (نظرية خامسة) المتسلسلة

$$ح_{٠} + ح_{١} + ح_{٢} + \cdots + ح_{ه} + \cdots$$

ذات الحدود الموجبة تكون تقاربية اذا اعتبرت حدودها من ابتداء رتبة مّا وكانت النسبة بين لوغاريتم $\frac{١}{ح_{ه}}$ ولوغاريتم ه أكبر دائما من عدد ك أكبر من الواحد وتكون تباعدية اذا كانت النسبة المذكورة أصغر من الواحد دائما

أولا اذا كانت النسبة بين لو $\frac{١}{ح_{ه}}$ ، لو ه أكبر دائما من ك يكون

$$\text{لو}\,\frac{١}{ح_{ه}} > ك\,\text{لو}\,ه \quad \text{أو} \quad \text{لو}\,\frac{١}{ح_{ه}} > \text{لو}\,ه^{ك}$$

واذن يكون

$$\frac{١}{ح_{ه}} > ه^{ك} \quad \text{أو} \quad ح_{ه} < \frac{١}{ه^{ك}}$$

وحينئذ تكون حدود المتسلسلة بالابتداء من $ح_{ه}$ أقل من الحدود المطابقة لها من المتسلسلة

$$\frac{١}{ه^{ك}} + \frac{١}{(ه+١)^{ك}} + \frac{١}{(ه+٢)^{ك}} + \cdots$$

وحيث ان هذه المتسلسلة الاخيرة تقاربية حيث ان ك أكبر من الواحد (بند ٥٦) فاذن تكون المتسلسلة المفروضة تقاربية

وثانيا

وثانيا اذا كان الامر بالعكس بان كانت النسبة المذكورة أقل دائما من الواحد بالابتداء من الحد $ع_{ن}$ يكون

$$لو\,\frac{١}{ع_{ن}} < لو\,ن \quad او \quad \frac{١}{ع_{ن}} < ن \quad او \quad ع_{ن} > \frac{١}{ن}$$

وحينئذ تكون حدود المتسلسلة المفروضة بالابتداء من الحد $ع_{ن}$ أكبر من حدود المتسلسلة

$$\frac{١}{ن} + \frac{١}{ن+١} + \frac{١}{ن+٢} + \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

التباعدية (بند ٤٣) واذن تكون المتسلسلة المفروضة تباعدية

بند ٥٨ (كيفية تطبيق هذه النظرية) اذا مالت النسبة بين لو $\frac{١}{ع_{ن}}$ ولو ن من نهاية ل

كما يتأتى عادة يعلم كما فى بند ٤٨ ان المتسلسلة تكون تقاربية متى كانت النهاية ل أكبر من الواحد وتكون تباعدية متى كانت النهاية ل أقل من الواحد وفى الحالة التى يكون فيها ل = ١ قد تكون تقاربية وقد تكون تباعدية ومع ذلك فانه اذا انتهت النسبة بصيرورتها الى الدوام أقل من نهايتها وهى ١ تكون المتسلسلة تباعدية

بند ٥٩ (نظرية سادسة) اذا كانت متسلسلة موجبة الحدود تقاربية فانها تكون تقاربية كذلك اذا ضربت جميع حدودها فى عدد حيثما اتفق او فى أعداد مختلفة بشرط ان تكون هذه الاعداد محدودة

لانه اذا أمكن أخذ ن كبيرا بحيث يصغر المجموع

$$ع_{ن} + ع_{ن+١} + ع_{ن+٢} + \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot + ع_{ن+ح-١}$$

مهما كان ح بقدر مايراد ويميل الى الصفر عندما يزيد ن الى مالانهاية فان المجموع

$$ء_{ن}ع_{ن} + ء_{ن+١}ع_{ن+١} + ء_{ن+٢}ع_{ن+٢} + \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot + ء_{ن+ح-١}ع_{ن+ح-١}$$

يصغر كذلك ويميل الى الصفر مهما كان ح اذا زاد ن الى مالانهاية حيث انه أقل من المجموع

$$ء\,(ع_{ن} + ع_{ن+١} + ع_{ن+٢} + \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot + ع_{ن+ح-١})$$

الذى فيه ء أكبر المعاملات الداخلة فى المجموع الاول

بند ٦٠ (نظرية سابعة) اذا كانت متسلسلة مثل

$$ق_{(0)} + ق_1 + ق_2 + ق_3 + \cdots + ق_ه + \cdots$$

تقاربية وكانت متسلسلة اخرى مثل

$$و_{(0)} + و_1 + و_2 + و_3 + \cdots + و_ه + \cdots$$

مأخوذة بحيث انه اذا اعتبرت حدودها بالابتداء من حد مرتبته ے ووجد دائماً أن

$$\frac{و_{ه+1}}{و_ه} < \frac{ق_{ه+1}}{ق_ه}$$

فان هذه المتسلسلة الاخرى تكون تقاربية

لانه اذا ضربت المتسلسلة الاولى فى $\frac{و_ے}{ق_ے}$ الذى هو عدد محدود تحصل متسلسلة جديدة تكون بموجب النظرية المتقدمة تقاربية وحيث ان حدود هذه المتسلسلة الجديدة بالابتداء من الحد $و_ے$ وهى

$$و_ے + و_ے \frac{ق_{ے+1}}{ق_ے} + و_ے \frac{ق_{ے+2}}{ق_ے} + \cdots$$

أكبر من الحدود المناظرة لها من المتسلسلة الثانية وهى

$$و_ے + و_{ے+1} + و_{ے+2} + \cdots$$

فبالاولوية تكون هذه المتسلسلة الثانية تقاربية

(المبحث الثالث)

فى المتسلسلات التى ليست جميع حدودها موجبة

بند ٦٣ (نظرية اولى) اذا لم تكن جميع حدود أى متسلسلة متحدة الاشارة فانه يكفى لاجل ان تكون هذه المتسلسلة تقاربية انها تكون تقاربية اذا أخذت جميع حدودها باشارة واحدة (+ مثلا)

لانه حيث كانت المتسلسلة ذات الحدود الموجبة تقاربية فيمكن ان يؤخذ الى ه مقدار ے كبير بحيث انه اذا اعتبرت حدودها بالابتداء من الحد $ق_ے$ يكون مجموع الحدود التالية التى عددها ع صغيرا بقدر ما يراد ويميل الى الصفر اذا زاد ے الى مالانهاية (بند ٤٤) وحينئذ فبالاولوية يميل المجموع الجبرى للحدود المناظرة لها

التى

التى عددها ح من المتسلسلة المفروضة الى الصفر حيث ان الحدود فى المتسلسلة الاولى تضاف الى بعضها وفى الثانية يضاف بعضها الى بعض وبعضها يطرح من بعض وحينئذ تكون المتسلسلة المفروضة تقاربية (بـ ٤٤ د)

ويعلم من ذلك انه يمكن تطبيق قواعد التقارب التى تقررت للمتسلسلات الموجبة الحدود على هذه المتسلسلات الجديدة وتعيين نهاية للخطأ الذى يقع اذا اوقفت المتسلسلة بعدما الا انه قد تكون المتسلسلة التى ليست جميع حدودها موجبة تقاربية وتكون تباعدية اذا أخذت جميع حدودها باشارة واحدة وحينئذ يكون من المفيد اعطاء قواعد خصوصية تطبق على هذه الحالة الخصوصية ولنقتصر منها على القاعدة الآتية وهى

بـ ٦٢ د (نظرية ثانية) المتسلسلة تكون تقاربية متى كانت حدودها البعيدة موجبة وسالبة على التعاقب وآخذة فى النقص الى ما لا نهاية ولاثبات ذلك نفرض ان هذا الشرط متحقق فى المتسلسلة

$$ع_{(٠)} + ع_{١} + ع_{٢} + ع_{٣} + \cdots + ع_{ن+١} + ع_{ن+٢} + ع_{ن+٣} + ع_{ح} + \cdots$$

بالابتداء من الحد $ع_{ن+١}$ ونفرض ان هذا الحد موجب ثم نرمز بالرموز $ر_{ن+١}$ و $ر_{ن+٢}$ و $ر_{ن+٣}$ الخ للمقادير المطلقة للحدود $ع_{ن+١}$ و $ع_{ن+٢}$ و $ع_{ن+٣}$ الخ فيكون (ح أكبر من ن)

$$ع_{ح} = ع_{ن} + (ر_{ن+١} - ر_{ن+٢}) + (ر_{ن+٣} - ر_{ن+٤}) + \cdots$$

واذن يكون

$$ع_{ح} > ع_{ن}$$

وكذلك يوجد أن

$$ع_{ح} = ع_{ن} + ر_{ن+١} - (ر_{ن+٢} - ر_{ن+٣}) - (ر_{ن+٤} - ر_{ن+٥}) - \cdots$$

وبهذه الصورة يشاهد أن

$$ع_{ح} < ع_{ن} + ر_{ن+١}$$

وبناء على ذلك يكون

$$ع_{ن} < ع_{ح} < ع_{ن} + ر_{ن+١}$$

ويعلم من ذلك ان $ع_{ح}$ يكون دائما محصورا بين $ع_{ن}$ و $ع_{ن} + ر_{ن+١}$ وحيث ان $ر_{ن+١}$

يمكن أن يصغر بقدر ما يراد فتكون المتسلسلة تقاربية

بـ٦٣ـد (نهاية الخطأ الواقع) الخطأ الذي يقع اذا وقفت المتسلسلة بحد مثل $وع_{ن-١}$ يكون أقل من الحد التالي ومضاده معه في الاشارة لانه من الواضح أن مجموع المتسلسلة وهو ع محصور بين $ع_{ن-١}$ و $ع_{ن}$ وحينئذ اذا أخذ $ع_{ن}$ مقدارا مقربا الى ع يكون الخطأ الواقع أقل من الفرق بين $ع_{ن}$ و $ع_{ن-١}$ أعني أقل من $\pm وع_{ن}$ واذن تكون المقادير المقربة التي يحصل عليها بأخذ حدود يكبر عددها شيأ فشيأ أكبر من مقدار ع وأصغر منه على التعاقب الا أن المقدار المطلق للخطأ يكون أقل من المقدار المطلق لاول حد مهمل

بـ٦٤ـد (مثال) لتكن المتسلسلة

$$س - \frac{س^{٢}}{٢} + \frac{س^{٣}}{٣} - \frac{س^{٤}}{٤} - \cdots\cdots - \frac{س^{٢ن}}{٢ن} + \frac{س^{٢ن+١}}{٢ن+١} - \cdots \qquad (١)$$

فالمقدار المطلق للنسبة الكائنة بين أي حد وسابقه هو $\frac{ن}{ن+١}س$ ونهاية هذا المقدار هي س واذن تكون المتسلسلة تقاربية (بـ٤٨ـد و بـ٦١ـد) اذا كان المقدار المطلق الى س أقل من الواحد وتكون تباعدية اذا كان س أكبر من الواحد واذا كان س = ١ تكون المتسلسلة تقاربية (بـ٦١ـد) لانها تؤول حينئذ الى

$$١ - \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} - \frac{١}{٤} + \frac{١}{٥} - \cdots\cdots$$

وتكون حدودها موجبة وسالبة على التعاقب وآخذة في النقص الى ما لا نهاية واذا جعل س = −١ توجد المتسلسلة التوافقية التباعدية

ومتى كانت المتسلسلة تقاربية يكون المقدار المطلق للخطأ خ الذي يقع متى أوقفت هذه المتسلسلة بالحد $\frac{س^{ن-١}}{ن-١}$ أقل من الحد $\frac{س^{ن}}{ن}$ وتكون اشارته كاشارة هذا الحد

بـ٦٥ـد (تنبيه) متى كانت متسلسلة جميع حدودها موجبة تقاربية بدون التعلق باشارات حدودها فانه يمكن اعتبارها فرق متسلسلتين تكون احداهما متكونة من الحدود الموجبة والاخرى متكونة من الحدود السالبة لاننا اذا رمزنا بالرمز $ع_{ن}$ لمجموع الحدود الاول التي عددها ن من المتسلسلة وبالرمزين $ع'_{ن}$ و $ع''_{ن}$ لمجموعي الحدود الموجبة والحدود السالبة الموجودة في هذه الحدود التي عددها ن يكون

$$ع_{ن} = ع'_{ن} - ع''_{ن}$$

فاذا

فاذازيد ه , هَ , هً تميل هذه المجموعات الثلاثة التقاربية الى النهايات ع , عَ , عً على التناظر ولاتزال هذه المجموعات محققة للشرط السابق واذن يكون ع = عَ − عً الا انه ينبغى الاحتراس من سريان هذا التنبيه على المتسلسلات التى تصير تباعدية اذا اخذت جميع الحدود باشارة + لانه يتوصل حينئذ الى خطأ جسيم وهاك مثالا شهيرا على ذلك

قد علمت ان المتسلسلة التوافقية تباعدية الا أن المتسلسلة

$$١ - \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} - \frac{١}{٤} + \frac{١}{٥} - \frac{١}{٦} + \cdots + \frac{١}{٢ه-١} - \frac{١}{٢ه} + \cdots \qquad (٢)$$

المركبة من نفس حدود المتسلسلة التوافقية مأخوذة موجبة وسالبة على التعاقب تقاربية (بـ ٦١ د) حيث ان الحدود آخذة فى النقص الى ما لا نهاية وسنشاهد فيما بعد ان شاء الله تعالى ان مجموعها هو اللوغاريتم النبيرى لـ ٢

فاذا غير ترتيب الحدود وكتبت المتسلسلة المذكورة هكذا

$$١ + \frac{١}{٣} - \frac{١}{٢} + \frac{١}{٥} + \frac{١}{٧} - \frac{١}{٤} + \frac{١}{٩} + \frac{١}{١١} - \frac{١}{٦} + \frac{١}{١٣} + \frac{١}{١٥} - \frac{١}{٨} + \cdots \qquad (٣)$$

يظهر ان هذه المتسلسلة الحادثة لا تخالف المتسلسلة المذكورة لان المتسلسلتين (٢) , (٣) متحدتان فى الحدود الموجبة وهى ١ , $\frac{١}{٣}$, $\frac{١}{٥}$, $\frac{١}{٧}$, ... الخ والحدود السالبة وهى $\frac{١}{٢}$, $\frac{١}{٤}$, $\frac{١}{٦}$, $\frac{١}{٨}$, ... الخ ومع ذلك فان مجموعيهما مختلفان لانه اذا جمعت حدود المتسلسلة (٢) أربعة أربعة بدون تغيير رتبتها تكون السلسلة النونية هى

$$\frac{١}{٤ه-٣} - \frac{١}{٤ه-٢} + \frac{١}{٤ه-١} - \frac{١}{٤ه} \qquad (ل)$$

ويتحصل على مجموع المتسلسلة وهو ع بجمع المقادير التى تأخذها هذه السلسلة متى أعطيت الى ه جميع المقادير الصحيحة الممكنة وكذا اذا سلسلت حدود المتسلسلة (٣) ثلاثة ثلاثة تكون السلسلة النونية هى

$$\frac{١}{٤ه-٣} + \frac{١}{٤ه-١} - \frac{١}{٢ه} \qquad (ح)$$

ويتحصل على مجموع المتسلسلة وهو عَ بجمع المقادير التى تأخذها هذه السلسلة متى أعطيت فيها الى ه جميع المقادير الصحيحة الممكنة ومن الواضح ان زيادة السلسلة (ح) عن السلسلة (ل) هى

$$\frac{١}{٤ه-٢} - \frac{١}{٢ه} + \frac{١}{٤ه} \quad \text{أو} \quad \frac{١}{٤ه-٢} - \frac{١}{٤ه}$$

أو $$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2ن-1}-\frac{1}{2ن}\right) \qquad (ط)$$

واذن مهما كان ن يكون

$$\left(\frac{1}{4ن-3}+\frac{1}{4ن-1}-\frac{1}{2ن}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{4ن-3}-\frac{1}{4ن-2}+\frac{1}{4ن-1}-\frac{1}{4ن}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2ن-1}-\frac{1}{2ن}\right)$$

وحينئذ اذا اعطى الى ن فى هذه المطابقة مقادير ١ و٢ و٣ و... و ن وجمعت النواتج المتحصلة طرفا على طرف يوجد مهما كان ن أن

$$\sum\left(\frac{1}{4ن-3}+\frac{1}{4ن-1}-\frac{1}{2ن}\right)$$
$$=\sum\left(\frac{1}{4ن-3}-\frac{1}{4ن-2}+\frac{1}{4ن-1}-\frac{1}{4ن}\right)+\frac{1}{2}\sum\left(\frac{1}{2ن-1}-\frac{1}{2ن}\right)$$

فاذا فرض ان ن يزيد الى ما لا نهاية تكون نهاية المجموع الاول هى ع َ وتكون نهاية المجموع الثانى هى ع وأما المجموع الاخير فان نهايته ع كذلك حيث ان $\left(\frac{1}{2ن-1}-\frac{1}{2ن}\right)$ تكون هى السلسلة النونية من المتسلسلة (٢) اذا سلسلت فيها الحدود مثنى مثنى وحينئذ يكون

$$ع َ = ع + \frac{1}{2} ع$$

واذن يكون $$ع َ = \frac{3}{2} ع$$

ويعلم من ذلك ان مجموع المتسلسلة (٣) يساوى حاصل ضرب $\frac{3}{2}$ فى مجموع المتسلسلة (٢) واذن لا يمكن تغيير حدود اى متسلسلة اذا لم تكن تقاربية بدون التعلق باشارات حدودها

(المبحث الرابع)

فى الكلام على متسلسلة شهيرة

بند ٦٦ (تعريف الكمية ﻫ) اشهر المتسلسلات التى تستعمل فى الفروع التحليلية هى المتسلسلة

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{1\times2\times3\times4}+\cdots+\frac{1}{1\times2\times3\cdots\times ن}+\cdots \quad (1)$$

ومجموع الحدين الاولين يساوى ٢ والحدود التالية اقل على التناظر من حدود المتوالية الهندسية

$$\frac{١}{٢} + \frac{١}{٢^{٢}} + \frac{١}{٢^{٣}} + \cdots\cdots$$

التى يحصل عليها بوضع كل من العوامل ٣ و٤ و٥ ... الخ بالعامل الاقل منه وهو ٢ وبموجب النظرية الاولى (بند ٤٥ د) تكون المتسلسلة تقاربية ويميل مجموع الحدود الاول التى عددها ه بصرف النظر عن الحدين الاولين الى نهاية أقل من نهاية مجموع حدود المتوالية الهندسية اعنى أقل من الواحد وحينئذ يميل المجموع الكلى الى نهاية محصورة بين ٢ و ٣

وهذه النهاية تكون عددا أصم لاننا اذا فرضنا انها تساوى كسرا اعتياديا مثل $\frac{\text{م}}{\text{ه}}$ يكون

$$\frac{\text{م}}{\text{ه}} = ١ + \frac{١}{١} + \frac{١}{١\times٢} + \frac{١}{١\times٢\times٣} + \cdots\cdots$$

فاذا كتبنا فى اول الامر الحدود الاول التى عددها ه + ١ ثم وضعنا الحدود التالية بالصورة

$$\frac{١}{١\times٢\times٣\cdots\times\text{ه}}\left\{\frac{١}{\text{ه}+١} + \frac{١}{(\text{ه}+١)(\text{ه}+٢)} + \cdots\cdots\right\}$$

نجد أن

$$\frac{\text{م}}{\text{ه}} = ١ + \frac{١}{١} + \frac{١}{١\times٢} + \frac{١}{١\times٢\times٣} + \cdots\cdots + \frac{١}{١\times٢\times٣\cdots\times\text{ه}}$$
$$+ \frac{١}{١\times٢\cdots\times\text{ه}}\left\{\frac{١}{\text{ه}+١} + \frac{١}{(\text{ه}+١)(\text{ه}+٢)} + \cdots\cdots\right\}$$

وبضرب طرفى هذه المتساوية فى الحاصل ١×٢×٣....×ه يؤول الطرف الاول الى عدد صحيح وهو ١×٢×٣.... (ه-١) م وتؤول كذلك الحدود الاول التى عددها ه+١ من الطرف الثانى الى اعداد صحيحة نرمز لمجموعها لاجل الاختصار بحرف ح واذن توجد المتساوية

$$١\times٢\cdots(\text{ه}-١)\text{م} = \text{ح} + \left\{\frac{١}{\text{ه}+١} + \frac{١}{(\text{ه}+١)(\text{ه}+٢)} + \cdots\right\}$$

والكمية التى بين الحافظتين كسر أقل من الواحد لان جميع حدودها أقل على التناظر من حدود المتوالية

$$\frac{١}{\text{ه}+١} + \frac{١}{(\text{ه}+١)^{٢}} + \frac{١}{(\text{ه}+١)^{٣}} + \cdots\cdots$$

التى يحصل عليها بوضع كل من العوامل ه+٢ و ه+٣ و ... الخ بالعامل

الاصغر وهو ن+١ ولاشك ان بذلك تزيد الكسور وحيث ان نهاية مجموع حدود هذه المتوالية هي $\frac{1}{ن}$ فتكون الكمية التي بين الحافظتين أقل من $\frac{1}{ن}$ واذن تكون كسرا أقل من الواحد ويتوصل حينئذ بواسطة المتساوية السابقة لى مساواة عدد صحيح لكسر اقل من الواحد وهذا مستحيل ويعلم من ذلك ان نهاية مجموع حدود المتسلسلة المفروضة يكون عددا أصما محصورا بين ٢ و ٣ وهذا العدد كثير الاستعمال في العلوم الرياضية ويرمز له عادة بحرف هـ

بند ٦٧ (الخطأ الواقع) لنرمز بحرف ر لباقي المتسلسلة اي للخطأ الذي يقع متى اخذت الحدود الاول التي عددها ن+١ فيكون

$$ر = \frac{1}{1\times2\times3\times\cdots\times ن}\left\{\frac{1}{ن+1} + \frac{1}{(ن+1)(ن+2)} + \cdots\cdots\right\}$$

وحيث كانت الكمية التي بين الحافظتين أقل من $\frac{1}{ن}$ كما تقرر فيكون

$$ر < \frac{1}{ن} \cdot \frac{1}{1\times2\times3\times\cdots\times ن}$$

ويعلم من ذلك انه متى اخذت حدود عددها ن+١ يكون الخطأ الواقع اقل من الجزء النوني لآخر حد محسوب

وهاك حساب هـ بسبعة أرقام اعشارية

$$
\begin{aligned}
&2.00000000\\
&0.50000000 = \frac{1}{1\times2}\\
&0.16666667 = \frac{1}{1\times2\times3}\\
&0.04166667 = \frac{1}{1\times2\times3\times4}\\
&0.00833333 = \frac{1}{1\times2\times3\times4\times5}\\
&0.00138889 = \frac{1}{1\times2\times3\times4\times5\times6}\\
&0.00019841 = \frac{1}{1\times2\times3\times4\times5\times6\times7}\\
&0.00002480 = \frac{1}{1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8}\\
&0.00000276 = \frac{1}{1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9}\\
&0.00000028 = \frac{1}{1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9\times10}\\
&0.00000003 = \frac{1}{1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9\times10\times11}\\
\hline
&2.71828184
\end{aligned}
$$

والحدود

والحدود تستنتج بعضها من بعض بعمليات تقاسيم متوالية فقد أخذنا الاثنى عشر حدا الاول منها الثلاثة الاول مضبوطة وحسبنا الحدود الاخر بسبعة أرقام اعشارية بالقلة أو بالزيادة بحيث يكون الخطأ الواقع في كل منها أقل من نصف واحد من الرتبة الثامنة الاعشارية وقد حسبت ستة حدود بالزيادة وثلاثة بالقلة وغير ذلك يكون مجموع الحدود المهملة أقل من جزء من ١١ جزءا من آخر حد محسوب وبناء على ذلك يكون كذلك أقل من نصف واحد من الرتبة الثامنة الاعشارية وحينئذ لاجل تصحيح المجموع المتحصل يلزم نقصه بكمية أقل من ٣ آحاد من الرتبة الثامنة الاعشارية وزيادته بكمية أقل من وحدتين من الرتبة المذكورة وحينئذ يكون

ه > ٢٫٧١٨٢٨١٨١ و

ه < ٢٫٧١٨٢٨١٨٦

وحينئذ يكون

ه = ٢٫٧١٨٢٨١٨

بخطأ بالقلة وسبعة أرقام اعشارية مضبوطة

بند ٦٨ (تنبيهان) الاول نهاية مجموع عدة كميات متغيرة محدودة العدد يساوى مجموع نهاياتها

ولاثبات ذلك نعتبر كميات متغيرة عددها م مثل حـ$_1$، ء$_1$، هـ$_1$، ....، ل$_1$ تميل على التناظر الى النهايات حـ، ء، هـ، ....، ل ونرمز بالحروف حـَ، ءَ، هـَ، ....، لَ لفروق الكميات المتغيرة المفروضة عن نهاياتها فيكون

حـ$_1$ = حـ + حـَ ،

ء$_1$ = ء + ءَ ،

هـ$_1$ = هـ + هـَ ،

. . . . ،

. . . . ،

ل$_1$ = ل + لَ

وبجمع هذه المتساويات على بعضها والرمز بحرف ع لمجموع الكميات المتغيرة وبحرف عَ لمجموع النهايات يكون

$$\text{غ} = \text{غَ} + (\text{حَ} + \text{ءَ} + \text{هَ} + \cdots + \text{لَ})$$

فاذا رمزنا بحرف ح للاقدار المطلق لاكبر الفروق حَ , ءَ , هَ , ... , لَ يصير مجموعها أقل من م ح وحيث ان العدد م يبقى محدودا والكمية ح يمكن ان تصير أقل من كل كمية معلومة حيث ان جميع الفروق تميل الى الصفر فيصير الحاصل م ح أصغر كذلك من كل كمية معلومة واذن يميل المجموع ع الى النهاية غَ

(الثانى) نهاية حاصل ضرب عدة عوامل متغيرة محدودة العدد تساوى حاصل ضرب نهايات هذه العوامل

لانه اذا استعملت الرموز المتقدمة يكون

$$\text{ح}_1 - \text{ح} = \text{حَ} \ ,$$
$$\text{ء}_1 - \text{ء} = \text{ءَ} \ ,$$
$$\text{ه}_1 - \text{ه} = \text{هَ} \ ,$$
$$\cdots\cdots \ ,$$
$$\cdots\cdots \ ,$$
$$\text{ل}_1 - \text{ل} = \text{لَ}$$

وبضرب طرفى المتساوية الاولى فى $\text{ء}_1 \text{ه}_1 \ldots \text{ل}_1$ وطرفى المتساوية الثانية فى $\text{ح} \text{ه}_1 \ldots \text{ل}_1$ وطرفى الثالثة فى $\text{ح} \text{ء} \ldots \text{ل}_1$ وطرفى الاخيرة فى $\text{ح} \text{ء} \text{ه} \ldots \text{ك}$ يكون

$$\text{ح}_1 \text{ء}_1 \text{ه}_1 \ldots \text{ل}_1 - \text{ح} \text{ء}_1 \text{ه}_1 \ldots \text{ل}_1 = \text{حَ} \text{ء}_1 \text{ه}_1 \ldots \text{ل}_1 \ ,$$
$$\text{ح} \text{ء}_1 \text{ه}_1 \ldots \text{ل}_1 - \text{ح} \text{ء} \text{ه}_1 \ldots \text{ل}_1 = \text{ءَ} \text{ح} \text{ه}_1 \ldots \text{ل}_1 \ ,$$
$$\text{ح} \text{ء} \text{ه}_1 \ldots \text{ل}_1 - \text{ح} \text{ء} \text{ه} \ldots \text{ل}_1 = \text{هَ} \text{ح} \text{ء} \ldots \text{ل}_1 \ ,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\text{ح} \text{ء} \text{ه} \ldots \text{ك} \text{ل}_1 - \text{ح} \text{ء} \text{ه} \ldots \text{ك} \text{ل} = \text{لَ} \text{ح} \text{ء} \ldots \text{ك}$$

فاذا جمعت جميع هذه المتساويات على بعضها تلاشى الكميات المتوسطة ويوجد أن

$$\text{ح}_1 \text{ء}_1 \text{ه}_1 \ldots \text{ل}_1 - \text{ح} \text{ء} \text{ه} \ldots \text{ل} = \text{حَ} \text{ء}_1 \text{ه}_1 \ldots \text{ل}_1 + \text{ءَ} \text{ح} \text{ه}_1 \ldots \text{ل}_1 + \cdots\cdots$$

وحيث

وحيث كانت المقادير المطلقة للكميات المتغيرة وهى ح و ء و هـ و ... و ل أقل من عدد موجب ثابت مثل م فيكون المقدار المطلق لكل من حدود الطرف الثانى أقل من ح م$^{م-١}$ وحينئذ يكون المقدار المطلق للطرف الثانى أقل من م ح م$^{م-١}$ أعنى أقل من حاصل ضرب العدد المحدود م م$^{م-١}$ فى الكمية ح التى تميل الى الصفر واذن يصير هذا المقدار أصغر من كل كمية معلومة ويتنتج من ذلك ان حاصل الضرب ح ء هـ ... ل يميل الى النهاية ح ء هـ ... ل

الا انه يقتضى لاجل ان تكون هاتين الخاصتين صحيحتين ان يكون عدد أجزاء المجموع او عدد عوامل حاصل الضرب محدودا مثلا ليكن مجموع الكميات التى عددها م وهو

$$\frac{ح}{م}+\frac{ح}{م}+\dots+\frac{ح}{م}$$

فكل كمية منها تميل الى الصفر عندما يزيد م الى مالانهاية لكن حيث ان عدد الاجزاء يصير كبيرا كبرا لانهائيا فلا يمكن ان يقال ان نهاية المجموع تساوى مجموع نهايات أجزائه واستنتاج ان هذه النهاية صفر وفى الواقع ان هذا المجموع يساوى ح وكذلك المقدار الجبرى $(١+\frac{١}{م})^{م}$ الذى فيه م عدد صحيح يدل على حاصل ضرب عوامل عددها م كل منها يساوى ١ + $\frac{١}{م}$ كل من هذه العوامل يميل الى الواحد متى زاد م الى مالانهاية ونهاية حاصل الضرب المذكور لا تساوى حاصل ضرب نهايات عوامله أعنى لا تساوى واحدا لان عدد العوامل يصير لانهائيا

(المبحث الخامس)

فى نهاية $(١+\frac{١}{م})^{م}$ متى زاد م الى مالانهاية

بند (بيان ان المقدار $(١+\frac{١}{م})^{م}$ له نهاية متى زاد م الى مالانهاية) لاجل اثبات وجود هذه النهاية نحلل $(١+\frac{١}{م})^{م}$ بموجب قانون ذات الحدين فنجد أن

$$(١+\frac{١}{م})^{م}=١+م\frac{١}{م}+\frac{م(م-١)}{١\times٢}\frac{١}{م^{٢}}+\frac{م(م-١)(م-٢)}{١\times٢\times٣}\frac{١}{م^{٣}}+\dots$$

$$+\frac{م(م-١)\dots(م-ن+١)}{١\times٢\times\dots\times ن}\frac{١}{م^{ن}}+\dots$$

وحيث ان عدد عوامل بسط كل حد مساو لعدد العوامل المساوية م والتى تدخل فى المقام كمقاسيم عليه فيمكننا ان نكتب

$$\left(1+\frac{1}{\text{م}}\right)^{\text{م}}=1+\frac{1}{1}+\frac{\frac{\text{م}}{\text{م}}\times\frac{\text{م}-1}{\text{م}}}{1\times 2}+\frac{\frac{\text{م}}{\text{م}}\times\frac{\text{م}-1}{\text{م}}\times\frac{\text{م}-2}{\text{م}}}{1\times 2\times 3}+\cdots$$

$$+\frac{\frac{\text{م}}{\text{م}}\times\frac{\text{م}-1}{\text{م}}\cdots\frac{\text{م}-\text{ه}+1}{\text{م}}}{1\times 2\times\cdots\times \text{ه}}+\cdots\cdots$$

ومن الواضح ان

$$\frac{\text{م}}{\text{م}}\times\frac{\text{م}-1}{\text{م}}\times\frac{\text{م}-2}{\text{م}}\cdots\frac{\text{م}-\text{ه}+1}{\text{م}}=1\times\left(1-\frac{1}{\text{م}}\right)\left(1-\frac{2}{\text{م}}\right)\cdots\left(1-\frac{\text{ه}-1}{\text{م}}\right)$$

فاذن يكون

$$\left(1+\frac{1}{\text{م}}\right)^{\text{م}}=1+\frac{1}{1}+\frac{1-\frac{1}{\text{م}}}{1\times 2}+\frac{\left(1-\frac{1}{\text{م}}\right)\left(1-\frac{2}{\text{م}}\right)}{1\times 2\times 3}+\cdots$$

$$+\frac{\left(1-\frac{1}{\text{م}}\right)\left(1-\frac{2}{\text{م}}\right)\cdots\left(1-\frac{\text{ه}-1}{\text{م}}\right)}{1\times 2\times\cdots\times \text{ه}}+\cdots\cdots$$

اذا تقرر هذا فلنقارن هذا التحليل بالمتسلسلة التقاربية التى نهايتها ه وهى

$$\text{ه}=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{1\times 2\times 3}+\cdots\cdots+\frac{1}{1\times 2\times 3\cdots\times \text{ه}}+\cdots$$

فبالتأمل يرى ان كل حد من التحليل بالابتداء من الحد الثالث أقل من الحد المناظر له من المتسلسلة حيث ان بسطه أقل من الواحد والمقامين متحدان وغير ذلك يرى ان عدد حدود التحليل محدود وهو م + ١ بخلاف حدود المتسلسلة فانها غير محدودة العدد وينتج من ذلك ان المقدار الجبرى $\left(1+\frac{1}{\text{م}}\right)^{\text{م}}$ يكون مهما كان م أقل من ه واذن يكون لهذا المقدار الجبرى الذى يزيد بزيادة م نهاية متى زاد م الى مالانهاية وهذه النهاية لا يمكن ان تكون الا أقل من ه أو مساوية ه ولنثبت على ان هذه النهاية تساوى ه فنقول

بشد (نهاية $\left(1+\frac{1}{\text{م}}\right)^{\text{م}}$ متى زاد م الى مالانهاية مع بقائه صحيحا) حيث ان المتسلسلة ه تقاربية (بشد) فيمكن اعطاء ه مقدارا كبيرا كبرا كافيا بحيث يكون الخطأ الذى يقع اذا أهملت جميع الحدود التالية للحد الذى رتبته (ه + ١) أقل من كمية معلومة ك مهما كان صغرها بحيث اذا رمز بالرمز ه لمجموع الحدود الاول التى عددها (ه + ١) يكون

ه

$$ه - ه_{ن} < ل$$

ومن جهة اخرى اذا اعتبرت الحدود الاول التى عددها (م + ١) من التحليل يعلم انه بمجرد ما يزيد م الى مالانهاية مع بقاء ن ثابتا تميل البسوط المختلفة الى نهاية مساوية للوحدة واذن تكون نهاية كل حد من حدود التحليل هى الحد المناظر له من $ه_{ن}$ وتكون نهاية مجموعها المركب من حدود محدودة العدد هى $ه_{ن}$ واذن يمكن أخذ م كبيرا كبرا كافيا بحيث انه اذا رمز بالرمز $ح_{ن}$ لمجموع الحدود الاول التى عددها (ن + ١) من التحليل يكون

$$ه_{ن} - ح_{ن} < ل$$

ومن هاتين المتباينتين يستنتج أن

$$ه - ح_{ن} < ٢ ل$$

وحينئذ يمكن دائما بعد انتخاب مقدار ثابت الى ن وكبير كبرا كافيا استيفاء هذه المتباينة الاخيرة بازدياد م الى مالانهاية فاذا أعطيت بعد ذلك مقادير الى ن متزايدة الى مالانهاية يزيد التحليل $ح_{ن}$ ويميل الى نهايته $نها(١ + \frac{١}{م})^{م}$ ويميل ٢ ل الى الصفر واذن يكون

$$ه - نها(١ + \frac{١}{م})^{م} = ٠ \quad \text{أو}$$

$$نها(١ + \frac{١}{م})^{م} = ه$$

بند ٧١ (الحالة التى يأخذ فيها م مقادير كسرية) اذا أعطيت الى م فى المقدار الجبرى $(١ + \frac{١}{م})^{م}$ مقادير كسرية تأخذ فى الكبر شيأ فشيأ فان نهاية $(١ + \frac{١}{م})^{م}$ تكون كذلك مساوية ه ولاثبات ذلك نفرض انه بالرمز بحرف ن لعدد صحيح كبير جدا يكون

$$م = ن + ل$$

(ل كمية أقل من الواحد) فمن الواضح ان المقدار الجبرى $(١ + \frac{١}{م})^{م}$ يكون محصورا بين المقدارين الجبريين

$$(١ + \frac{١}{ن})^{ن+١} \quad , \quad (١ + \frac{١}{ن+١})^{ن}$$

لانه يلزم لاجل الحصول على أول هذين المقدارين الجبريين تعويض الحد $\frac{١}{م}$ والاس

م في $\left(1+\frac{1}{\text{م}}\right)^{\text{م}}$ على التناظر بالعددين الاكبر منهما وهما $\frac{1}{\text{ن}}$ و $(\text{ن}+1)$ ويلزم لأجل الحصول على المقدار الجبري الثاني تعويض الكميتين المذكورتين بالعددين الاصغر منهما وهما $\frac{1}{\text{ن}+1}$ و ن لكن

$$\left(1+\frac{1}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}+1}=\left(1+\frac{1}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}}\left(1+\frac{1}{\text{ن}}\right)$$

وكذلك

$$\left(1+\frac{1}{\text{ن}+1}\right)^{\text{ن}}=\left(1+\frac{1}{\text{ن}+1}\right)^{\text{ن}+1}\frac{1}{1+\frac{1}{\text{ن}+1}}$$

وحيث ان ن صحيح وكبير جدا فلا يختلف $\left(1+\frac{1}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}}$ و $\left(1+\frac{1}{\text{ن}+1}\right)^{\text{ن}+1}$ عن هـ الا بكمية صغيرة جدا ولا يختلف $1+\frac{1}{\text{ن}}$ و $1+\frac{1}{\text{ن}+1}$ عن الوحدة الا بكمية صغيرة جدا وتكون نهاية كل من المقدارين الجبريين المتقدمين هي هـ وبناء عليه تكون نهاية المقدار الجبري $\left(1+\frac{1}{\text{م}}\right)^{\text{م}}$ المحصور بينهما هي هـ كذلك

بند ٧٢ (نهاية $\left(1+\frac{1}{\text{م}}\right)^{\text{م}}$ متى كان م سالبا وزاد مقداره المطلق الى مالانهاية)

نهاية $\left(1+\frac{1}{\text{م}}\right)^{\text{م}}$ تساوي هـ كذلك اذا أعطيت الى م مقادير سالبة ومقاديرها المطلقة آخذة في الزيادة الى مالانهاية ولاثبات ذلك نضع م = − و ويكون

$$\left(1+\frac{1}{\text{م}}\right)^{\text{م}}=\left(1-\frac{1}{\text{و}}\right)^{-\text{و}}=\left(\frac{\text{و}-1}{\text{و}}\right)^{-\text{و}}=\left(\frac{\text{و}}{\text{و}-1}\right)^{\text{و}}=\left(1+\frac{1}{\text{و}-1}\right)^{\text{و}}$$

$$=\left(1+\frac{1}{\text{و}-1}\right)^{\text{و}-1}\left(1+\frac{1}{\text{و}-1}\right)$$

ويشاهد انه متى زاد و الى مالانهاية يميل $\left(1+\frac{1}{\text{و}-1}\right)^{\text{و}-1}$ الى هـ (بند ٧١) ويميل $\left(1+\frac{1}{\text{و}-1}\right)$ الى الواحد وبناء على ذلك يكون

$$\text{هـ}=\text{نها}\left(1+\frac{1}{\text{م}}\right)^{\text{م}}$$

بند ٧٣ (نهاية $\left(1+\frac{1}{\text{م}}\right)^{-\text{م}}$ أو نهاية $\left(1-\frac{1}{\text{م}}\right)^{\text{م}}$ متى زاد م الى مالانهاية) من الواضح أن

$$\left(1+\frac{1}{\text{م}}\right)^{-\text{م}}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\text{م}}\right)^{\text{م}}}$$

وحينئذ

وحينئذ يكون

$$\text{نها}\left(1+\frac{1}{م}\right)^{-م}=\frac{1}{هـ}$$

وكذلك

$$\left(1-\frac{1}{م}\right)^{م}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{م-1}\right)^{م}}$$

وحينئذ يكون

$$\text{نها}\left(1-\frac{1}{م}\right)^{م}=\frac{1}{هـ}$$

(الفصل الرابع)

في الكسور المتسلسلة

(المبحث الاول)

تعاريف

بحث ٧٤ لنبدأ فى أوّل الامر ببيان كيف يتحصل على هذه الكسور المتسلسلة فنقول من المعلوم أن كل عدد منطق يمكن وضعه على صورة كسر اعتيادى $\frac{ب}{ب_1}$ فيه $ب$ و $ب_1$ عددان صحيحان فاذا قسم $ب$ على $ب_1$ ورمز للخارج الصحيح بحرف $ح_1$ وللباقى الاقل من المقسوم عليه بحرف $ب_2$ يكون

$$ب=ح_1ب_1+ب_2 \quad \text{أو} \quad \frac{ب}{ب_1}=ح_1+\frac{ب_2}{ب_1}=ح_1+\frac{1}{\left(\frac{ب_1}{ب_2}\right)}$$

واذا قسم $ب_1$ على $ب_2$ ورمز للخارج بحرف $ح_2$ وللباقى الاقل من $ب_2$ بحرف $ب_3$ يوجد كذلك أن

$$ب_1=ح_2ب_2+ب_3 \quad \text{أو} \quad \frac{ب_1}{ب_2}=ح_2+\frac{ب_3}{ب_2}=ح_2+\frac{1}{\left(\frac{ب_2}{ب_3}\right)}$$

فاذا وضع مقدار $\frac{ب_1}{ب_2}$ هذا فى المقدار الجبرى السابق يكون

با   ح   فى

$$\frac{م}{م_1} = ح_1 + \frac{1}{ح_2 + \frac{1}{\left(\frac{م_2}{م_3}\right)}}$$

وكذلك بقسمة $م_2$ على $م_3$ يوجد أن

$$م_2 = م_3 ح_3 + م_4 \quad \text{أو} \quad \frac{م_2}{م_3} = ح_3 + \frac{م_4}{م_3} = ح_3 + \frac{1}{\left(\frac{م_3}{م_4}\right)}$$

وإذن يكون

$$\frac{م}{م_1} = ح_1 + \frac{1}{ح_2} + \frac{1}{ح_3} + \frac{1}{\left(\frac{م_3}{م_4}\right)}$$

ومن اللزوم أن تنتهي العملية لأن سلسلة عمليات القسم هذه هي نفس سلسلة عمليات القسم التي تجري لأجل البحث عن القاسم المشترك الأعظم بين العددين $م$ و $م_1$ ولا يخفى أنه يتوصل بعد عمليات قسم محدودة العدد إلى باق معدوم فلنفرض مثلاً أن

$$م_3 = م_4 ح_4 \quad \text{أو} \quad \frac{م_3}{م_4} = ح_4$$

فيؤل المقدار الجبري السابق إلى

$$\frac{م}{م_1} = ح_1 + \frac{1}{ح_2} + \frac{1}{ح_3} + \frac{1}{ح_4}$$

وهذا هو ما يسمى بالكسر المتسلسل وبموجب ما ذكر يمكن دائماً تحويل أي عدد منطق إلى كسر متسلسل

بحث ٧٥ د وليكن الآن $س$ عدداً أصماً حقيقياً اتفق فيفرض أن جزءه الصحيح هو $ح_1$ يكون $س = ح_1 + \frac{1}{س_1}$ و $س_1$ عدد أصم أكبر من الواحد وبالرمز للجزء الصحيح للعدد $س_1$ بحرف $ح_2$ يوجد كذلك أن

$س_1$

$س_١ = ح_٢ + \frac{1}{س_٢}$ و $س_٢$ عدد أصم كذلك أكبر من الواحد فاذا عوّض $س_١$ بمقداره في مقدار س يكون

$$س = ح_١ + \cfrac{1}{ح_٢ + \cfrac{1}{س_٢}}$$

وبالرمز بحرف $ح_٣$ للجزء الصحيح للعدد $س_٢$ يوجد كذلك أن $س_٢ = ح_٣ + \frac{1}{س_٣}$ و $س_٣$ عدد أصم كذلك أكبر من الواحد وحينئذ يكون

$$س = ح_١ + \cfrac{1}{ح_٢ + \cfrac{1}{ح_٣ + \cfrac{1}{س_٣}}}$$

وبادامة العمل بهذه الكيفية الى ما لا نهاية يتحصل كسر متسلسل غير منته والاعداد الصحيحة $ح_١$ و $ح_٢$ و $ح_٣$ و ... الخ التي يتركب منها الكسر المتسلسل يمكن ان تكون جميعها مساوية للواحد أو أكبر منه ماعدا الاول فانه يمكن ان يكون مساويا للصفر وهذه الاعداد تسمى خوارج غير تامة والاعداد الكسرية $ح_١ + \frac{1}{س_١}$ و $ح_٢ + \frac{1}{س_٢}$ و $ح_٣ + \frac{1}{س_٣}$ و ... الخ تسمى خوارج تامة والكسور $\frac{1}{ح_٢}$ و $\frac{1}{ح_٣}$ و $\frac{1}{ح_٤}$ و ... الخ تسمى كسورا مكملة

بند ٧٦ (الآيلات) لنعتبر الكسر المتسلسل وهو

$$س = ح_١ + \cfrac{1}{ح_٢ + \cfrac{1}{ح_٣ + \cdots + \cfrac{1}{ح_ن}}}$$

فالمقادير المقرّبة المتوالية الى س التي تسمى آيلات هي

$$ح_١ ،\quad ح_١ + \frac{1}{ح_٢} ،\quad ح_١ + \cfrac{1}{ح_٢ + \cfrac{1}{ح_٣}} ،\quad ح_١ + \cfrac{1}{ح_٢ + \cfrac{1}{ح_٣ + \cfrac{1}{ح_٤}}} ،\ \ldots$$

ويتحصل عليها بأخذ خوارج غير تامة بعدد ما على التوالي من ابتداء الحد الاول واهمال الخوارج الغير التامة التالية

والآيلات تكون على التعاقب أصغر وأكبر من س

لانه من الواضح ان $ح_١$ يكون أقل من س إذ انه يلزم لاجل تكميل س ان يضاف كسر موجب ويكون $ح_١ + \frac{١}{ح_٢}$ أكبر إذ انه يلزم لاجل تكميله ان يزاد الخارج الغير التام $ح_٢$ ويكون

$$ح_١ + \cfrac{١}{ح_٢ + \cfrac{١}{ح_٣}}$$

أصغر لانه يلزم لاجل تكميله ان يزاد $ح_٣$ أي ينقص المقام $ح_٢ + \frac{١}{ح_٣}$ أي يزاد مقدار س ويكون

$$ح_١ + \cfrac{١}{ح_٢ + \cfrac{١}{ح_٣ + \cfrac{١}{ح_٤}}}$$

أكبر اذ انه يلزم لاجل تكميله ان يزاد $ح_٣$ وبناء على ذلك ان ينقص $ح_٣ + \frac{١}{ح_٣}$ أي يزاد مقام الكسر

$$\cfrac{١}{\left(ح_٢ + \cfrac{١}{ح_٣ + \cfrac{١}{ح_٤}}\right)}$$

الذي يضاف الى $ح_١$ أي ينقص هذا الكسر

ومن المعلوم انه يمكن ادامة هذا البرهان الى مالانهاية

(المبحث الثانى)
فى خواص الآيلات

بند ٧٧ (تركيب الآيلات) حساب الآيلات بسيط جدا فالآيلة الاولى هى $ح_١$ أو $\frac{ح_١}{١}$ والآيلة الثانية هى

$$ح_١ + \frac{١}{ح_٢} = \frac{ح_١ ح_٢ + ١}{ح_٢}$$

ولايجاد الآيلة الثالثة يكفى تعويض $ح_٢$ فى الثانية بالعدد الكسرى $ح_٢ + \frac{١}{ح_٣}$ واذن تكون هذه الآيلة الثالثة هى

$ح_١$

$$\frac{ح_١\left(ح_٢+\frac{١}{ح_٣}\right)+١}{ح_٢+\frac{١}{ح_٣}}=\frac{ح_٣(ح_١ح_٢+١)+ح_١}{ح_٢ح_٣+١}$$

ويشاهد انه يتحصل على بسط الآيلة الثالثة بواسطة بسطى الآيلتين السابقتين لها بضرب بسط الآيلة الثانية فى الخارج الغير التام $ح_٣$ الذى يوقف الكسر المتسلسل به واضافة بسط الآيلة الاولى الى الناتج وان مقامها يتكون كذلك بواسطة مقامى الآيلتين السابقتين لها بضرب مقام الآيلة الثانية فى نفس الخارج الغير التام $ح_٣$ واضافة مقام الآيلة الاولى الى الناتج

وهذا القانون عمومى ولنثبت انه اذا كان حقيقيا فى آيلة برتبة حيثما اتفق يكون حقيقيا كذلك فى الآيلة التالية لها فنقول

لنفرض ان الآيلة التى رتبتها ه هى $\frac{ع_ه}{ك_ه}$ ونفرض أن

$$ع_ه=ع_{ه-١}\,ح_ه+ع_{ه-٢}$$

وأن

$$ك_ه=ك_{ه-١}\,ح_ه+ك_{ه-٢} \qquad (١)$$

فاذا عوّض $ح_ه$ فى المقدار الجبرى وهو

$$\frac{ع_ه}{ك_ه}=\frac{ع_{ه-١}\,ح_ه+ع_{ه-٢}}{ك_{ه-١}\,ح_ه+ك_{ه-٢}}$$

بالعدد الكسرى وهو $ح_ه+\frac{١}{ح_{ه+١}}$ يتحصل مقدار الآيلة التالية ويكون

$$\frac{ع_{ه+١}}{ك_{ه+١}}=\frac{ع_{ه-١}\left(ح_ه+\frac{١}{ح_{ه+١}}\right)+ع_{ه-٢}}{ك_{ه-١}\left(ح_ه+\frac{١}{ح_{ه+١}}\right)+ك_{ه-٢}}=\frac{(ع_{ه-١}\,ح_ه+ع_{ه-٢})\,ح_{ه+١}+ع_{ه-١}}{(ك_{ه-١}\,ح_ه+ك_{ه-٢})\,ح_{ه+١}+ك_{ه-١}}$$

اعنى أن

$$\frac{ع_{ه+١}}{ك_{ه+١}}=\frac{ع_ه\,ح_{ه+١}+ع_{ه-١}}{ك_ه\,ح_{ه+١}+ك_{ه-١}} \qquad (٢)$$

ومن ذلك تنتج هذه القاعدة وهى

لاجل تكوين بسط أى آيلة يضرب بسط الآيلة السابقة لها فى الخارج الغير التام الموقوف لحده الكسر المتسلسل ويضاف للناتج بسط الآيلة السابقة لها برتبتين

ولاجل تكوين مقامها يضرب مقام الآيلة السابقة لها فى الخارج الغير التام المذكور ويضاف للناتج مقام الآيلة السابقة لها برتبتين

بـ٧٧ـد (نظرية اولى) اذا ركبت الآيلات بموجب القاعدة المتقدمة وفرض ان $\frac{ح_{ه}}{ك_{ه}}$ هى الآيلة التى رتبتها ه اقول ان

$$ح_{ه}\,ك_{ه-1} - ك_{ه}\,ح_{ه-1} = (-1)^{ه}$$

لانه قد علم أن

$$ح_{ه} = ح_{ه-1}\,خ_{ه} + ح_{ه-2} \quad , \quad ك_{ه} = ك_{ه-1}\,خ_{ه} + ك_{ه-2}$$

فبجمع هاتين المتساويتين على بعضهما بعد ضرب الاولى فى $ك_{ه-1}$ والثانية فى $-ح_{ه-1}$ يوجد أن

$$ح_{ه}\,ك_{ه-1} - ك_{ه}\,ح_{ه-1} = -(ح_{ه-1}\,ك_{ه-2} - ك_{ه-1}\,ح_{ه-2})$$

ويعلم من ذلك ان الكمية $ح_{ه}\,ك_{ه-1} - ك_{ه}\,ح_{ه-1}$ تكون ثابتة المقدار الرقمى مهما كان ه الا ان اشارتها تتغير متى زيد ه بواحد وينتج من ذلك ان الكمية

$$(-1)^{ه}\,(ح_{ه}\,ك_{ه-1} - ك_{ه}\,ح_{ه-1})$$

لاتتغير مهما كان ه لكن متى كان ه = ٢ تكون هذه الكمية مساوية +١ واذن مهما كان ه يكون

$$ح_{ه}\,ك_{ه-1} - ك_{ه}\,ح_{ه-1} = (-1)^{ه} \qquad (٣)$$

وهو المطلوب

(نتيجة اولى) كل آيلة مثل $\frac{ح_{ه}}{ك_{ه}}$ تكون كسرا لايمكن اختصاره

لانه يتضح من المتساوية (٣) انه لايمكن ان يوجد قاسم مشترك للعددين $ح_{ه}$ و $ك_{ه}$

خلاف

خلاف الواحد وهذه الخاصية هى السبب فى تسمية الكسور المماثلة للكسر $\frac{ع_ه}{ك_ه}$ بالآيلات

(نتيجة ثانية) المقدار المطلق للفرق بين أى آيلتين متواليتين يساوى كسرا بسطه الواحد ومقامه حاصل ضرب مقامى الآيلتين المذكورتين

لانه اذا قسم طرفا المتساوية (٣) المتقدمة على الحاصل $ك_ه ك_{ه-1}$ يوجد أن

$$\frac{ع_ه}{ك_ه} - \frac{ع_{ه-1}}{ك_{ه-1}} = \frac{(-1)^ه}{ك_ه ك_{ه-1}} \qquad (٤)$$

ويعلم من ذلك ان هذا الفرق يأخذ دائما فى النقص وانه يكون موجبا أو سالبا على التعاقب وأن اى آيلة زوجية الرتبة تكون أكبر من الآيلة السابقة لها وان اى آيلة رتبة فردية تكون أصغر من الآيلة السابقة لها

بند ٧٨ (نظرية ثانية) المقدار المضبوط للكسر المتسلسل يكون محصورا بين اى آيلتين متواليتين وكل آيلة تقرب منه زيادة عن قرب الآيلة السابقة لها منه

ولاثبات ذلك نفرض أن $\frac{ع_ه}{ك_ه}$ الآيلة التى رتبتها ه وأن $س_ه$ الخارج التام المطابق فيكون

$$س = \frac{ع_ه س_ه + ع_{ه-1}}{ك_ه س_ه + ك_{ه-1}}$$

وبحل هذه المعادلة بالنسبة الى $س_ه$ يوجد أن

$$س_ه = \frac{ك_{ه-1} س - ع_{ه-1}}{ع_ه - ك_ه س} \quad \text{ومن هنا يكون} \quad \frac{ك_{ه-1}}{ك_ه} س_ه = \frac{س - \frac{ع_{ه-1}}{ك_{ه-1}}}{\frac{ع_ه}{ك_ه} - س}$$

ومن هذا القانون يتضح أولا أن الفرقين $س - \frac{ع_{ه-1}}{ك_{ه-1}}$ و $\frac{ع_ه}{ك_ه} - س$ يكونان متحدين فى الاشارة ومن هنا ينتج أن س يكون محصورا بين $\frac{ع_{ه-1}}{ك_{ه-1}}$ و $\frac{ع_ه}{ك_ه}$ وثانيا ان المقدار المطلق للفرق الثانى يكون أقل من المقدار المطلق للفرق الاول لان كلا من الكميتين

$\frac{ك_ه}{ك_{ه-1}}$ و $س_ه$ اللتين حاصل ضربهما يكون الطرف الاوّل من القانون السابق اكبر من الواحد

بند ٧٩ (نظرية ثالثة) اذا حوّلت كمية مّا س الى كسر متسلسل أقول ان الفرق بين أى آيلة حيثما اتفق ومقدار س يكون أقل من كسر بسطه الواحد ومقامه حاصل ضرب مقام الآيلة المعتبرة فى مقام الآيلة التالية لها

لانه بموجب النظرية الثانية يكون س محصورا بين الآيلتين $\frac{ح_{ه-1}}{ك_{ه-1}}$ و $\frac{ح_ه}{ك_ه}$ وبناء على ذلك يكون الفرق بين س و $\frac{ح_{ه-1}}{ك_{ه-1}}$ أقل من الفرق بين $\frac{ح_ه}{ك_ه}$ و $\frac{ح_{ه-1}}{ك_{ه-ح}}$ لكن بمقتضى النظرية الاولى (نتيجة ثانية) يكون هذا الفرق الاخير مساويا $\frac{(-1)^ه}{ك_{ه-1}\,ك_ه}$

وحينئذ اذا رمز بحرف ل لكمية محصورة بين الصفر والواحد يمكن كتابة

$$س - \frac{ح_{ه-1}}{ك_{ه-1}} = (-1)^ه \frac{ل}{ك_{ه-1}\,ك_ه}$$

(تنبيه) حيث ان $ك_ه$ أكبر من $ك_{ه-1}$ فيكون

$$س - \frac{ح_{ه-1}}{ك_{ه-1}} = (-1)^ه \frac{ل}{ك^2_{ه-1}}$$

ويتضح من هذا القانون الاخير انه اذا أخذت أى آيلة مقدارا مقربا بالكسر متسلسل يكون الخطأ الواقع أقل من خارج قسمة الواحد على مربع مقام هذه الآيلة

نتيجة اذا كانت الكمية س غير جذرية فانه يمكن دائما تكوين آيلة تختلف عن س بكمية أقل من كمية معلومة ى لانه لاجل أن يكون الفرق بين س والآيلة $\frac{ح_{ه-1}}{ك_{ه-1}}$ أقل من ى يكفى أن يكون

$$\frac{1}{ك^2_{ه-1}} < ى$$ ومن هنا يكفى أن يكون

$$ك_{ه-1} > \frac{1}{\sqrt{ى}}$$

وحيث

وحيث ان الاعداد الصحيحة $ك_{١}$ و $ك_{٢}$ و $ك_{٣}$ و ... الخ تزيد الى ما لا نهاية فيشاهد أن المتباينة السابقة تكون متحققة اذا أخذ مقدار ه كبيرا كبرا كافيا

بعد هذا نتصور أخذ أطوال و $م_{١}$ و $م_{٢}$ و $م_{٣}$ و ... الخ مساوية لمقادير الآيلات المتوالية على مستقيم و ل بالابتداء من نقطة ثابتة و فتكون الآيلة الثانية و $م_{٢}$ أكبر من الاولى و $م_{١}$



ولاجل الحصول على الآيلة الثالثة و $م_{٣}$ يلزم أن يطرح من و $م_{٢}$ طول $م_{١}م_{٢}$ أصغر من $م_{١}م_{٢}$ وحينئذ تكون النقطة $م_{٣}$ موجودة بين $م_{١}$ و $م_{٢}$ ولاجل الحصول على الآيلة الرابعة و $م_{٤}$ يلزم أن يضاف الى و $م_{٣}$ طول $م_{٣}م_{٤}$ أصغر من $م_{٣}م_{٢}$ وحينئذ تقع النقطة $م_{٤}$ بين النقطتين $م_{٢}$ و $م_{٣}$ وهلم جرا وينتج من ذلك ان الآيلات الفردية الرتب وهى و $م_{١}$ و $م_{٣}$ و ... الخ تأخذ فى الزيادة بخلاف الآيلات الزوجية الرتب وهى و $م_{٢}$ و $م_{٤}$ و ... الخ فانها تأخذ فى النقص وان كل آيلة من الآيلات الفردية الرتب تكون أقل من أى آيلة حيثما اتفق من الآيلات الزوجية الرتب فمتى كان الكسر المتسلسل غير منته تميل سلسلتا الآيلات الآخذة بعضها فى الزيادة والبعض الآخر فى النقص والتى يمكن أن يصير فرقها صغيرا بقدر ما يراد الى نهاية مشتركة و م وهذه النهاية هى المسماة مقدار الكسر المتسلسل

مثلا العدد ط الذى هو النسبة التقريبية بين المحيط وقطره يبين بهذا الكسر المتسلسل الغير المنتهى وهو

$$ط = ٣ + \frac{١}{٧} + \frac{١}{١٥} + \frac{١}{١} + \frac{١}{٢٩٢} + \ldots$$

الذى آيلاته المتوالية محسوبة بموجب ما تقدم هى ٣ و $\frac{٢٢}{٧}$ و $\frac{٣٣٣}{١٠٦}$ و $\frac{٣٥٥}{١١٣}$

و $\frac{103993}{33102}$ و ... الخ والآيلة الثانية هي المقدار الذي وجده ارشميدس وهو مقرب بخطا بالزيادة أقل من $\frac{1}{106\times7}$ أو أقل من $\frac{1}{700}$ والآيلة الرابعة هي المقدار الذي اعطاه متيوس وهو مقرب كذلك بخطا بالزيادة أقل من $\frac{1}{33102\times113}$ أو أقل من $\frac{1}{3000000}$

بند ٨١ (نظرية رابعة) كل كسر اعتيادي $\frac{\text{ء}}{\text{و}}$ قريب من مقدار الكسر المتسلسل زيادة عن قرب آيلة مثل $\frac{\text{ح}_{\text{ه}}}{\text{ك}_{\text{ه}}}$ منه يكون حداه أكبر على التناظر من حدى هذه الآيلة لان الكسر $\frac{\text{ء}}{\text{و}}$ يكون بالضرورة محصورا بين الآيلتين المتواليتين $\frac{\text{ح}_{\text{ه}-1}}{\text{ك}_{\text{ه}-1}}$ و $\frac{\text{ح}_{\text{ه}}}{\text{ك}_{\text{ه}}}$ فاذا كان ه زوجيا يكون

$$\frac{\text{ح}_{\text{ه}}}{\text{ك}_{\text{ه}}} < \frac{\text{ء}}{\text{و}} < \frac{\text{ح}_{\text{ه}-1}}{\text{ك}_{\text{ه}-1}}$$

واذن يكون

$$\frac{\text{ح}_{\text{ه}-1}}{\text{ك}_{\text{ه}-1}} - \frac{\text{ء}}{\text{و}} < \frac{\text{ح}_{\text{ه}-1}}{\text{ك}_{\text{ه}-1}} - \frac{\text{ح}_{\text{ه}}}{\text{ك}_{\text{ه}}}$$

اعني أن

$$\frac{\text{و ح}_{\text{ه}-1} - \text{ء ك}_{\text{ه}-1}}{\text{و ك}_{\text{ه}-1}} < \frac{1}{\text{ك}_{\text{ه}}\,\text{ك}_{\text{ه}-1}}$$

وحيث كان البسط الاول عددا صحيحا موجبا فيكون المقام الاول أكبر من المقام الثاني وبناء على ذلك يكون و أكبر من $\text{ك}_{\text{ه}}$ وباعتبار المتباينتين

$$\frac{\text{ك}_{\text{ه}-1}}{\text{ح}_{\text{ه}-1}} < \frac{\text{و}}{\text{ء}} < \frac{\text{ك}_{\text{ه}}}{\text{ح}_{\text{ه}}}$$

يثبت كذلك ان ء أكبر من $\text{ح}_{\text{ه}}$

(المبحث الثالث)

في الكسور المتسلسلة الدائرة والتحليل الغير المعين

بند ٨٢ (تعاريف) كل كسر متسلسل يدور فيه كسر أو عدة كسور مكملة على حسب رتبها يسمى كسرا متسلسلا دائرا ويقال له دائر بسيط اذا ابتدأ فيه الدور من ابتداء الكسر المكمل الاول وذلك مثل الكسر

$$٣+\cfrac{1}{١+\cfrac{1}{٢+\cfrac{1}{٣+\cfrac{1}{١+\cfrac{1}{٢+\cfrac{1}{٣+\cdots}}}}}}$$

ويقال له دائر مركب اذا لم يبتدئ الدور فيه من ابتداء الكسر المكمل الاول وذلك مثل

$$٠+\cfrac{1}{٢+\cfrac{1}{٤+\cfrac{1}{٣+\cfrac{1}{٦+\cfrac{1}{٧+\cfrac{1}{٣+\cfrac{1}{٦+\cfrac{1}{٧+\cdots}}}}}}}}$$

بند ٨٣ (تقدير الكسر المتسلسل الدائر البسيط) ليكن الكسر الدائر البسيط هو

$$\text{س}=\text{ح}_{١}+\cfrac{1}{\text{ح}_{٢}+\cfrac{1}{\text{ح}_{٣}+\cdots+\cfrac{1}{\text{ح}_{\text{هـ}}+\cfrac{1}{\text{ح}_{١}+\cfrac{1}{\text{ح}_{٢}+\cdots+\cfrac{1}{\text{ح}_{\text{هـ}}+\cfrac{1}{\text{ح}_{١}+\cfrac{1}{\text{ح}_{٢}+\cdots}}}}}}}}$$

فمن الواضح انه يكون

$$\text{س}=\text{ح}_{١}+\cfrac{1}{\text{ح}_{٢}+\cfrac{1}{\text{ح}_{٣}+\cdots+\cfrac{1}{\text{ح}_{\text{هـ}}+\cfrac{1}{\text{س}}}}}$$

ولتكن $\frac{\text{ع}_{\text{هـ}}}{\text{ك}_{\text{هـ}}}$ الآيلة التى تحصل بايقاف الكسر المتسلسل بآخر الدور الاول ولتكن $\frac{\text{ع}_{\text{هـ}-١}}{\text{ك}_{\text{هـ}-١}}$ و $\frac{\text{ع}_{\text{هـ}-٢}}{\text{ك}_{\text{هـ}-٢}}$ الآيلتين السابقتين لها فيكون

$$\frac{\text{ع}_{\text{هـ}}}{\text{ك}_{\text{هـ}}}=\frac{\text{ع}_{\text{هـ}-١}\,\text{ح}_{\text{هـ}}+\text{ع}_{\text{هـ}-٢}}{\text{ك}_{\text{هـ}-١}\,\text{ح}_{\text{هـ}}+\text{ك}_{\text{هـ}-٢}}$$

لكن من الواضح انه يلزم لاجل الحصول على الكسر التام س تغيير $\text{ح}_{\text{هـ}}$ فى $\frac{\text{ع}_{\text{هـ}}}{\text{ك}_{\text{هـ}}}$ بالكمية

$\text{حـ}_{ه} + \frac{1}{س}$ واذن يكون

$$س = \frac{ح_{ه-1}\left(\text{حـ}_{ه}+\frac{1}{س}\right)+ح_{ه-2}}{ك_{ه-1}\left(\text{حـ}_{ه}+\frac{1}{س}\right)+ك_{ه-2}} = \frac{\left(ح_{ه-1}\,\text{حـ}_{ه}+ح_{ه-2}\right)س+ح_{ه-1}}{\left(ك_{ه-1}\,\text{حـ}_{ه}+ك_{ه-2}\right)س+ك_{ه-1}}$$

$$= \frac{ح_{ه}\,س+ح_{ه-1}}{ك_{ه}\,س+ك_{ه-1}}$$

وبناء على ذلك يكون س جذر المعادلة ذات الدرجة الثانية وهى

$$ك_{ه}\,س^{2}+\left(ك_{ه-1}-ح_{ه}\right)س-ح_{ه-1}=0 \qquad (5)$$

التى معاملاتها أعداد صحيحة وجذراها مختلفان فى الاشارة

بـ٨٤ـد (تقدير الكسر المتسلسل الدائر المركب) ليكن الكسر الدائر المركب هو

$$س = \text{حـ}_{1}+\frac{1}{\text{حـ}_{2}}+\frac{1}{\text{حـ}_{3}}+\cdots+\frac{1}{\text{حـ}_{ه}}+\frac{1}{د_{1}}+\frac{1}{د_{2}}+\cdots+\frac{1}{د_{م}}+\frac{1}{د_{1}}+\frac{1}{د_{2}}+\cdots$$

وليكن

$$ص = \frac{1}{د_{1}}+\frac{1}{د_{2}}+\cdots+\frac{1}{د_{م}}+\frac{1}{د_{1}}+\cdots$$

فيكون

$$س = \text{حـ}_{1}+\frac{1}{\text{حـ}_{2}}+\frac{1}{\text{حـ}_{3}}+\cdots+\frac{1}{\text{حـ}_{ه}}+\frac{1}{ص}$$

فاذا فرض ان $\frac{ح_{ه-1}}{ك_{ه-1}}$ و $\frac{ح_{ه}}{ك_{ه}}$ هما الآيلتان اللتان يتحصل عليهما بايقاف الكسر المتسلسل بالكسرين المكاملين وهما $\frac{1}{\text{حـ}_{ه-1}}$ و $\frac{1}{\text{حـ}_{ه}}$ يكون

$س =$

$$\text{س} = \frac{\text{ح}_{\text{ن}}\,\text{ص} + \text{ح}_{\text{ن}-1}}{\text{أ}_{\text{ن}}\,\text{ص} + \text{أ}_{\text{ن}-1}} \qquad (٦)$$

وحيث انه يمكن حساب مقدار ص كما فى البند السابق فيمكن حينئذ حساب مقدار س مثلا ليكن

$$(\text{ل}) \qquad \text{س} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}$$

فبوضع

$$\text{ص} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}$$

يكون $\text{ص} = 2 + \frac{1}{\text{ص}}$

وبناء على ذلك يكون

$$\text{ص}^2 - 2\text{ص} - 1 = 0$$

واذن يكون $\text{ص} = 1 + \sqrt{2}$

وحينئذ يكون

$$\text{س} = 1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}}$$

والآيلات المتوالية للكسر (ل) هى

$$1 \text{ و } \frac{3}{2} \text{ و } \frac{7}{5} \text{ و } \frac{17}{12} \text{ و } \frac{41}{29} \text{ و } \frac{99}{70} \text{ و } \frac{239}{169} \text{ و } \ldots \text{ الخ}$$

وكل من هذه الكسور يقرب من $\sqrt{2}$ زيادة عن كل كسر حداه أقل ويكون الخطا الواقع بأخذ أى كسر منها أقل من خارج قسمة الواحد على حاصل ضرب مقامه فى مقام الكسر التالى

بند ٨٥ د (التحليل الغير المعين) لنفرض ان المطلوب ايجاد الحلول الصحيحة للمعادلة

$$\text{ح}\,\text{س} + \text{ء}\,\text{ص} = \text{ع} \qquad (٧)$$

ذات المجهولين س و ص والتى معاملاتها صحيحة فيمكن ان يفرض أن العددين ح و ء أوليان مع بعضهما لانه ان وجد بينهما قاسم مشترك اعظم مثل و وجب ان يكون هذا العدد و قاسما للكمية ع ولنحول الكسر $\frac{\text{ح}}{\text{ء}}$ الى كسر متسلسل ولتكن

$\frac{ح_{ن-١}}{ك_{ن-١}}$ الآيلة السابقة للآيلة الاخيرة فتكون الآيلة الاخيرة هى $\frac{ح}{ء}$ ويكون

$$ح\,ك_{ن-١} - ء\,ح_{ن-١} = (-١)^{ن}$$

وحينئذ اذا ضرب الطرفان فى $(-١)^{ن}$ ه يكون

$$ح\left\{(-١)^{ن}\,ك_{ن-١}\,ه\right\} + ء\left\{-(-١)^{ن}\,ح_{ن-١}\,ه\right\} = ه$$

وبذلك يعلم حل خصوصى للمعادلة وهو

$$س = (-١)^{ن}\,ك_{ن-١}\,ه \;،\; ص = -(-١)^{ن}\,ح_{ن-١}\,ه$$

ومتى علم حل $س = و$ ، $ص = ر$ يسهل الحصول على جميع الحلول الاخر لانه بسبب الارتباط $ح\,و + ء\,ر = ه$ تؤل المعادلة (٧) الى

$$ح(س-و) + ء(ص-ر) = ٠ \quad او \quad \frac{ص-ر}{س-و} = \frac{ح}{-ء}$$

وحينئذ يجب ان يكون حدا الكسر الاول مساويين على التناظر لحدى الكسر الثانى مضروبين فى عدد واحد وحينئذ اذا رمز بحرف ع لعدد صحيح اختيارى يكون

$$س-و = -ء\,ع \;،\; ص-ر = ح\,ع \qquad (٨)$$

فكل مقدار يعطى الى ع يحدث حلا للمعادلة

مثلا لتكن المعادلة

$$٢٦٦\,س - ١١٥\,ص = ٣$$

فبتحويل الكسر الاعتيادى $\frac{٢٦٦}{١١٥}$ الى كسر متسلسل يوجد هذا الكسر المتسلسل

$$٢ + \cfrac{١}{٣ + \cfrac{١}{٥ + \cfrac{١}{٧}}}$$

والآيلات المتوالية لهذا الكسر المتسلسل هى $\frac{٢}{١}$ و $\frac{٧}{٣}$ و $\frac{٣٧}{١٦}$ ، $\frac{٢٦٦}{١١٥}$ ويكون

$$٢٦٦ \times ١٦ - ١١٥ \times ٣٧ = ١$$

وتقبل المعادلة هذا الحل وهو

$$س = ١٦ \times ٣ \;،\; ص = ٣٧ \times ٣$$

وتكون الحلول المختلفة لهذه المعادلة مبينة بالقانونين

س =

$\text{س} = ٤٨ + ١١٥\text{ع}$ و $\text{ص} = ١١١ + ٢٦٦\text{ع}$

(الفصل الرابع)
(في اللوغاريتمات)

(المبحث الاول)
(في الدالة الاسية)

٨٦ بند (قاعدة أولى) القوى الصحيحة المتتالية لاى عدد أكبر من الواحد تأخذ في الزيادة بحيث تصير أكبر من كل كمية معلومة

وليكن ح عددا موجبا أكبر من الواحد فلاجل اثبات أن القوى المتتالية تأخذ في الزيادة يقال انه يحصل على $\text{ح}^{\text{م}+١}$ بضرب $\text{ح}^{\text{م}}$ في ح وحيث كان المضروب فيه وهو ح أكبر من الواحد فيكون الحاصل $\text{ح}^{\text{م}+١}$ أكبر من المضروب وهو $\text{ح}^{\text{م}}$ ولاجل اثبات ان قوى ح يمكن ان تزيد عن كل كمية معلومة نضع $\text{ح} = ١ + \text{ف}$ فبتحليل $(١+\text{ف})^{\text{م}}$ بموجب قانون ذات الحدين يكون

$$\text{ح}^{\text{م}} = (١+\text{ف})^{\text{م}} = ١ + \frac{\text{م}}{١}\text{ف} + \frac{\text{م}(\text{م}-١)}{١\times٢}\text{ف}^{٢} + \ldots\ldots$$

وتكون جميع حدود التحليل موجبة وحينئذ اذا اهمل الحد الثالث والحدود التالية له ينقص الطرف الثاني ويصير

$$\text{ح}^{\text{م}} > ١ + \text{ف}$$

ولاجل جعل $\text{ح}^{\text{م}}$ أكبر من كمية معلومة $\text{ح}_{١}$ يكفي جعل الكمية $١ + \text{م}\,\text{ف}$ أكبر من هذه الكمية واذن يعين الاس م بحيث تتحقق المتباينة

$$١ + \text{م}\,\text{ف} > \text{ح}_{١}$$

ومن هنا يكون

$$\text{م} > \frac{\text{ح}_{١}-١}{\text{ف}}$$

وحينئذ متى زاد الاس م عن $\frac{\text{ح}_{١}-١}{\text{ف}}$ تصير القوة $\text{ح}^{\text{م}}$ أكبر من الكمية $\text{ح}_{١}$ مهما كان كبر هذه الكمية ويعلم من ذلك ان القوى المتتالية للعدد ح الا كبر من الواحد تأخذ في الازدياد الى مالانهاية

مثلا ليكن ح = ١و١ فيمكن ان يتحقق من ان $\text{ح}^{\text{م}}$ تزيد عن ١٠٠٠ اذا كان م اكبر من $\frac{٩٩٩}{١و٠}$ واكبر من ٩٩٩٠

ب ٨٧ د (قاعدة ثانية) القوى الصحيحة المتتالية لاى عدد اصغر من الواحد تأخذ في النقص وتميل الى الصفر

لان اى عدد ح اصغر من الواحد يمكن بيانه بكسر $\frac{١}{\text{ح}}$ (ح عددا اكبر من الواحد)

واذن يكون $\text{ح}^{\text{م}} = \frac{١}{\text{ح}^{\text{م}}}$ وحينئذ متى زاد م الى مالانهاية فحيث ان المقام يزيد الى مالانهاية يتناقص الكسر ويميل الى الصفر

ب ٨٨ د (قاعدة ثالثة) جذور اى عدد اكبر من الواحد تكون اكبر من الواحد وتتناقص هذه الجذور وتميل الى الواحد كلما اخذ دليل الجذر في الازدياد

ولاثبات ذلك ننبه في اول الامر على انه متى كان عدد موجب ح اكبر من الواحد يكون جذره وهو $\text{ى} = \sqrt[\text{ه}]{\text{ح}}$ اكبر كذلك من الواحد لانه اذا كان العدد ى اقل من الواحد تكون قوته $\text{ى}^{\text{ه}}$ اقل من الواحد وبناء على ذلك لا تكون مساوية ح

اذا تقرر هذا واعتبرنا جذرين متواليين مثل

$$\text{ى} = \sqrt[\text{ه}]{\text{ح}} \quad , \quad \text{ى}' = \sqrt[\text{ه}+١]{\text{ح}}$$

اقول ان الجذر ى' اصغر من الجذر ى وذلك لان

$$\text{ى}^{\text{ه}} = \text{ى}'^{\,\text{ه}+١} = \text{ح}$$

واذن يكون

$$\text{ى}' = \left(\frac{\text{ى}}{\text{ى}'}\right)^{\text{ه}}$$

وحيث ان الجذر ى' اكبر من الواحد فتكون النسبة $\frac{\text{ى}}{\text{ى}'}$ اكبر كذلك من الواحد وبناء على ذلك يكون ى' اصغر من ى

ولنثبت الآن على انه يمكن جعل دليل الجذر كبيرا كبرا كافيا بحيث يزيد مقدار الجذر عن الواحد بكمية اقل من كمية معلومة ف صغيرة بقدر ما يراد فنقول ان مقدار دليل

دليل الجذر المذكور يجب ان يحقق المتباينة

$$\sqrt[ه]{ح} < ١ + ف$$

او

$$(١ + ف)^{ه} > ح$$

وبموجب النظرية الاولى يمكن دائما تعيين الاس ه بحيث تزيد القوة $(١ + ف)^{ه}$ عن العدد المعلوم ح مثلا اذا اريد ان يكون $\sqrt[ه]{٢}$ يخالف الواحد بكمية أقل من ٠٫٠٠١ يكفي جعل ه أكبر من $\frac{٢ - ١}{٠٫٠٠١}$ أعني أكبر من ١٠٠٠ وحينئذ متى زاد ه الى مالانهاية يميل $\sqrt[ه]{ح}$ الى الواحد

بند ٨٩ د (قاعدة رابعة) جذور أي عدد أصغر من الواحد تكون أصغر من الواحد وتزيد كلما زاد دليل الجذر وتميل الى الواحد

لاننا اذا وضعنا $ح = \frac{١}{ح'}$ (ح' عدداً أكبر من الواحد) يكون $\sqrt[ه]{ح} = \frac{١}{\sqrt[ه]{ح'}}$ فمتى زاد ه الى مالانهاية ينقص المقام وبناء على ذلك يزيد الكسر ويميل الى الواحد

(نتيجه) كل قوة كسرية لاى عدد أكبر من الواحد تكون أكبر من الواحد وكل قوة كسرية لاى عدد أصغر من الواحد تكون أصغر من الواحد

لان $ح^{\frac{م}{ه}}$ يدل على $\sqrt[ه]{ح^{م}}$ فاذا كان ح أكبر من الواحد تكون $ح^{م}$ أكبر من الواحد وبناء على ذلك يكون $\sqrt[ه]{ح^{م}}$ أكبر من الواحد

بند ٩٠ د (نظرية) الدالة $ح^{س}$ تتغير بكيفية مستمرة متى زاد س بكيفية مستمرة ولنعتبر في أول الامر الحالة التي يكون فيها العدد الموجب المعلوم ح أكبر من الواحد ولنثبت على أنه في هذه الحالة تزيد الدالة $ح^{س}$ عندما يزيد المتغير س وانها تزيد بكيفية مستمرة فنقول

اذا أعطيت للمتغير س زيادة موجبة هـ تؤول الدالة الى $ح^{س+هـ}$ وتزيد زيادة قدرها

$$ح^{س+هـ} - ح^{س} = ح^{س}(ح^{هـ} - ١)$$

لكن الكمية $ح^{هـ}$ أكبر من الواحد لان كل قوة كسرية موجبة لاى عدد ح أكبر من الواحد تكون أكبر من الواحد (بـ ٨٩ د) واذن يكون الفرق $ح^{سـ+هـ} - ح^{سـ}$ موجبا وبناء على ذلك تكون الكمية $ح^{سـ+هـ}$ أكبر من $ح^{سـ}$ ويعلم من ذلك ان الدالة $ح^{سـ}$ تزيد حينما يزيد المتغير سـ

ويمكن أخذ كسر $\frac{1}{ن}$ بحيث انه بجميع مقادير هـ الاصغر من $\frac{1}{ن}$ يصير الفرق $ح^{سـ+ح} - ح^{سـ}$ أصغر من كل كمية معلومة مهما كان صغرها لانه بموجب القاعدة الثالثة يمكن تعيين عدد صحيح ن كبير كبرا كافيا بحيث تزيد الكمية $ح^{\frac{1}{ن}}$ أى الجذر $\sqrt[ن]{ح}$ عن الواحد بكمية أقل من الكمية المعلومة $\frac{ف}{ح^{سـ}}$ لكن بموجب ما تقدم اذا كان الاس هـ أصغر من $\frac{1}{ن}$ تكون القوة $ح^{هـ}$ أصغر من $ح^{\frac{1}{ن}}$ وبناء على ذلك يكون الفرق $ح^{هـ} - 1$ أقل من $ح^{\frac{1}{ن}} - 1$ واذن يكون أقل من $\frac{ف}{ح^{سـ}}$ وحينئذ يكون

$$ح^{سـ} (ح^{هـ} - 1) < ف$$

أو

$$ح^{سـ+هـ} - ح^{سـ} < ف$$

ويعلم من ذلك انه بجميع مقادير هـ الاقل من $\frac{1}{ن}$ يكون تغير الدالة أقل من الكمية المعلومة ف أعنى ان الدالة المذكورة تكون مستمرة

ولنعتبر الآن الحالة التى يكون فيها العدد الموجب المعلوم ح أصغر من الواحد فاذا وضع $ح = \frac{1}{ح'}$ ($ح'$ عددا أكبر من الواحد) يكون

$$ح^{سـ} = \frac{1}{ح'^{سـ}}$$

فمتى زاد سـ بكيفية مستمرة يزيد $ح'^{سـ}$ وبناء على ذلك ينقص $ح^{سـ}$ بكيفية مستمرة

بـ ٩١ د (نتيجة) ولننظر الآن المقادير التى تمر بها الدالة $ح^{سـ}$ المسماة دالة أسية (لوجود المتغير فيها أسا) متى زيد سـ بكيفية مستمرة من $-\infty$ الى $+\infty$ ولذلك نفرض فى أول الامر ان العدد المعلوم ح أكبر من الواحد ثم نزيد سـ من الصفر الى $+\infty$ فمتى كان سـ = ٠

يكون

يكون $ح^{ن} = ١$ وبموجب القاعدة الاولى يمكن ان تصير القوى الصحيحة لعدد ح أكبر من كل كمية معلومة ويعلم من ذلك انه متى زاد سه من ابتداء الصفر الى $+\infty$ تزيد الدالة $ح^{سه}$ من ابتداء الواحد الى $+\infty$ واذا نقص الآن سه من الصفر الى $-\infty$ ولذلك نضع سه = −سَه (والمتغير الجديد سَه موجب) فيكون

$$ح^{سه} = \frac{1}{ح^{سَه}}$$

فمتى زاد سَه من ابتداء الصفر الى $+\infty$ يزيد $ح^{سَه}$ من الواحد الى $+\infty$ وبناء على ذلك ينقص $ح^{سه}$ من الواحد الى الصفر وبالجملة متى زاد المتغير سه بكيفية مستمرة من $-\infty$ الى $+\infty$ تزيد الدالة $ح^{سه}$ بكيفية مستمرة من ٠ الى $+\infty$ ومما ينبغي التنبيه عليه ان الدالة تمر بجميع المقادير الموجبة وانها لا تمر بكل من هذه المقادير الا مرة واحدة حيث انها تأخذ في الازدياد على الدوام والاستمرار

ولنفرض الآن ان العدد المعلوم ح أصغر من الواحد ولنضع كما تقدم $ح = \frac{1}{حَ}$ (حَ عدد أكبر من الواحد) فيكون

$$ح^{سه} = \frac{1}{حَ^{سه}}$$

فمتى زاد سه من ٠ الى $+\infty$ يزيد $حَ^{سه}$ من ١ الى $+\infty$ وبناء على ذلك ينقص $ح^{سه}$ من ١ الى ٠ ومتى نقص سه من ٠ الى $-\infty$ ينقص $حَ^{سه}$ من ١ الى ٠ وبناء على ذلك يزيد $ح^{سه}$ من ١ الى $+\infty$ ويعلم من ذلك انه متى زاد سه بكيفية مستمرة من $-\infty$ الى $+\infty$ تنقص الدالة $ح^{سه}$ بكيفية مستمرة من $+\infty$ الى ٠ وتمر الدالة ايضا بجميع المقادير الموجبة وتمر بكل منها مرة واحدة

بند ٩٢ (تعريف الدالة الاسية $ح^{سه}$ متى كان سه عددا اصما موجبا او سالبا) اذا علمت ما تقدم امكننا الآن أن نعرّف الدالة الاسية $ح^{سه}$ متى كان الاس سه اصما فنقول ان $ح^{سه}$ هي النهاية التي تميل اليها قوى حاسها المنطق يقرب شيأ فشيأ من سه فليكن ل٢ ولنفرض

ان العدد ح أكبر من الواحد فالعدد الاصم $\sqrt[ح]{٢}$ هو النهاية المشتركة لعددين كسريين $\frac{م}{ه}$ و $\frac{م+١}{ه}$ يختلفان عن بعضهما بكمية صغيرة بقدر مايراد ومربعاهما يحصران ٢ بينهما فيتعويض $\sqrt[ح]{٢}$ بهذين العددين المقربين تحصل سلسلتان من القوى الكسرية $ح^{\frac{م}{ه}}$ و $ح^{\frac{م+١}{ه}}$ الاولى منهما أصغر من الثانية وفرقهما يمكن جعله اصغر من كل كمية معلومة وحينئذ توجد بين هاتين السلسلتين كمية معينة هى نهايتهما المشتركة وهذه النهاية هى مايدل عليه $ح^{\sqrt{٢}}$

(المبحث الثانى)

(فى خواص اللوغاريتمات)

بـ٩٣د (تعريف اللوغاريتم) لوغاريتم عدد هو اس القوة التى يلزم رفع عدد موجب معلوم ح اليها ليحصل العدد المفروض وهذا العدد الثابت ح يسمى اساس الجملة اللوغاريتمية المطابقة له

وقد شاهدنا انه متى زاد س بكيفية مستمرة من − ∞ الى + ∞ تمر الدالة $ح^{س}$ بجميع المقادير الموجبة ولاتمر بكل منها الامرة واحدة وينتج من ذلك ان جميع الاعداد الموجبة لها لوغاريتمات وانه ليس لكل منها الالوغاريتم واحد فاذا كان العدد المعلوم ح اكبر من الواحد يكون للاعداد الاكبر من الواحد لوغاريتمات موجبة وللاعداد الاصغر من الواحد لوغاريتمات سالبة واذا كان العدد المعلوم اصغر من الواحد يكون للاعداد الاكبر من الواحد لوغاريتمات سالبة وللاعداد الاصغر من الواحد لوغاريتمات موجبة ولايكون للاعداد السالبة لوغاريتمات

ونرمز للوغاريتم العدد بالرمز لو فتى كان ص = $ح^{س}$ نقول ان الاس س هو لوغاريتم العدد ص ونكتب س = لو ص وحيث ان ص يتغير بكيفية مستمرة اذا تغير س فبالعكس أى يتغير س بكيفية مستمرة اذا تغير ص ويعلم من ذلك ان اللوغاريتم دالة مستمرة للعدد ص واذا اخذ الاساس ح اكبر من الواحد وزاد العدد ص من ٠ الى ١ ثم من ١ الى + ∞ يزيد اللوغاريتم س من − ∞ الى ٠ ثم من ٠ الى + ∞

وللوغاريتمات خواص شهيرة نذكرها فنقول

بند ٩٤ (نظرية اولى) لوغاريتم حاصل ضرب عدة عوامل يساوى مجموع لوغاريتمات هذه العوامل

ولاثبات ذلك نفرض عددين ص و $\text{ص}'$ ونفرض ان لوغاريتميهما س و $\text{س}'$ فبموجب تعريف اللوغاريتمات يكون

$$\text{ص} = \text{ح}^{\text{س}} \quad \text{و}$$
$$\text{ص}' = \text{ح}^{\text{س}'}$$

وبضرب هاتين المتساويتين فى بعضهما يوجد أن

$$\text{ص}\,\text{ص}' = \text{ح}^{\text{س} + \text{س}'}$$

فيشاهد ان الاس $(\text{س} + \text{س}')$ لوغاريتم الحاصل $\text{ص}\,\text{ص}'$ واذن يكون

$$\text{لو}\,(\text{ص}\,\text{ص}') = \text{لو}\,\text{ص} + \text{لو}\,\text{ص}'$$

وهذا الاثبات يمكن سلوكه مهما كان عدد العوامل لاننا اذا فرضنا ثلاثة اعداد ص و $\text{ص}'$ و $\text{ص}''$ لوغاريتماتها س و $\text{س}'$ و $\text{س}''$ يوجد كذلك أن

$$\text{ص} = \text{ح}^{\text{س}} \quad \text{و}$$
$$\text{ص}' = \text{ح}^{\text{س}'} \quad \text{و}$$
$$\text{ص}'' = \text{ح}^{\text{س}''}$$

واذن يكون

$$\text{ص}\,\text{ص}'\,\text{ص}'' = \text{ح}^{\text{س} + \text{س}' + \text{س}''}$$

وحينئذ يكون

$$\text{لو}\,(\text{ص}\,\text{ص}'\,\text{ص}'') = \text{لو}\,\text{ص} + \text{لو}\,\text{ص}' + \text{لو}\,\text{ص}''$$

وهو المطلوب

بند ٩٥ (نظرية ثانية) لوغاريتم خارج قسمة عددين يساوى لوغاريتم المقسوم ناقصا لوغاريتم المقسوم عليه

لاننا اذا قسمنا المتساويتين

$$\left\{\begin{array}{l} \text{ص} = \text{ح}^{\text{س}} \quad \text{و} \\ \text{ص}' = \text{ح}^{\text{س}'} \end{array}\right.$$

على بعضهما طرفا على طرف يكون

$$\frac{ص}{صَ} = ح^{سـ - سَ}$$

ويكون الفرق (سـ - سَ) هو لوغاريتم الخارج $\frac{ص}{صَ}$ وحينئذ يكون

$$لو \frac{ص}{صَ} = لو ص - لو صَ$$

وهو المطلوب

بـ ٩٦ د (نظرية ثالثة) لوغاريتم القوة الميمية لاى عدد يساوى لوغاريتم هذا العدد مضروبا فى درجة القوة

لاننا اذا رفعنا طرفى المتساوية

$$ص = ح^{سـ}$$

الى القوة الميمية (م عدد حيثما اتفق صحيح أو كسرى موجب أو سالب) يوجد أن

$$ص^{م} = ح^{م سـ}$$

واذن يكون

$$لو (ص)^{م} = م لو ص$$

بـ ٩٧ د (نظرية رابعة) لوغاريتم جذر أى عدد يساوى لوغاريتم هذا العدد مقسوما على دليل الجذر

وهذه النظرية ليست الا حالة خصوصية من النظرية المتقدمة اذ انه يمكن كتابة $\sqrt[ن]{ص}$ هكذا $ص^{\frac{1}{ن}}$ واذن يكون

$$لو \sqrt[ن]{ص} = \frac{لو ص}{ن}$$

بـ ٩٨ د (نظرية خامسة) لوغاريتم الواحد فى أى جملة لوغاريتمية يساوى صفرا ولوغاريتم اساس أى جملة لوغاريتمية يساوى واحدا

لانه مهما كان ح يكون

$$ح^{٠} = ١$$

$$ح^{١} = ح$$

وباستعمال اللوغاريتمات تسهل الحسابات كثيرا فبها تعوض عملية الضرب بعملية

جمع

جمع وعملية القسمة بعملية طرح وعمليـة الرفع الى القوى بعملية ضرب وعمليـة استخراج الجذر بعملية قسمة

(المبحث الثالث)

فى تعريف اللوغاريتمـات بواسطة المتواليات

بـ ٩٩ د اذا أخذت لوغاريتمـات حدود متوالية هندسية مثل

∺ ح : ح س : ح س^{٢} : ح س^{٣} : .....

أساسها س فمن الواضح أنه يتكون من هذه اللوغاريتمـات متوالية عددية وهى

÷ لوح . لوح + لوس . لوح + ٢ لوس . لوح + ٣ لوس . .....

أساسها لوس

وقد جرت العادة على تعريف اللوغاريتمـات فى علم الحساب بواسطة متواليتين احداهما هندسية مبتدأة بالواحد وأخراهما عددية مبتدأة بالصفر هكذا

∺ ١ : ح : ح^{٢} : ح^{٣} : .... و

÷ ٠ . ١ . ٢ . ٣ . .....

وكل حد من المتوالية العـددية يسمى لوغاريتمـا للحد المناظر له من المتوالية الهندسـية ولكى يتحصل على لوغاريتمـات جميع الاعداد بتقريب عظيم تدخل أواسط هندسية كبيرة العدد بين كل حدين متواليين من حدود المتوالية الهندسـية ومثلها بين كل حدين متواليين من حدود المتوالية العددية

وتسهل مشاهدة ان تعريف اللوغاريتمـات هذا بواسطة المتواليات يرجع الى التعريف الذى أعطيناه بواسطة الدالة الاسية ولبيان ذلك نعتبر المتواليتين

∺ ١ : ح : ح^{٢} : ح^{٣} ..... و

÷ ٠ . ١ . ٢ . ٣ . .....

فاذا أدخلت أواسط عددها ه - ١ بين حدين حيثما اتفق من حدود المتواليتين يصير

أساس المتوالية الهندسـية هو $\sqrt[ه]{ح}$ أو ح$^{\frac{١}{ه}}$ ويصير أساس المتوالية العددية هو $\frac{١}{ه}$

وتصير المتواليتان المتحصلتان هما

$$1 : \text{ح}^{\frac{1}{\text{ه}}} : \text{ح}^{\frac{2}{\text{ه}}} : \text{ح}^{\frac{3}{\text{ه}}} : \ldots : \text{ح}^{\frac{\text{م}}{\text{ه}}} : \ldots \quad \text{و}$$

$$0 \,.\, \frac{1}{\text{ه}} \,.\, \frac{2}{\text{ه}} \,.\, \frac{3}{\text{ه}} \ldots\ldots \frac{\text{م}}{\text{ه}} \ldots\ldots$$

وبهذه الصورة يعلم أن لوغاريتم أى عدد حيثما اتفق مثل $\text{ح}^{\frac{\text{م}}{\text{ه}}}$ من المتوالية الهندسية هو الاس $\frac{\text{م}}{\text{ه}}$ للقوة التى يلزم رفع العدد الثابت ح اليها ليحصل العدد المفروض وان لوغاريتم الاساس ح لاى جملة لوغاريتمية هو الواحد

(المبحث الرابع)

(فى الجمل اللوغاريتمية المختلفة)

بمقتضى (المرور من جملة لوغاريتمية الى جملة لوغاريتمية أخرى) أساس أى جملة لوغاريتمية هو عدد موجب يمكن انتخابه بالاختيار وانفرض ان لوغاريتمات الاعداد محسوبة فى الجملة التى أساسها ح والمراد حسابها فى جملة أخرى أساسها حَ فلذلك نرمز بحرف سه للوغاريتم عدد حيثما اتفق مثل صه فى الجملة الاولى وبحرف سَه للوغاريتم هذا العدد فى الجملة الثانية فيكون

$$\text{صه} = \text{ح}^{\text{سه}} \quad \text{و}$$

$$\text{صه} = \bar{\text{ح}}^{\bar{\text{سه}}}$$

وإذن يكون

$$\text{ح}^{\text{سه}} = \bar{\text{ح}}^{\bar{\text{سه}}}$$

وبأخذ لوغاريتمى طرفى هذه المتساوية فى الجملة الاولى التى أساسها ح والتنبيه على ان لوغاريتم ح هو الواحد يوجد أن

$$\text{سه} = \bar{\text{سه}} \; \text{لو} \; \bar{\text{ح}}$$

وإذن يكون

$$\bar{\text{سه}} = \frac{1}{\text{لو} \; \bar{\text{ح}}} \, \text{سه}$$

ويعلم من ذلك ان لوغاريتمات الاعداد الواحدة مأخوذة فى جملتين مختلفتين تكون متناسبة ومن هنا ينتج القاعدة الآتية وهى

لاجل

لاجل المرور من أي جملة لوغاريتمية الى جملة أخرى يكفي ضرب لوغاريتمات الجملة الاولى في عكس لوغاريتم الاساس الجديد مأخوذا في الجملة الاولى

بند (اللوغاريتمات النيبريانية) يقال ان من اخترع اللوغاريتمات هو البارون الايقوسي نيبر في أول القرن السابع عشر وهذا الرياضي الشهير كان قد جعل أساس جملته هو العدد الاصم هـ = ٢٫٧١٨٢٨١٨(((وقد سميت لوغاريتمات جملته لوغاريتمات نيبريانية أو لوغاريتمات زائدية ولا يمكننا أن نبين الآن سبب هذه التسمية الاخيرة وهذه اللوغاريتمات هي التي تتحصل بالطبيعة في التحليل الرياضي ولذا تسمى كذلك لوغاريتمات طبيعية وعادة يرمز لهذه اللوغاريتمات بالرمز لوَ

الا أن اللوغاريتمات النيبريانية ليست سهلة الاستعمال في الحسابات الرقمية لانها ليست موافقة لجملتنا الاعشارية ولذا ان بريجس معاصر نيبر قد عوض الاساس هـ بالاساس ١٠ الذي هو أساس جملتنا العددية فاللوغاريتمات التي تستعمل عادة في الحسابات الرقمية لوغاريتمات بريجس ولذا سميت هذه اللوغاريتمات لوغاريتمات معتادة و يرمز لها عادة بالرمز لوَ

ومقياس أي جملة لوغاريتمية هو العدد الثابت الذي يلزم ضرب اللوغاريتمات النيبريانية فيه لتتحصل لوغاريتمات الجملة المعتبرة وليكن ح أساس جملة لوغاريتمية فبموجب ما تقدم يكون مقياسها مرموزا له بحرف م هو

$$\text{م} = \frac{1}{\text{لوَ ح}}$$

أعني أنه يكون عكس اللوغاريتم النيبرياني للاساس وبموجب ذلك يكون مقياس اللوغاريتمات المعتادة هو ٠٫٤٣٤٢٩٤٤٨١٩(((

ومتى مر من جملة أساسها ح الى جملة اخرى أساسها حَ فالمضروب فيه الثابت وهو $\frac{1}{\text{لوَ ح}}$ يسمى مقياس الجملة الاولى بالنسبة للجملة الثانية

بند (بيان السبب في كون نيبر انتخب العدد الاصم هـ وجعله أساسا لجملته اللوغاريتمية) لنعتبر المتواليتين

$$\div\ 1 : (1+\text{ف}) : (1+\text{ف})^2 : (1+\text{ف})^3 : \ldots\ \text{و}$$

$$\div\ 0 \;.\; \text{ل} \;.\; 2\text{ل} \;.\; 3\text{ل} \;.\; \ldots$$

اللتين فيهما ف , ل كميتان صغيرتان جدا بحيث تزيد حدود المتواليتين زيادات صغيرة جدا حتى تحصل لوغاريتمات جميع الاعداد بتقريب عظيم فنبير أطلق اسم مقياس اللوغاريتمات المعرفة بهاتين المتواليتين على النسبة $\frac{ل}{ف}$ أو نهاية هذه النسبة متى مال كل من ل , ف الى الصفر وميز كل جملة لوغاريتمية بمقياسها وحينئذ خطر بباله أن يختار الجملة التى مقياسها الواحد التى كان يعتبرها ابسط فاذا جعل ل = ف تؤل المتواليتان الى

$$١ : ١ + ف : (١ + ف)^٢ : (١ + ف)^٣ : : \ldots \quad و$$

$$\ldots\ldots \quad ٣ف \quad . \quad ٢ف \quad . \quad ف \quad . \quad .$$

فهاتان المتواليتان هما اللتان عرف بهما نبير جملته اللوغاريتمية ولنحسب أساس هذه الجملة أعنى العدد الذى لوغاريتمه الواحد ولذا نفرض فى أول الامر ان الحد م ف من المتوالية العددية مساوللواحد فيكون الحد المناظر له من المتوالية الهندسية هو $(١ + ف)^م$ وحيث ان م ف = ١ فيكون ف = $\frac{١}{م}$ ويكون $(١ + ف)^م = (١ + \frac{١}{م})^م$

فتى مال ف الى الصفر يزيد م الى مالانهاية ويميل العدد $(١ + \frac{١}{م})^م$ الى النهاية هـ التى هى أساس الجملة النبيريانية

واذا لم يكن أى حد من المتوالية العددية مساويا للواحد فانه يوجد حدان متواليان م ف , (م + ١) ف يحصران بينهما الواحد ويكون الاساس ح محصورا بين الحدين اللذين هما حدان من المتوالية الهندسية ومناظران للحدين م ف , (م + ١) ف ويكون

$$(م + ١) ف > ١ > م ف$$

واذن يكون

$$\frac{١}{م + ١} < ف < \frac{١}{م}$$

ويكون الاساس اكبر من $(١ + ف)^م$ وبالاولوية يكون أكبر من $(١ + \frac{١}{م + ١})^م$ ويكون هذا الاساس أصغر من $(١ + ف)^{م+١}$ وبالاولوية يكون أصغر من $(١ + \frac{١}{م})^{م+١}$ واذن يكون الاساس محصورا بين الكميتين

$(١ + \frac{}{}$

$$\left(1+\frac{1}{1+م}\right)^{م} \quad و \quad \left(1+\frac{1}{م}\right)^{1+م}$$

اللتين يمكن وضعهما هكذا

$$\frac{\left(1+\frac{1}{1+م}\right)^{1+م}}{1+\frac{1}{1+م}} \quad و \quad \left(1+\frac{1}{م}\right)^{م}\times\left(1+\frac{1}{م}\right)$$

وحيث ان نهاية كل من هاتين الكميتين هي هـ متى زاد م الى ما لانهاية فيكون الاساس المطلوب مساويا هـ

تنبيه (اللوغاريتمات المعتادة) من الواضح انه في أي جملة حيثما اتفق تكون لوغاريتمات قوى الاساس وهي $ح^{1}$ و $ح^{2}$ و $ح^{3}$ الخ هي الاعداد الصحيحة ١ و ٢ و ٣ الخ ففي الجملة المعتادة تكون هذه القوى هي قوى ١٠ وهي ١٠ و ١٠٠ و ١٠٠٠ الخ وتكون لوغاريتماتها هي الاعداد الصحيحة المتتالية وقد حسبت اللوغاريتمات وحولت الى أعداد أعشارية والجزء الصحيح لاى لوغاريتم يسمى عددا بيانيا او جزءا بيانيا ولوغاريتمات الاعداد الاصغر من الواحد سالبة وحيث كانت اللوغاريتمات السالبة عسرة في التطبيقات فتعوض بلوغاريتمات جزءها الاعشاري موجب وجزءها البياني سالب فقط مثلا ليكن العدد ٠و٠٣٥٦٤ الاصغر من الواحد فلوغاريتمه سالب ومقداره

− ١و٤٤٨٠٦٢٣

ولنكتب هذا اللوغاريتم بهذه الكيفية

− ٢ + ١ − ١و٤٤٨٠٦٢٣ = − ٢ + ٠و٥٥١٩٣٧٧

أو $\bar{٢}$و٥٥١٩٣٧٧

وبهذه الصورة يكون الجزء الاعشاري موجبا والعلامة − الموضوعة فوق الجزء الصحيح تدل على ان الجزء البياني هو السالب فقط

واعلم ان الجزء البياني السالب للوغاريتم عدد أعشاري أصغر من الواحد يساوي رتبة أول رقم معنوي بالابتداء من العلامة الاعشارية لاننا اذا فرضنا ان م رتبة أول رقم معنوي بالابتداء من العلامة الاعشارية من العدد المفروض ص فحيث كان الحاصل ص × $١٠^{م}$ محصورا بين ١ و ١٠ فيكون الجزء البياني للوغاريتمه صفرا ويكون جزءه الاعشاري موجبا ولاجل الرجوع للعدد ص يلزم ان يقسم على $١٠^{م}$ أعني يلزم ان يطرح م

من اللوغاريتم وحينئذ يكون للوغاريتم جزء بيانى سالب وهو $\bar{٣}$ متبوعا بجزء اعشارى موجب

وقد شرحنا فى الجزء الاول من هذا الكتاب استعمال جداول كاليت ولنشتغل الآن بحل المعادلات الاسية ثم بالمسائل المتعلقة بالارباح المركبة والدفع السنوى فنقول

(المبحث الخامس)

(فى حل المعادلات الاسية)

بند ١٠٤ (تعريف المعادلة الاسية) المعادلة الاسية هى كل معادلة بالصورة

$$ح^{س} = ء$$

التى فيها ح و ء عددان موجبان معلومان وحل هذه المعادلة عبارة عن ايجاد مقدار س الذى تتحقق به

بند ١٠٥ (حل المعادلة $ح^{س} = ء$) لاجل ايجاد مقدار س من هذه المعادلة يكفى أخذ لوغاريتمى طرفى المعادلة فيوجد أن

$$س \, لو ح = لو ء$$

واذن يكون

$$س = \frac{لو ء}{لو ح}$$

(أمثلة)

الاول

$$٧^{س} = ١٢٥٤$$

$$س = \frac{لو ١٢٥٤}{لو ٧} = \frac{٣,٠٩٨٢٩٧٥}{٠,٨٤٥٠٩٨٠٤} = ٣,٦٦٦١٩٧$$

الثانى

$$٣^{س} = ٠,٤٦٢$$

$$س = \frac{لو ٠,٤٦٢}{لو ٣} = -٠,٧٠٢٨٧٨$$

بند ١٠٦ (حل المعادلة $ح^{ء^{س}} = و$) يمكن كذلك حل المعادلة $ح^{ء^{س}} = و$ التى فيها ح و ء
و و

و ، و أعداد موجبة معلومة لانه اذا أخذ لوغاريتما الطرفين يوجد أن

$$د^{س} = \frac{لو\,و}{لو\,ح}$$

ويلزم أن يكون العددان و ، ح أكبر من الواحد معا أو أصغر من الواحد معا كى يكون للطرف الثانى مقدار موجب فاذا أخذ لوغاريتما الطرفين مرة ثانية يوجد أن

$$س\,لو\,د = لو\,لو\,و - لو\,لو\,ح$$

ومن هنا يكون

$$س = \frac{لو\,لو\,و - لو\,لو\,ح}{لو\,د}$$

مثال ليكن المطلوب حل المعادلة

$$٢^{٣^{٤^{س}}} = ٥١٢$$

فيجرى العمل هكذا

$$٣^{٤^{س}} = \frac{لو\,٥١٢}{لو\,٢} = \frac{٢,٧٠٩٢٦٩٩٦}{٠,٣٠١٠٣٠٠٠} \quad و$$

$$٤^{س} = \frac{لو\,٢,٧٠٩٢٦٩٩٦ - لو\,٠,٣٠١٠٣٠٠٠}{لو\,٣} = \frac{٠,٩٥٤٢٤٢٤}{٠,٤٧٧١٢١٢٥} \quad و$$

$$س = \frac{لو\,٠,٩٥٤٢٤٢٤ - لو\,٠,٤٧٧١٢١٢٥}{لو\,٤} = \frac{٠,٣٠١٠٣٠٠٠}{٠,٦٠٢٠٦٠٠٠} = \frac{١}{٢}$$

بند ١٠٧ (حل المعادلة $ح_{١}ح^{م س + مَ} + د_{١}د^{ن س + نَ} + هـ_{١}هـ^{ع س + عَ} + \cdots = ٠$)

ولنأخذ الآن معادلة

$$ح_{١}ح^{م س + مَ} + د_{١}د^{ن س + نَ} + هـ_{١}هـ^{ع س + عَ} + \cdots = ٠$$

فبوضع

$$ح_{١}ح^{مَ} = حَ_{١} \quad و \quad د_{١}د^{نَ} = دَ_{١} \quad و \quad هـ_{١}هـ^{عَ} = هـَ_{١} \cdots الخ$$

تؤول هذه المعادلة الى

$$\text{ح}_{\text{ا}}\text{ح}^{\text{م س}} + \text{ء}_{\text{ا}}\text{ء}^{\text{ه س}} + \text{ه}_{\text{ا}}\text{ه}^{\text{ح س}} + \ldots = ٠$$

فاذا جعلنا الآن ء = ح^ل ، ه = ح^ط ، ... الخ (ل ، ط ، ... الخ مجاهيل مقاديرها

هى ل = لوء/لوح ، ط = لوه/لوح ، ... الخ) توجد المعادلة

$$\text{ح}_{\text{ا}}\text{ح}^{\text{م س}} + \text{ء}_{\text{ا}}\text{ح}^{\text{ل ه س}} + \text{ه}_{\text{ا}}\text{ح}^{\text{ط ح س}} + \ldots = ٠$$

وهذه المعادلة يمكن تحويلها الى الصورة

$$\text{ح}_{\text{ا}}\text{ص}^{\text{م}} + \text{ء}_{\text{ا}}\text{ص}^{\text{ل ه}} + \text{ه}_{\text{ا}}\text{ص}^{\text{ط ح}} + \ldots = ٠ \qquad (١)$$

وذلك بان يوضع

$$\text{ح}^{\text{س}} = \text{ص} \qquad (٢)$$

وبناء على ذلك متى علمت كيفية حل المعادلة (١) توضع المقادير التى تستخرج منها فى المعادلة (٢) ويسهل حينئذ الحصول على مقادير س ولننبه على انه يلزم صرف النظر عن مقادير ص السالبة لانها لا توصل الى مقادير حقيقية الى س

بند ١٠٨ (مثالان) الاول المطلوب حل المعادلة

$$\text{ح}^{\text{٢س} - ٣} - ٢\text{ح}^{\text{س} - ٢} - ٣\text{ح}^{-١} = ٠$$

فهذه المعادلة تؤل الى

$$\frac{\text{ح}^{\text{٢س}}}{\text{ح}^{٣}} - \frac{٢\text{ح}^{\text{س}}}{\text{ح}^{٢}} - \frac{٣}{\text{ح}} = ٠$$

وحينئذ اذا محيت المقامات ووضع ح^س = ص توجد المعادلة

$$\text{ص}^{٢} - ٢\text{ح ص} - ٣\text{ح}^{٢} = ٠$$

وجذرا هذه المعادلة هما

$$\text{ص} = ٣\text{ح} \text{ ، } \text{ص} = -\text{ح}$$

وحينئذ اذا كان ح > ٠ يكون

$$\text{س} = \frac{\text{لوح} + \text{لو٣}}{\text{لوح}}$$

واذا

واذا كان ح سالبا يكون مقدارا س تخيليين

الثاني المطلوب حل المعادلة

$$٥^{س-١} = ٢ + \frac{٣}{٥^{س-٢}}$$

فهذه المعادلة تؤل الى

$$\frac{٥^{س}}{٥} = ٢ + \frac{٣\times٥^{٢}}{٥^{س}}$$

وحينئذ اذا محيت المقامات ووضع $٥^{س} = ص$ يوجد أن

$$ص^{٢} - ١٠ ص - ٣٧٥ = ٠$$

ويكون $ص = ٥ \pm ٢٠$

واذن يكون $س = \frac{لو ص}{لو ٥} = \frac{لو ٢٥}{لو ٥} = ٢$

(الفصل السادس)
في الارباح المركبة والدفع السنوي

(المبحث الاول)
في الارباح المركبة

بند (تعاريف) عادة تدفع ارباح رأس مال ما مقترض في كل سنة وتكون ايرادا الا انه يتأتى احيانا ان تبقى الارباح لتضاف الى رأس المال بحيث يزيد رأس المال من سنة الى اخرى وهذا ما يسمى برسملة الارباح أو الوضع بالارباح المركبة

وسعر الربح هو ربح ١٠٠ فرنك في السنة الواحدة الا ان الاسهل في حساب الارباح المركبة جعل سعر الربح هو ربح الفرنك الواحد في سنة واحدة ولاجل الاختصار نرمز لهذا الربح الاخير بحرف ر وبموجب ذلك يكون الوضع بسعر ٥ في المائة كالوضع بسعر ٠,٠٥ في الفرنك الواحد وفي هذه الحالة يكون ر = ٠,٠٥ ويكون الوضع

بسعر ٥٠ و ٤ فى المائة كالوضع بسعر ٠٫٠٤٥ فى الفرنك الواحد وفى هذه الحالة يكون ب = ٠٫٠٤٥

بمسئلة (القانون العمومى للارباح المركبة) اذا فرض ان رأس المال فرنك واحد وزيد عليه ربحه يؤل بعد سنة واحدة الى (١+ب) ولو فرض ان رأس المال هو ٢٤٦٠ فرنكا فانه يصير بعد سنة واحدة قدر (١+ب) مرارا عددها ٢٤٦٠ أعنى يؤل الى (١+ب) ×٢٤٦٠ أو ٢٤٦٠ (١+ب) وعلى العموم اذا رمز بحرف ح لرأس مال حيثما أتفق يكون مقداره فى نهاية سنة واحدة باضافة ارباحه اليه هو ح (١ + ب) ويعلم من ذلك انه يتحصل على مقدار رأس المال بعد مضى سنة واحدة بضرب رأس المال المذكور فى الواحد مضافا اليه ربح الفرنك الواحد

مثلا مبلغ ٢٤٦٠ فرنكا موضوعا بسعر ٥ فى المائة يؤل بعد سنة واحدة الى ٢٤٦٠×١٫٠٥ = ٢٥٨٣ فرنكا

ولنفرض الآن ان رأس المال ح يوضع سنين عددها ن فبعد سنة واحدة يصير هذا المبلغ ح (١+ب) وهذا هو رأس المال المستحق الدفع فى آخر السنة الاولى ويحصل ربحا مدة السنة الثانية ولاجل معرفة ما يؤل اليه رأس المال المذكور وهو ح (١+ب) باضافة ارباحه فى السنة الثانية اليه يلزم ضربه فى (١+ب) فيصير ح (١+ب) (١+ب) أو ح (١+ب)^{٢} وهذا هو رأس المال المستحق الدفع فى آخر السنة الثانية ويحصل ربحا مدة السنة الثالثة ولاجل معرفة ما يؤل اليه رأس المال هذا وهو ح (١+ب)^{٢} باضافة ارباحه فى السنة الثالثة اليه يلزم ضربه فى (١+ب) فيؤل الى ح (١+ب)^{٢} (١+ب) أو ح (١+ب)^{٣} وهذا هو رأس المال المستحق الدفع فى آخر السنة الثالثة وهو الذى يتحصل منه ربح مدة السنة الرابعة ومن الواضح انه يمكن الاستمرار بهذه الكيفية الى مالانهاية وحيث ان كل سنة جديدة تدخل عاملا جديدا وهو (١+ب) فيؤل مقدار رأس المال ح بعد سنين عددها ن الى ح (١+ب)^{ن} ويعلم من ذلك ان مقدار أى رأس مال موضوع بالارباح المركبة بعد سنين بعددما يتحصل بضرب رأس المال المذكور فى مقدار الفرنك الواحد بعد سنة واحدة مرفوعا الى قوة مدلول عليها بعدد السنين

وحينئذ اذا رمزنا بحرف ح$_{١}$ لمقدار رأس المال بعد سنين عددها ن يوجد القانون العمومى وهو

ح$_{١}$

$$ج_{١} = ج(١+ب)^{ه} \qquad (١)$$

وهذا هو القانون الرابط للكميات الاربعة المرموز اليها بالحروف ج و ج١ و ه و ب وبه تتعين أى كمية منها اذا علمت الثلاث كميات الاخر وحينئذ يمكن بواسطة هذا القانون حل الاربع مسائل الآتية وهى

بند ١ (المسئلة الاولى) ما مقدار ما يؤل اليه رأس مال وضع بالارباح المركبة بسعر ب مدة سنين عددها ه

فهذه المسئلة هى التى تقدم ذكرها ويحسب ج١ بواسطة اللوغاريتمات

مثال المطلوب ايجاد مقدار ما يؤل اليه رأس المال ١٢٥٤٠ فرنكا الموضوع بالارباح المركبة وبسعر ٥ فى المائة بعد ٧ سنوات

فيجرى العمل هكذا

لو ١٢٥٤٠ . . . . . . = ٤,٠٩٨٢٩٧٥

لو ١,٠٥ = ٠,٠٢١١٨٩٣

٧ لو ١,٠٥ . . . . . . = ٠,١٤٨٣٢٥١

لو ج١ = ٤,٢٤٦٦٢٢٦

ج١ = ١٧٦٤٠,٠٤

بند ٢ (المسئلة الثانية) ما هو رأس المال الذى اذا وضع بالارباح المركبة وبسعر ب يصير بعد سنين عددها ه مساويا ج١

فبواسطة القانون المتقدم يوجد ان

$$ج = \frac{ج_{١}}{(١+ب)^{ه}} \qquad (٢)$$

مثال ما هو رأس المال الذى اذا وضع بالارباح المركبة وبسعر ٤,٧٥ فرنكات فى المائة يصير مساويا ٢٤٦٠٠ بعد ١٢ سنة

فيجرى العمل هكذا

لو ٢٤٦٠٠ = ٤,٣٩٠٩٣٥١

لو ١,٠٤٧٥ = ٠,٠٢٠١٥٤٠

١٢ لو ١٫٠٤٧٥ . . . . . . = ٠٫٢٤١٨٤٨٠

لو ح . . . . . . = ٤٫١٤٩٠٨٧١

ح = ١٤٠٩٥ و ٧٠

بــ ١١٣ د (المسئلة الثالثة) ماهو السعر الذى يلزم ان يوضع به مبلغ ح بالارباح المركبة بحيث يصير هذا المبلغ ح١ بعد مضى سنوات عددها ن

فالمجهول هنا هو ب ومن القانون الاساسى يستنتج ان

$$\text{١ + ب} = \sqrt[\text{ن}]{\frac{\text{ح}_\text{١}}{\text{ح}}} \qquad (٣)$$

وبهذه الكيفية تحسب الكمية ١ + ب فاذا طرح ١ من الناتج يوجد ب

مثال ماهو السعر الذى يلزم ان يوضع به رأس المال ١٤٠٩٥٫٧٠ فرنكا بحيث يصير ٢٤٦٠٠ فرنك بعد مضى ١٢ سنة فيجرى العمل هكذا

لو ٢٤٦٠٠ . . . . = ٤٫٣٩٠٩٣٠١

لو ١٤٠٩٥٫٧٠ . . . . . . = ٤٫١٤٩٠٨٦٧

لو ح١ − لو ح = ٠٫٢٤١٨٤٨٤

لو (١ + ب) = ٠٫٠٢٠١٥٤٠

١ + ب = ١٫٠٤٧٥

ب = ٠٫٠٤٧٥

ويعلم من ذلك انه يلزم وضع رأس المال بسعر ٤٫٧٥ فى المائة

بــ ١١٤ د (المسئلة الرابعة) كم سنة يلزم ان يوضع فيها رأس مال ح بالارباح المركبة وبسعر ب بحيث يصير مساويا ح١

فالمجهول هو ن ومن القانون الاساسى يستنتج أن

$$(\text{١ + ب})^{\text{ن}} = \frac{\text{ح}_\text{١}}{\text{ح}} \qquad (٤)$$

وبأخذ لوغاريتمى الطرفين يوجد

ن لو (١ + ب) = لو ح١ − لو ح

ومن هنا يكون

$$\text{ن} = \frac{\text{لو ح}_\text{١} - \text{لو ح}}{\text{لو (١ + ب)}}$$

بــ ١١٥ د

بند ١١٥ (مسئلة) دولة يبلغ عدد سكان بلادها ٤٠ مليونا وهذا العدد يزيد كل سنة بقدر $\frac{١}{٣٠٠}$ من مقداره والمطلوب معرفة عدد سكان هذه الدولة بعد قرن كامل

لاجل حل هذه المسئلة نرمز بحرف ع لعدد السكان بعد مضى عدد ما من السنين فبعد مضى السنة التالية يكون ذلك العدد هو

$$ع + \frac{ع}{٣٠٠} = ع\left(١ + \frac{١}{٣٠٠}\right) = ع \times \frac{٣٠١}{٣٠٠}$$

ويعلم من ذلك ان عدد السكان يزيد سنة فسنة كحدود متوالية هندسية حدها الاول ٤٠ مليونا واساسها $\frac{٣٠١}{٣٠٠}$ وان العدد المقصود معرفته هو الحد الذى رتبته ١٠١ من هذه المتوالية فبالرمز بحرف س لهذا الحد يوجد أن (بند جزء أول)

$$س = ٤٠٠٠٠٠٠٠ \times \left(\frac{٣٠١}{٣٠٠}\right)^{١٠٠}$$

ومن هنا يوجد أن $س = ٣٥٧٩٣٠٠٠$

بند ١١٦ (مسئلة) دولتان احداهما يبلغ عدد سكان بلادها ٢٠ مليونا والاخرى يبلغ عدد سكان بلادها ٣٠ مليونا والاولى تزيد كل سنة بقدر $\frac{١}{٢٠٠}$ من مقدارها والثانية تزيد كل سنة بقدر $\frac{١}{٣٠٠}$ من مقدارها والمطلوب معرفة بعد كم سنة يتساوى عدد اسكان بلادها تين الدولتين

لاجل حل هذه المسئلة نرمز بحرف ه لعدد السنين المطلوب فحيث ان عددى سكان هاتين الدولتين يكونان متساويين بعد هذا العدد يكون

$$٢٠٠٠٠٠٠٠ \times \left(\frac{٢٠١}{٢٠٠}\right)^{ه} = ٣٠٠٠٠٠٠٠ \times \left(\frac{٣٠١}{٣٠٠}\right)^{ه}$$

ومن هنا يكون

$$٢ \times \left(\frac{٢٠١}{٢٠٠}\right)^{ه} = ٣ \times \left(\frac{٣٠١}{٣٠٠}\right)^{ه} \quad ،$$

$$\left(\frac{٣٠٠ \times ٢٠١}{٣٠١ \times ٢٠٠}\right)^{ه} = \frac{٣}{٢} \quad ،$$

$$\left(\frac{٦٠٣}{٦٠٢}\right)^{ه} = \frac{٣}{٢}$$

وباخذ اللوغاريتمات يكون

$$ه\,(لو ٦٠٣ - لو ٦٠٢) = لو ٣ - لو ٢$$

ومن هنا يوجد أن

$$ن = \frac{لو٣ - لو٢}{لو٦٠٣ - لو٦٠٢}$$

أو

$$ن = ٢٤٤$$

(المبحث الثانى)

(فى الدفع السنوى)

بند ١١٧ (تعاريف) اذا اقترض رجل مبلغا قدره $ح_{١}$ مؤجلا الى سنين عددها ن وبسعر ر فى الفرنك الواحد فلاجل ان يتخلص المديون من المدين له يدفع المديون فى آخر كل سنة مبلغا ح محسوبا بحيث انه بعد دفع عددها ن كل دفعة منها تساوى ح يكون قد دفع المديون دينه للمدين من رأس مال وارباح مركبة والمبلغ ح الذى يدفعه المقترض لرب المال سنويا يسمى دفعة سنوية

بند ١١٨ (القانون العمومى للدفع السنوية) لنفرض ان المطلوب ايجاد القانون الذى يربط رأس المال $ح_{١}$ والدفعة السنوية ح والسعر ر ومدة القرض وهى ن فنقول اذا لم يدفع المقترض شيأ من المبلغ $ح_{١}$ الى آخر السنة النونية فانه يجب عليه ان يدفع فى آخر هذه السنة مبلغا قدره $ح_{١}(١+ر)^{ن}$

ومن جهة أخرى اذا لم تدفع الدفعة السنوية الاولى الا بعد سنين عددها ن عوضا عن دفعها فى آخر السنة الاولى فانه يلزم ان يضاف اليها ارباحها المركبة فى ظرف سنين عددها ن - ١ أعنى يلزم ان يدفع مبلغا قدره $ح(١+ر)^{ن-١}$ عوضا عن الدفعة السنوية الاولى

وبمثل ذلك يمكن ان يدفع عوضا عن الدفع السنوية الاخر المبالغ المتوالية وهى

$$ح(١+ر)^{ن-٢} ، ح(١+ر)^{ن-٣} ، \dots ، ح(١+ر) ، ح$$

وحينئذ لاجل تعويض الدفع السنوية الاخر يلزم ان يدفع فى آخر السنين التى عددها ن المبلغ الكلى وهو

$$ح(١+ر)^{ن-١} + ح(١+ر)^{ن-٢} + \dots + ح(١+ر) + ح$$

أى

أى $\frac{ح\{(١+ب)^{ه}-١\}}{ب}$

وحينئذ توجد المعادلة

$$\frac{ح\{(١+ب)^{ه}-١\}}{ب}=ح_{١}(١+ب)^{ه}$$

وبمحو المقام ب يوجد أن

$$ح\{(١+ب)^{ه}-١\}=ح_{١}ب(١+ب)^{ه} \qquad (١)$$

وهو القانون المطلوب

بند ١١٩ (مسائل) بواسطة القانون (١) يمكن حل أربع مسائل مختلفة بحسب أخذ حرف من الحروف الاربعة الداخلة فيه مجهولا

(المسئلة الاولى) ماهى الدفعة السنوية التى يلزم دفعها فى آخر كل سنة لاجل استهلاك مبلغ $ح_{١}$ وارباحه المركبة فى سنين عددها ه اذا علم ان السعر ب فى الفرنك

فمن القانون (١) يوجد أن

$$ح=\frac{ح_{١}ب(١+ب)^{ه}}{(١+ب)^{ه}-١} \qquad (٢)$$

ولاجل تطبيق هذا القانون يحسب فى أول الامر $(١+ب)^{ه}$ بواسطة اللوغاريتمات ويطرح منه واحد فيتحصل المقام ثم يحسب بواسطة القانون

$$لو ح=لو ح_{١}ب+ه لو(١+ب)-لو\{(١+ب)^{ه}-١\}$$

لو ح وبالتبعية ح

(تطبيق رقمى) ماهى الدفعة السنوية التى يجب دفعها سنويا لاجل استهلاك مبلغ ٣٤٦٠٠ فرنك فى ٥١ سنة اذا علم ان السعر ٤ فى المائة

قانون (٢) $لو ح=لو ح_{١}ب+ه لو(١+ب)-لو(١+ب)^{ه}-١$

$$لو(١+ب)=لو(١،٠٤)=٠،٠١٧٠٣٣٣٣٩٣$$

$$ه لو(١+ب)=٥١لو(١،٠٤)=٠،٨٦٨٧٠٠٣$$

واذن يكون $(١+ب)^{ن} = ٧٫٣٩٠٩٥٠$

اذا علمت ذلك كان

لوج ب = لو١٣٨٤ . . . . = ٣٫١٤١١٣٦١

ن لو (١+ب) = ... = ٠٫٨٦٨٧٠٠٣

لو $\{(١+ب)^{ن}-١\}$ = لو٦٫٣٩٠٩٥٠ = ٠٫٨٠٥٥٦٥٤

متمم لو $\{(١+ب)^{ن}-١\}$ -١٠ . . . . = $\bar{١}$٫١٩٤٤٣٤٦

واذن يكون لو ح = ٣٫٣٠٤٢٧١٠

ويكون ح = ١٦٠٠٫٥٥٦ فرنك

بند (المسئلة الثانية) ماهو المبلغ $ج_{١}$ الذي يمكن أن يقترض بحيث يستهلك هو وارباحه المركبة فى ظرف سنين عددها ن بدفعات سنوية عددها ن كل دفعة سنوية منها تساوى ح والسعر هو ب فى الفرنك الواحد

فمن القانون (١) يستخرج

$$ج_{١} = \frac{ح\{(١+ب)^{ن}-١\}}{ب(١+ب)^{ن}} \qquad (٣)$$

ولاجل الحساب بواسطة اللوغاريتمات ينبغى ملاحظة المحوظ المتقدم بالمسئلة السابقة

(تطبيق وفى) ماهو المبلغ $ج_{١}$ الذي يمكن ان يقترض اذا أريد دفعه هو وارباحه المركبة فى ظرف ٣٧ سنة بواسطة ٣٧ دفعة سنوية كل دفعة سنوية منها ٨٢٥ فرنكا والسعر $٤\frac{١}{٢}$ فى المائة

القانون لو$ج_{١}$ = لوح + لو $\{(١+ب)^{ن}-١\}$ - لو $(١+ب)^{ن}$ - لوب

لو(١+ب) = لو(١٫٠٤٥) = ٠٫٠١٩١١٦٢٩

ن لو(١+ب) = ٣٧لو (١٫٠٤٥) = ٠٫٧٠٧٣٠٢٧

واذن يكون $(١+ب)^{ن}$ = ٥٫٠٩٦٨٦

اذا علمت ذلك يكون لوح = لو٨٢٥ = ٢٫٩١٦٤٥٤٠

لو

لو {(١+ب)^ﻫ −١} = لو ٤٫٠٩٦٨٦ = ٠٫٦١٢٤٥١٢

مقم لو (١+ب)^ﻫ −١٠ = ٠٫٠٠ = $\bar{1}$٫٢٩٢٦٩٧٣

مقم لو ب −١٠ = مقم لو ٠٫٠٤٥ −١٠ = ١٫٣٤٦٧٨٧٥

لو ج١ = ٤٫١٦٨٣٩٠٠

واذن يكون ج١ = ١٤٧٣٦٫٣٥

بند (المسئلة الثالثة) اذا اقترض مبلغ ج١ بسعر ب فى الفرنك الواحد واريد استهلاكه بواسطة دفعات سنوية كل منها يساوى ج فما هو الزمن الذى يجب ان تدفع فيه الدفعة السنوية

فيحل القانون (١) بالنسبة للكمية (١+ب)^ﻫ يوجد أن

(١+ب)^ﻫ = ج / (ج − ج١ ب)

ومن هنا يستنتج أن

ﻫ = (لو ج − لو (ج − ج١ ب)) / لو (١+ب) (٤)

ولا تكون المسئلة ممكنة الا اذا كان (ج − ج١ ب) موجبا لانه ليس للاعداد السالبة لوغاريتمات حقيقية وغير ذلك يشاهد من أول وهلة انه يجب انه يكون الامر كذلك لان ج١ ب هو الربح البسيط لرأس المال المقترض ومن الواضح ان الدفعة السنوية ج يجب ان تكون أكبر من هذا الربح كى يمكن الوصول الى استهلاك الدين

فاذا وصل القانون (٤) الى عدد صحيح للزمن ﻫ يكون هذا العدد حلا للمسئلة واما اذا كان هذا العدد كسريا فان المسئلة تكون مستحيلة الحل ومع ذلك فانه يمكن فى هذه الحالة ان يحقق من انه اذا فرض ان ع و (ع+١) العددان الصحيحان المتواليان اللذان يحصران بينهما الكسر (٤) تكون كل دفعات سنوية عددها ع لا تفى لاجل سداد الدين وكل دفعات سنوية يزيد عددها عن ع بواحد تكون زيادة عن الكفاية لانه حيث ان

$$\text{ع} < \frac{\text{لوح} - \text{لو}\,(\text{ح} - \text{ح}_{1}\,\text{ب})}{\text{لو}\,(1+\text{ب})} < \text{ع}+1$$

فيكون

$$\text{ع}\;\text{لو}\,(1+\text{ب}) < \text{لوح} - \text{لو}\,(\text{ح} - \text{ح}_{1}\,\text{ب}) < (\text{ع}+1)\;\text{لو}\,(1+\text{ب})$$

أو

$$\text{لو}\,(1+\text{ب})^{\text{ع}} < \text{لو}\,\frac{\text{ح}}{\text{ح} - \text{ح}_{1}\,\text{ب}} < \text{لو}\,(1+\text{ب})^{\text{ع}+1}$$

وإذن يكون

$$(1+\text{ب})^{\text{ع}} < \frac{\text{ح}}{\text{ح} - \text{ح}_{1}\,\text{ب}} < (1+\text{ب})^{\text{ع}+1}$$

ويمكن أيضا محو المقام حيث كان موجبا ويكون

$$(\text{ح} - \text{ح}_{1}\,\text{ب})(1+\text{ب})^{\text{ع}} < \text{ح} < (\text{ح} - \text{ح}_{1}\,\text{ب})(1+\text{ب})^{\text{ع}+1}$$

ومن هنا يستنتج بسهولة

$$\frac{\text{ح}\left\{(1+\text{ب})^{\text{ع}} - 1\right\}}{\text{ب}} < \text{ح}_{1}(1+\text{ب})^{\text{ع}} \quad , \quad \frac{\text{ح}\left\{(1+\text{ب})^{\text{ع}+1} - 1\right\}}{\text{ب}} > \text{ح}_{1}(1+\text{ب})^{\text{ع}+1}$$

وبهاتين المتباينتين تتضح القضية المنطوق بها

وحينئذ يطبق القانون (٤) في جميع الحالات وبه يتحصل عدد الدفعات اللازم دفعها وهو ع فإن بقي باق يحسب بالسهولة الفرق $\text{ح}_{1}(1+\text{ب})^{\text{ع}} - \frac{\text{ح}\left\{(1+\text{ب})^{\text{ع}} - 1\right\}}{\text{ب}}$ ويدفع دفعة خصوصية

(تطبيق رقمي) ما هو الزمن اللازم ان يستهلك فيه مبلغ ٢٦٠٠٠٠ فرنك بواسطة دفعة سنوية قدرها ١٠٠٠٠ فرنك بسعر $\frac{1}{4}$ ٣ في المائة

قانون (٤) $$\text{ه} = \frac{\text{لوح} - \text{لو}\,(\text{ح} - \text{ح}_{1}\,\text{ب})}{\text{لو}\,(1+\text{ب})}$$

لوح = لو ١٠٠٠٠ = ٤,٠٠٠٠٠٠٠

لو $(\text{ح} - \text{ح}_{1}\,\text{ب})$ = لو ١٥٥٠ = ٣,١٩٠٣٣١٧

لوح − لو $(\text{ح} - \text{ح}_{1}\,\text{ب})$ = ٠,٨٠٩٦٦٨٣

لو

لو (١+ب)=لو(١ ,٠٣٢٥) = ٠ ,٠١٣٨٩٠١

واذن يكون ن = $\frac{٠,٠٨٠٩٦٦٨٣}{٠,٠١٣٨٩٠١}$ = ٥٨+باق

لكن حيث ان للقسمة باق فلا يستهلك المبلغ المعلوم بتمامه ولاجل تتميم الدين يلزم حساب ما هو مستحق الدفع فى آخر ٥٨ سنة أعنى ع = ٢٦٠٠٠٠×$(١,٠٣٢٥)^{٥٨}$

وحساب ما دفع بواسطة الدفعات السنوية اعنى ع = $\frac{١٠٠٠٠×\{(١,٠٣٢٥)^{٥٨}-١\}}{٠,٠٣٢٥}$

وأخذ الفرق ع-ع

لو ٢٦٠٠٠٠ = ٥,٤١٤٩٧٣٣٥ * لو ١٠٠٠٠ = ٤,٠٠٠٠٠٠٠

٥٨لو(١,٠٣٢٥) = ٠,٨٠٥٦٢٣٤٨ * لو ٤,٣٩١٨٠٤ = ٠,٧٣١٧٣٤١

لو ع = ٦,٢٢٠٠٩٦٨٣ * ثم لو ٥ ,٠٣٢٥-١٠ = ١,٤٨٨١١٦٦

واذن يكون ع=١٦٦١٨٦٩ فرنكا * لو ع = ٦,٢١٩٨٠٠٧

وزيادة على ذلك يكون $(١,٠٣٢٥)^{٥٨}$ = ٦,٣٩١٨٠٤ * ع=١٦٥٩٠١٧ فرنكا

وحينئذ يكون الباقى الواجب دفعه هو ع-ع = ٢٨٥٢ فرنكا

بند ١٢٢ (المسئلة الرابعه) اذا اقترض مبلغ ح واريد استهلاكه وارباحه المركبة بدفع دفعة سنوية قدرها ح مدة سنين عددها ن فما يكون سعر الربح

فالقانون (١) هو بالنسبة الى ب معادلة بدرجة (ن+١) لا يمكن حلها الا بواسطة طرق مخصوصة ويتوصل بسرعة الى مقدار تقريبى الى ب بالاستناد على هذا التنبيه وهو اذا كان ح و ح معلومين فان عدد الدفعات السنوية وهو ن يزيد او ينقص متى زاد السعر ب اونقص

اذا تقرر هذا نأخذ القانون

$$ن = \frac{لوح - لو(ح-حب)}{لو(١+ب)} \qquad (٤)$$

الذى فيه ب هو المجهول فاذا اعطى الى ب مقدار بَ وكان هذا المقدار أقل من المقدار الذى يبحث عنه يكون المقدار نَ الذى يأخذه الكسر (٤) أقل من المقدار

المعلوم ه وبالعكس أى يكون هَ أكبر من ه اذا كان تَ أكبر من ب وحينئذ يعلم بمقارنة المقدار هَ بالمقدار ه ان كان المقدار المعطى بالاختيار الى ب أكبر اوأقل من المقدار المطلوب وبناء على ذلك يمكن ان يتحصل على مقدار الى ب مقربا تقريبا كافيا

(تطبيق رقمى) اذا اقترض مبلغ قدره ٣٥٠٠٠ فرنك وأريد استهلاكه مع ارباحه المركبة فى ظرف ٢٥ سنة بواسطة ٢٥ دفعة سنوية كل دفعة سنوية ١٦٠٠ فرنك فما يكون سعر الربح

قانون (٤)   ه = (لو ح − لو (ح − ح١ ب)) / لو (١ + ب)

ولنفرض فى أول الامر أن ب = ٠،٠٤ فيكون ح − ح١ ب = ٢٠٠

لو ح = لو ١٦٠٠ = ٣،٢٠٤١٢٠٠

لو (ح − ح١ ب) = لو ٢٠٠ = ٢،٣٠١٠٣٠٠

لو ح − لو (ح − ح١ ب) = ٠،٩٠٣٠٩٠٠

لو (١ + ب) = لو (١،٠٤) = ٠،٠١٧٠٣٣٣

فاذا قسم ٠،٩٠٣٠٩٠٠ على ٠،٠١٧٠٣٣٣ يكون الخارج ٥٣ وهو عدد أكبر من ٢٥ واذن يكون السعر أقل من ٤

ولنفرض ان ب = ٠،٠٣٥ فيكون ح − ح١ ب = ٣٧٥

لو ح = لو ١٦٠٠ = ٣،٢٠٤١٢٠٠

لو (ح − ح١ ب) = لو ٣٧٥ = ٢،٥٧٤٠٣١٣

لو ح − لو (ح − ح١ ب) = ٠،٦٣٠٠٨٨٧

لو (١ + ب) = لو (١،٠٣٥) = ٠،٠١٤٩٤٠٣

وبقسمة ٠،٦٣٠٠٨٨٧ على ٠،٠١٤٩٤٠٣ يوجد ان الخارج ٤٢ وهو عدد أصغر واذن يكون السعر اقرب من ٤ زيادة عن قربه من ٣ ½

فلنفرض حينئذ ان ب = ٠،٠٣٩ فيكون ح − ح١ ب = ٢٣٥

لو

لو ح = لو ١٦٠٠ = ٣٫٢٠٤١٢٠٠

لو (ح − ج١ ب) = لو ٢٣٥ = ٢٫٣٧١٠٦٧٩

لو ح − لو (ح − ج١ ب) = ٠٫٨٣٣٠٥٢١

لو (١ + ب) = لو (١٫٠٣٩) = ٠٫٠١٦٦١٥٥

وخارج قسمة ٠٫٨٣٣٠٥٢١ على ٠٫٠١٦٦١٥٥ هو ٥٠ وهو عدد أصغر

واذن يكون السعر أكبر من ٣٫٩٠

وانفرض ان ب = ٠٫٠٣٩٥ فيكون ح − ج١ ب = ٢١٧٫٥٠

لو ح = لو ١٦٠٠ = ٣٫٢٠٤١٢٠٠

لو (ح − ج١ ب) = لو ٢١٧٫٥٠ = ٢٫٣٣٧٤٥٩٣

لو ح − لو (ح − ج١ ب) = ٠٫٨٦٦٦٦٠٧

لو (١ + ب) = لو ١٫٠٣٩٥ = ٠٫٠١٦٨٢٤٥

وخارج قسمة ٠٫٨٦٦٦٦٠٧ على ٠٫٠١٦٨٢٤٥ هو ٥١ واذن يكون السعر أكبر من ٩٥ و ف/٣

وحينئذ يكون محصورا بين ٩٥ و ف/٣ و ٤ وحينئذ يعلم هذا السعر مقربا من ٠٫٠٥ ف ويمكن بسهولة هذا التقريب زيادة عن ذلك

(الفصل السابع)

(فى تحقيق قوانين الجبر)

(المبحث الاول)

(فى الشروط التى بها تكون الكميتان الكثيرتا الحدود متطابقتين)

بند ١٢٣ (قاعدة) متى كانت كمية كثيرة الحدود مرتبة على حسب القوى المتصاعدية لمتغير س أقول انه يمكن ان يعطى لهذا المتغير مقدار موجب أو سالب مقداره الرقمى صغير صغرا كافيا بحيث انه بهذا المقدار وبجميع المقادير الاصغر منه تكون اشارة هذه الكمية عين اشارة حدها الاول دائما

ولاثبات ذلك ناخذ كثيرة الحدود

$$\text{ح}\,\text{س}^{\text{م}}+\text{ء}\,\text{س}^{\text{ن}}+\text{هـ}\,\text{س}^{\text{ح}}+\cdots+\text{ط}\,\text{س}^{\text{ر}}$$

التي فيها الاسس م و ن و ح و ... و ر تصاعدية فيمكن كتابتها هكذا

$$\text{ح}\,\text{س}^{\text{م}}\left(1+\frac{\text{ء}}{\text{ح}}\text{س}^{\text{ن}-\text{م}}+\frac{\text{هـ}}{\text{ح}}\text{س}^{\text{ح}-\text{م}}+\cdots+\frac{\text{ط}}{\text{ح}}\text{س}^{\text{ر}-\text{م}}\right)$$

فاذا اعطى الى س مقدار صغير جدا فان كل حد من الحدود التالية للواحد بين القوسين ياخذ مقدارا صغيرا جدا اذ أن الاسس موجبة وحيث ان عددها محدود فتكون الكمية التي بين القوسين مخالفة للواحد قليلا جدا واذن تأخذ كثيرة الحدود مقدارا اشارته كاشارة $\text{ح}\,\text{س}^{\text{م}}$ وتحفظ هذه الاشارة بجميع مقادير س الاقل من المقدار المذكور

بـ١٢٤ـد (نظرية اولى) الكميتان الكثيرتا الحدود الجذريتان والصحيحتان بالنسبة لمتغير مثل س لا يمكن ان تكونا متساويتين مهما كان المقدار المعطى الى س الا اذا كانتا مركبتين من حدود واحدة

ولاثبات ذلك نفرض كثيرتي الحدود المرتبتين بالنسبة الى س وهما

$$\text{ح}\,\text{س}^{\text{م}}+\text{ح}_1\text{س}^{\text{م}-1}+\text{ح}_2\text{س}^{\text{م}-2}+\cdots+\text{ح}_{\text{م}-1}\text{س}+\text{ح}_{\text{م}} \quad (1)$$

$$\text{ء}\,\text{س}^{\text{ن}}+\text{ء}_1\text{س}^{\text{ن}-1}+\text{ء}_2\text{س}^{\text{ن}-2}+\cdots+\text{ء}_{\text{ن}-1}\text{س}+\text{ء}_{\text{ن}} \quad (2)$$

فاذا وجب ان تكون هاتان الكميتان متساويتين مهما كان س وجب ان تكونا متساويتين عندما يكون س = ٠ وبناء على ذلك يجب ان يكون $\text{ح}_{\text{م}}=\text{ء}_{\text{ن}}$ فاذا حذف هذان الحدان المشتركان يكون الباقيان متساويين كذلك ويجب ان يكون الفرق بينهما معدوما مهما كان س والحد الاول من هذا الفرق مرتبا على حسب القوى التصاعدية الى س هو $(\text{ح}_{\text{م}-1}-\text{ء}_{\text{ن}-1})\,\text{س}$ فاذا لم يكن هذا الحد معدوما يمكن بموجب قاعدة (بـ١٢٣ـد) اخذ س صغيرا صغرا كافيا بحيث تكون اشارة الفرق عين اشارة الحد الاول المذكور وحينئذ لا يكون هذا الفرق معدوما بمقدار س المذكور واذن يكون $\text{ح}_{\text{م}-1}=\text{ء}_{\text{ن}-1}$ فاذا حذف الحدان المتساويان اللذان هما بدرجة اولى

يشاهد

يشاهد كذلك ان الفرق يبتدئ بحد بدرجة ثانية وهو $(\text{ج}_{\text{م}-٢} - \text{ء}_{\text{ه}-٢})\,\text{س}^{٢}$ وان هذا الحد يجب ان يكون معدوما وبالاستمرار بهذه الكيفية يستنتج انه يجب ان تكون حدود كثير في الحدود واحدة ومتحدة العدد

بـ١٢٥ د (نظرية ثانية) الكميتان الكثيرتا الحدود الصحيحتان والجذريتان اللتان تشتملان على عدد مّا من الحروف الاختيارية الغير المتعلق بعضها بالبعض الآخر لا يمكن ان تكونا متساويتين الا اذا كانتا مركبتين من حدود واحدة

ولاثبات هذه النظرية يكفي ان نبين انه اذا كانت القضية صحيحة في كميتين كثيرتي الحدود مشتملتين على حروف اختيارية عددها ه تكون صحيحة كذلك في كميتين كثيرتي الحدود تشتملان على حروف اختيارية عددها (ه + ١) ولذلك نعتبر كميتين كثيرتي الحدود تشتملان على حروف اختيارية عددها (ه + ١) ولتكن س و ص و ع و ق و و و ... و ح ولنرتبهما على حسب القوى التنازلية لاحدى هذه الحروف وليكن س فتأخذان الصورتين

$$\text{ج}_٠\text{س}^{\text{م}} + \text{ج}_١\text{س}^{\text{م}-١} + \text{ج}_٢\text{س}^{\text{م}-٢} + \cdots + \text{ج}_{\text{م}} \qquad \text{و} \qquad (١)$$

$$\text{ء}_٠\text{س}^{\text{ه}} + \text{ء}_١\text{س}^{\text{ه}-١} + \text{ء}_٢\text{س}^{\text{ه}-٢} + \cdots + \text{ء}_{\text{ه}} \qquad (٢)$$

اللتين فيهما $\text{ج}_٠$ و $\text{ج}_١$ و $\text{ج}_٢$ و ... و $\text{ج}_{\text{م}}$ و $\text{ء}_٠$ و $\text{ء}_١$ و $\text{ء}_٢$ و ... و $\text{ء}_{\text{ه}}$ تحتوى على المتغيرات ص و ع و ق و و و ... و ح التى عددها ه فحيث ان الكميتين الكثيرتى الحدود (١) و (٢) متساويتان مهما كان س فيجب أن يكون (بـ١٢٤ د)

$$\text{م} = \text{ه} \;،\; \text{ج}_٠ = \text{ء}_٠ \;،\; \text{ج}_١ = \text{ء}_١ \;،\; \text{ج}_٢ = \text{ء}_٢ \;،\; \cdots \;،\; \text{ج}_{\text{م}} = \text{ء}_{\text{ه}} \qquad (٣)$$

وحيث كانت النظرية صحيحة فى حالة المتغيرات التى عددها ه فيقتضى لاجل تحقيق المتساويات (٣) أن تكون كثيرات الحدود $\text{ج}_٠$ و $\text{ء}_٠$ و $\text{ج}_١$ و $\text{ء}_١$ و ... و $\text{ج}_{\text{م}}$ و $\text{ء}_{\text{ه}}$ مركبة على التناظر من حدود واحدة وبناء على ذلك تكون كثيرتا الحدود (١) و (٢) مركبتين من حدود واحدة

(المبحث الثانى)

فى تحقيق تساوى مقدارين جبريين

بند ١٢٦ (الحالة التي تكون فيها جميع الكميات الاختيارية غير متعلق بعضها بالبعض الآخر) بموجب النظرية المتقدمة لاجل تحقيق معادلة واقعة بين كميات اختيارية يكفي محو الجذور والمقامات منها وتحقيق ان طرفيها مركبان من حدود واحدة واذا لم يحصل ذلك يمكن ان يتحقق من ان المتساوية المفروضة لاتكون متحققة بجميع مقادير الحروف المشتملة عليها

بند ١٢٧ (الحالة التي لاتكون فيها جميع الكميات الاختيارية غير متعلقة ببعضها) اذا لم تحقق المتساوية الامتى تحققت بعض ارتباطات واقعة بين الحروف المحتوية عليها فانه يلزم لاجل تحقيقها أن تبين بواسطة هذه الارتباطات حروف مّا من الحروف التي تحتوي عليها بدلالة الحروف التي يمكن اعتبارها اختيارية ووضع هذه المقادير في المعادلة المفروضة فبعد الوضع تدخل المعادلة ضمن الحالة المتقدمة

(المبحث الثالث)

تطبيقات على بعض مسائل

بند ١٢٨ (مسئلة أولى) المطلوب اختبار ان كانت المعادلتان

$$\frac{ط}{ح_1}+\frac{ح}{ط_2}=1 \quad , \qquad (1)$$

$$\frac{ط_1}{ح_2}+\frac{ح_1}{ط}=1 \qquad (2)$$

تنتج منهما المعادلة

$$ح ح_1 ح_2+ط ط_1 ط_2=0 \qquad (3)$$

فهنا ارتباطان (١) و (٢) بين الكميات الستة وهي $ح$ و $ح_1$ و $ح_2$ و $ط$ و $ط_1$ و $ط_2$ فاذن يجب أن يستخرج منهما مقدارا كميتين من هذه الكميات الستة بدلالة الاربعة الاخرى فمن المعادلة (١) يستخرج

$$ط=\frac{ح_1\left(ط_2-ح\right)}{ط_2} \qquad (4)$$

ومن المعادلة (٢) يستخرج

$$ط_{١} = ح_{٢} - \frac{ح_{١} ح_{٢}}{ط}$$

وبتعويض ط بالمقدار (٤) يوجد أن

$$ط_{١} = ح_{٢} - \frac{ح_{٢} ط_{٢}}{ط_{٢} - ح}$$

أو

$$ط_{١} = - \frac{ح ح_{٢}}{ط_{٢} - ح} \quad (٥)$$

فاذا وضع هذان المقداران فى المتساوية المقتضى تحقيقها وهى (٣) يوجد أن

$$ح ح_{١} ح_{٢} - \frac{ح ط_{١} (ط_{٢} - ح) ح ح_{٢} ط_{٢}}{ط_{٢} ط_{٢} (ط_{٢} - ح)} = ٠$$

وهذه المتساوية تؤل الى متطابقة اذا حذف العامل $(ط_{٢} - ح)\, ط_{٢}$ المشترك بين بسط ومقام الحد الثانى

بند ١٢٩ (مسئلة ثانية) المطلوب اختبار ان كان ينتج من المتساوية

$$\frac{حء - ءو}{ح - ء + هـ - و} = \frac{حهـ - ءو}{ح - ء + هـ - و} \quad (١)$$

المتساوية

$$\frac{حهـ - ءو}{ح - ء + هـ - و} = \frac{ح + ء + هـ + و}{٤} \quad (٢)$$

فبموجب الطريقة المتقدمة يلزم ان يستنتج من المتساوية (١) مقدار أحد الحروف الاربعة المحتوية عليها ووضع هذا المقدار فى المعادلة (٢) فبمحو مقامات المعادلة (١) يحدث

$$ح^{٢} و - ح و (ء + و - هـ) - ح ء هـ + ء هـ (ء + و - هـ)$$

$$= ح^{٢} هـ - ح هـ (ء + هـ - و) - ح ء و + ء و (ء + هـ - و)$$

وبأخذ ح مضروبا مشتركا يحدث بعد الاختصار

$$ح^{٢}(و - هـ) - ح(و^{٢} - هـ^{٢}) - ء^{٢}(و - هـ) + ء(و^{٢} - هـ^{٢}) \quad (٣)$$

وبقسمة جميع الحدود على (و−هـ) يحدث

$$ح^{٢} - ح(و + هـ) - ء^{٢} + ء(و + هـ) = ٠$$

وهذه المتساوية يمكن كتابتها هكذا

ح² − ء² − (ح − ء)(ه + و) = ٠ (٤)

وبالقسمة على (ح − ء) يحدث

ح + ء − ه − و = ٠

أعنى ح = ه + و − ء

واذا وضع هذا المقدار فى المعادلة (٢) تؤول الى

(ه² + ه و − ه ء − ء و) / (٢ه − ٢ء) = (٢ه + ٢و) / ٤

أو

((ه − ء)(ه + و)) / (٢(ه − ء)) = (ه + و) / ٢

وهذه المساواة متطابقة

(تنبيه) قد حذفنا من المعادلتين (٣) و (٤) العاملين (و − ه) و (ح − ء) وحينئذ لا يمكن تطبيق هذه النتيجة الا فى الحالة التى يكون فيها هذان الفرقان غير معدومين وفى الواقع يمكن ان يتحقق من انه اذا كان ح = ء أو ه = و تؤول المعادلة (١) الى متطابقة ولا يمكن ان يتحصل منها حينئذ أدنى نتيجة

(تمرينات)

(الاول) المطلوب تحقيق ان المعادلتين

س + ص + ق + و = ٢

س ص − ق و = ٢ − ٢ (ق + و)

يحدث منهما المعادلة

س² + ص² = ق² + و²

(الثانى) المطلوب تحقيق ان المعادلتين

ح + ه = ٢ء و ١/ء + ١/و = ٢/ه

يحدث منهما التناسب ح/ء = ه/و

(الثالث) المطلوب تحقيق ان حجم القطعة الكروية ذات القاعدتين وهو

١/٦ ط ر³ + ١/٢ ط ر (ق'² + ق''²)

يساوى الفرق بين قطعتين كرويتين كلتاهما ذات قاعدة واحدة ونصفا قطرى قاعدتيهما ق' و ق'' أعنى انه يساوى

$$\frac{1}{6}ط\,ر^{3}+\frac{1}{2}\infty\,ر\,ن^{2}-\frac{1}{6}ط\,ر_{1}^{3}-\frac{1}{2}ط\,ر_{1}\,ن_{1}^{2}$$

و $ر$ و $ر_{1}$ يحققان بموجب الهندسة هذه الشروط

$$ر-ر_{1}=ر \quad و \quad ل^{2}=ن^{2}+(ل-ر)^{2} \text{، } ل^{2}=ن_{1}^{2}+(ل-ر_{1})^{2}$$

و $ل$ نصف قطر الكرة

ولاجل تحقيق هذه التمرينات الثلاثة تطبق الطريقة العمومية

(الرابع) المطلوب تحقيق انه اذا كان

$$\frac{ح_{1}}{ح}=\frac{ء_{1}}{ء}=\frac{هـ_{1}}{هـ}=\frac{و_{1}}{و}$$

يكون

$$\sqrt{ح\,ح_{1}}+\sqrt{ء\,ء_{1}}+\sqrt{هـ\,هـ_{1}}+\sqrt{و\,و_{1}}=\sqrt{(ح_{1}+ء_{1}+هـ_{1}+و_{1})(ح+ء+هـ+و)}$$

(الخامس) المطلوب تحقيق انه اذا رمز بالرمز $ع_{م}$ لمجموع الحدود الاول التى عددها م من متوالية هندسية أساسها ك يكون مجموع حواصل الضرب مثنى مثنى لهذه الحدود الاول التى عددها م يساوى $\frac{ك}{ك+1}\,ع_{م}\,ع_{م-1}$

(الجواب) يؤسس اثبات هذه القضية على ان مجموع حواصل الضرب مثنى مثنى يساوى نصف الفرق بين مربع المجموع ومجموع المربعات

(السادس) المطلوب تحقيق انه اذا اعتبرت الاعداد

١ و ٢ و ٣ و ٥ و ٨ و ١٣ و ٢١ و ٣٤ و ....

التى كل عدد منها يساوى مجموع العددين السابقين له يكون المقدار المطلق للفرق بين مربع أى حد وحاصل ضرب الحدين الواقع بينهما يساوى الواحد

(الجواب) يجرى اثبات أن مقدار هذا الفرق ثابت

(السابع) المطلوب تحقيق انه من المعادلة

$$\sqrt{(ص-ى)^{2}+(س-ل)^{2}}+\sqrt{(ص-ى')^{2}+(س-ل')^{2}}=\sqrt{(ى-ى')^{2}+(ل-ل')^{2}}$$

ينتج المعادلة $\frac{ص-ى}{س-ل}=\frac{ص-ى'}{س-ل'}$

(الجواب) يبحث عن جعل المعادلة المعلومة جذرية وعن تحليل طرفيها الى عوامل

(الثامن) المطلوب اثبات ان من المعادلات الست وهى

$$ل^2 + ب^2 + ط^2 = ١ \ ، \ ل'ل'' + ب'ب'' + ط'ط'' = ٠ \ ،$$
$$ل'^2 + ب'^2 + ط'^2 = ١ \ ، \ ل ل' + ب ب' + ط ط' = ٠ \ ،$$
$$ل''^2 + ب''^2 + ط''^2 = ١ \ ، \ ل ل'' + ب ب'' + ط ط'' = ٠$$

تنتج المعادلات السبع الآتية وهى

$$ل^2 + ل'^2 + ل''^2 = ١ \ ، \ ل ب + ل'ب' + ل''ب'' = ٠ \ ،$$
$$ب^2 + ب'^2 + ب''^2 = ١ \ ، \ ل ط + ل'ط' + ل''ط'' = ٠ \ ،$$
$$ط^2 + ط'^2 + ط''^2 = ١ \ ، \ ب ط + ب'ط' + ب''ط'' = ٠ \ ،$$
$$ل^2 ل'^2 ل''^2 + ب^2 ب'^2 ب''^2 + ط^2 ط'^2 ط''^2 = ل^2 ب'^2 ط''^2 + ل'^2 ب''^2 ط^2 + ل''^2 ب^2 ط'^2$$

وكذلك تحل هذه التمرينات بان يوضع

$$ل س + ل' ص + ل'' ع = س' \ ،$$
$$ب س + ب' ص + ب'' ع = ص' \ ،$$
$$ط س + ط' ص + ط'' ع = ع'$$

ثم يبحث عن تحصيل المجموع $س'^2 + ص'^2 + ع'^2$ بدلالة س ، ص ، ع بكيفيتين بموجب الارتباطات المعلومة واما من خصوص التحقيق الاخير فانه يبحث عن استنتاج مقدار $ل^2 ل'^2 ل''^2 + ب^2 ب'^2 ب''^2 + ط^2 ط'^2 ط''^2$ من الارتباطات المعلومة وهذا المقدار لا يتغير اذا غير فيه حرف $ل'$ بحرف ب وحرف $ل''$ بحرف ط وحرف $ب''$ بحرف $ط'$

(التاسع) المطلوب اثبات انه لا يمكن حصول المعادلة

$$\frac{١}{ح+س} + \frac{١}{د+س} = \frac{١}{ح'+س} + \frac{١}{د'+س}$$

مهما كان س الا اذا كان ح ، د يساويان على التناظر ح' ، د'

(العاشر) المطلوب اثبات انه لا يمكن حصول المعادلة

$$\frac{ح}{(د+س)^2 + ح^2} = \frac{ح'}{(د'+س)^2 + ح'^2}$$

مهما كان س الا اذا كان ح = ح' ، د = د'

ولاجل

ولاجل حل هذين التمرينين تطبق النظرية الاولى من المبحث الاول

(الحادى عشر) المطلوب تحقيق ان من المعادلات الاربع وهى

$$\text{حح}_{1}+\text{ءه}=\text{ىط} \quad ، \quad \text{ىىَ}+\text{ءءَ}=\text{ح}_{1}\text{ه}_{1} \quad ،$$

$$\text{حَح}_{1}+\text{ءهَ}=\text{ىَطَ} \quad ، \quad \text{ططَ}+\text{ههَ}=\text{ح}_{1}\text{ء}_{1}$$

تنتج المعادلة

$$\text{ح}_{1}\text{ء}_{1}\text{ه}_{1}=\text{حَح}_{1}+\text{ءءَ}_{1}+\text{ههَ}_{1}+\text{حءه}+\text{حَءَهَ}$$

(الجواب) انه يتحصل على هذا الناتج بحذف ى و ىَ و ط و طَ من المعادلات المفروضة

(الفصل الثامن)

(فى المعاملات الغير المعينة)

بند ١٣٠ (تعريف) متى بحث عن تعيين كمية كثيرة الحدود مرتبة على حسب حرف معلوم على حسب شروط ما فان ابسط طريقة تنحصر فى كتابة هذه الكمية مع ترك معاملاتها غير معينة بل ودرجتها احيانا ثم يبين انها تحقق الشروط المفروضة فبذلك تتحصل معادلات تدخل فيها تلك المعاملات وتلك الدرجة مجاهيل عددها كعدد المعادلات المذكورة وبهذه المعادلات تتعين مقادير معاملات كثيرة الحدود ودرجتها ولنطبق هذه القاعدة على قسمة الكميات الكثيرة الحدود وعلى استخراج جذورها فنقول

(المبحث الاول)

(فى قسمة الكميات الكثيرة الحدود)

بند ١٣١ (الحالة التى تكون فيها القسمة ممكنة) ليكن المطلوب قسمة كمية كثيرة الحدود بدرجة م مثل

$$\text{ج}\,\text{س}^{\text{م}}+\text{ج}_{1}\,\text{س}^{\text{م}-1}+\text{ج}_{2}\,\text{س}^{\text{م}-2}+\dots+\text{ج}_{\text{م}}$$

على كمية كثيرة الحدود بدرجة ن مثل

$$د_{٠}\,سه^{ه} + د_{١}\,سه^{ه-١} + د_{٢}\,سه^{ه-٢} + \dots + د_{ه}$$

فيلزم انه اذا ضرب المقسوم عليه فى خارج القسمة يتحصل المقسوم وحينئذ اذا رمزنا بحرف ر لدرجة خارج القسمة تكون درجة حاصل الضرب هى (ه + ر) وبناء على هذا يكون

$$م = ه + ر \quad \text{أو} \quad ر = م - ه$$

وحيث علمت درجة خارج القسمة وبالتبعية عدد معاملاته وهو (ر + ١) فيمكن من بعد الرمز الكل من هذه المعاملات بحرف ان يضرب الخارج فى المقسوم عليه وحيث ان هذا الحاصل بدرجة م فيتركب من حدود عددها (م-١) فبمساواة هذه الحدود بالحدود المناظرة لها من المقسوم تتحصل معادلات عددها (م+١) بدرجة اولى تحتوى على المعاملات المجهولة التى عددها (م - ه + ١) ويكفى لاجل تعيينها حل معادلات عددها (م-ه+١) وأما المعادلات الاخرى التى عددها ه فيجب ان تتحقق من نفسها وتصير معادلات شرطية

بحث ١٣٢ (الحالة التى يكون فيها للقسمة باق) اذا أريد تطبيق طريقة المعاملات الغير المعينة على البحث عن الخارج وعن الباقى فى الحالة التى لا تكون فيها القسمة ممكنة يجب ان تعرض المسئلة بهذه الكيفية وهى

المطلوب ايجاد كمية كثيرة الحدود واذا ضربت فى المقسوم عليه يتحصل حاصل يكون باقى طرحه من المقسوم بدرجة أقل من درجة المقسوم عليه

وفى هذه الحالة يجب مساواة حدود هذا الحاصل التى درجتها ليست أقل من درجة المقسوم عليه وهى ه بالحدود المطابقة لها من المقسوم وبذلك يتحصل على معادلات عددها (م-ه+١) وهى نفس المعادلات التى يتحصل عليها عند البحث عن خارج مضبوط وبهذه المعادلات تتعين جميع معاملات خارج القسمة ويكون الفرق بين المقسوم وحاصل ضرب المقسوم عليه فى خارج القسمة هو الباقى

بحث ١٣٣ (حساب معاملات خارج القسمة) المعادلات التى عددها (م-ه+١) والتى يتعين بواسطتها الخارج لها صورة شهيرة بحيث يصير حلها أسهل جدا فليكن

$$هـ_{٠}\,سه^{م-ه} + هـ_{١}\,سه^{م-ه-١} + هـ_{٢}\,سه^{م-ه-٢} + \dots + هـ_{ك}\,سه^{م-ه-ك} + \dots + هـ_{م-ه}$$

هو

هو الخارج المجهول فمن الواضح انه اذا ضرب هذا الخارج فى المقسوم عليه يوجد

$$\text{د}_{0}\,\text{هـ}_{0}\,\text{سـ}^{\text{م}} + (\text{د}_{1}\,\text{هـ}_{0} + \text{د}_{0}\,\text{هـ}_{1})\,\text{سـ}^{\text{م}-1} + (\text{د}_{2}\,\text{هـ}_{0} + \text{د}_{1}\,\text{هـ}_{1} + \text{د}_{0}\,\text{هـ}_{2})\,\text{سـ}^{\text{م}-2} + \dots$$

$$+ (\text{د}_{\text{ك}}\,\text{هـ}_{0} + \text{د}_{\text{ك}-1}\,\text{هـ}_{1} + \dots + \text{د}_{1}\,\text{هـ}_{\text{ك}-1} + \text{د}_{0}\,\text{هـ}_{\text{ك}})\,\text{سـ}^{\text{م}-\text{ك}} + \dots$$

وبمساواة معاملات هذا الحاصل بمعاملات المقسوم يوجد أن

$$\text{د}_{0}\,\text{هـ}_{0} = \text{ج} \ ،\ \text{د}_{1}\,\text{هـ}_{0} + \text{د}_{0}\,\text{هـ}_{1} = \text{ج}_{1} \ ،\ \text{د}_{2}\,\text{هـ}_{0} + \text{د}_{1}\,\text{هـ}_{1} + \text{د}_{0}\,\text{هـ}_{2} = \text{ج}_{2} \ ،$$

$$\text{د}_{\text{ك}}\,\text{هـ}_{(0)} + \text{د}_{\text{ك}-1}\,\text{هـ}_{1} + \dots + \text{د}_{1}\,\text{هـ}_{\text{ك}-1} + \text{د}_{(0)}\,\text{هـ}_{\text{ك}} = \text{ج}_{\text{ك}} \ ،\ \dots$$

وحينئذ لا تحتوى المعادلة الاولى الا على المجهول $\text{هـ}_{(0)}$ ومتى علم $\text{هـ}_{(0)}$ يتحصل بواسطة المعادلة الثانية على هـ_{1} الذى لا يدخل فيها الا بدرجة اولى ومتى علم $\text{هـ}_{(0)}$ و هـ_{1} يحسب بواسطة المعادلة الثالثة هـ_{2} الذى لا يدخل فيها الا بدرجة اولى وعلى العموم تحتوى كل معادلة على مجهول بدرجة اولى لا يوجد فى المعادلات السابقة لها وبواسطة هذه المعادلة يحسب المجهول المذكور مثلا $\text{هـ}_{\text{ك}}$ يوجد اول مرة فى معامل $\text{سـ}^{\text{م}-\text{ك}}$ بحيث لا تحتوى المعادلات الاولى التى عددها ك على هذا المجهول بخلاف المعادلة التى رتبتها (ك + ١) فانها تحتوى على $\text{هـ}_{\text{ك}}$ بدرجة اولى

بند ١٣٤ (تطبيق) لنطبق الطريقة المتقدمة على مثال فنقول ليكن المطلوب قسمة

$$\text{سـ}^{6} + \text{ج}_{1}\,\text{سـ}^{5} + \text{ج}_{2}\,\text{سـ}^{4} + \text{ج}_{3}\,\text{سـ}^{3} + \text{ج}_{4}\,\text{سـ}^{2} + \text{ج}_{5}\,\text{سـ} + \text{ج}_{6}$$

على

$$\text{سـ}^{2} + \text{ح}\,\text{سـ} + \text{ك}$$

فالخارج يجب ان يكون بدرجة رابعة فلنفرض انه

$$\text{سـ}^{4} + \text{م}_{1}\,\text{سـ}^{3} + \text{م}_{2}\,\text{سـ}^{2} + \text{م}_{3}\,\text{سـ} + \text{م}_{4}$$

وبتكوين حاصل ضربه فى المقسوم يوجد

$$\text{سـ}^{6} + (\text{ح} + \text{م}_{1})\,\text{سـ}^{5} + (\text{ك} + \text{ح}\,\text{م}_{1} + \text{م}_{2})\,\text{سـ}^{4} + (\text{ك}\,\text{م}_{1} + \text{ح}\,\text{م}_{2} + \text{م}_{3})\,\text{سـ}^{3}$$

$$+ (\text{ك}\,\text{م}_{2} + \text{ح}\,\text{م}_{3} + \text{م}_{4})\,\text{سـ}^{2} + (\text{ك}\,\text{م}_{3} + \text{ح}\,\text{م}_{4})\,\text{سـ} + \text{ك}\,\text{م}_{4}$$

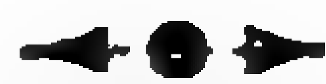
وبمساواة حدود هذا الحاصل بالحدود المناظرة لها من المقسوم توجد المعادلات

$$\text{ح} + \text{م}_1 = \text{ج}_1 \quad \text{و} \quad \text{ك ء} + \text{ح م}_1 + \text{م}_2 = \text{ج}_2 \quad \text{و} \quad \text{ك ء م}_1 + \text{ح م}_2 + \text{م}_3 = \text{ج}_3 \quad \text{و}$$

$$\text{ك ء م}_2 + \text{ح م}_3 + \text{م}_4 = \text{ج}_4$$

وبواسطة الاولى يتعين م_1 وبواسطة الثانية يتعين م_2 حيث علم م_1 وبواسطة الثالثة يتعين م_3 وبواسطة الرابعة يتعين م_4

ويشاهد بدون صعوبة ان هذه الطريقة توصل لنفس الحسابات التى اوردناها فى الجزء الاول



(المبحث الثانى)

(فى استخراج الجذر الميمى لاى كمية كثيرة الحدود)

بند ١٣٥ (الطريقة العمومية) لتكن كثيرة الحدود

$$\text{ج}_{(0)}\text{س}^{\text{ح}} + \text{ج}_1\text{س}^{\text{ح}-1} + \text{ج}_2\text{س}^{\text{ح}-2} + \cdots + \text{ج}_{\text{ح}}$$

ولنفرض ان جذرها الميمى هو

$$\text{ء}_{(0)}\text{س}^{\text{ه}} + \text{ء}_1\text{س}^{\text{ه}-1} + \text{ء}_2\text{س}^{\text{ه}-2} + \cdots + \text{ء}_{\text{ه}}$$

فبموجب التعريف يجب ان يكون

$$\left(\text{ء}_{(0)}\text{س}^{\text{ه}} + \text{ء}_1\text{س}^{\text{ه}-1} + \text{ء}_2\text{س}^{\text{ه}-2} + \cdots + \text{ء}_{\text{ه}}\right)^{\text{م}}$$

$$= \text{ج}_{(0)}\text{س}^{\text{ح}} + \text{ج}_1\text{س}^{\text{ح}-1} + \text{ج}_2\text{س}^{\text{ح}-2} + \cdots + \text{ج}_{\text{ح}}$$

ولاجل ان يكون الطرفان متحدين فى الدرجة يلزم ان يكون

$$\text{ح} = \text{م ه}$$

وحينئذ اذا لم يكن ح مضاعفا الى م تكون المسئلة غير ممكنة واذا كان ح يقبل القسمة على م تكون درجة الجذر هى $\frac{\text{ح}}{\text{م}}$ وحينئذ يعلم عدد معاملاته وهو $\left(\frac{\text{ح}}{\text{م}} + 1\right)$ ويمكن رفع هذا الجذر الى الدرجة الميمية وبذلك تتكون كمية كثيرة الحدود بدرجة ح فبمساواة الحدود الاول التى عددها $\left(\frac{\text{ح}}{\text{م}} + 1\right)$ بالحدود المناظرة لها من كثيرة الحدود المعلومة تتحصل معادلات عددها $\left(\frac{\text{ح}}{\text{م}} + 1\right)$ بها تتعين المعاملات المجهولة

وأما

واما المعادلات التى تبين تساوى الحدود التالية فيجب ان تتحقق من نفسها ان كانت المسئلة ممكنة وتكون معادلات شرطية

بند ١٣٦ (حساب معاملات الجذر) المعادلات التى عددها ($\text{ح}+١$) والتى يتعين بواسطتها الجذر لها صورة شهيرة بها يصير حلها سهلا جدا لانه فى التحليل

$$\left(\text{ء}_{(٠)}\text{س}^{\text{ه}} + \text{ء}_{١}\text{س}^{\text{ه}-١} + \text{ء}_{٢}\text{س}^{\text{ه}-٢} + \cdots + \text{ء}_{\text{ك}}\text{س}^{\text{ه}-\text{ك}} + \cdots + \text{ء}_{\text{ه}}\right)^{\text{م}}$$

الذى فيه ه يساوى $\frac{\text{ح}}{\text{م}}$ لا يحتوى الحد المشتمل على $\text{س}^{\text{ح}}$ الاعلى $\text{ء}_{(٠)}^{\text{م}}$ والحد المحتوى على $\text{س}^{\text{ح}-١}$ يحتوى على $\text{ء}_{(٠)}$ بقوة ($\text{م}-١$) وعلى $\text{ء}_{١}$ بدرجة أولى والحد المحتوى على $\text{س}^{\text{ح}-٢}$ يحتوى على $\text{ء}_{(٠)}$ وعلى $\text{ء}_{١}$ وعلى $\text{ء}_{٢}$ ولا يدخل فيه $\text{ء}_{٢}$ الا بدرجة أولى وعلى العموم لا يدخل $\text{ء}_{\text{ك}}$ فى ادنى حد درجته أعلا من ($\text{ح}-\text{ك}$) ويدخل بدرجة أولى فى معامل الحد المحتوى على $\text{س}^{\text{ح}-\text{ك}}$ وبناء على ذلك يعلم $\text{ء}_{(٠)}$ بواسطة المعادلة الاولى وهى $\text{ء}_{(٠)}^{\text{م}}=\text{ج}_{(٠)}$ بعملية استخراج جذر وحيث علم $\text{ء}_{(٠)}$ فيعلم $\text{ء}_{١}$ الذى لا يدخل فى المعادلة الثانية الا بدرجة أولى بواسطة هذه المعادلة الثانية وحيث علم $\text{ء}_{(٠)}$ و $\text{ء}_{١}$ فبواسطة المعادلة الثالثة يعلم $\text{ء}_{٢}$ الذى لا يدخل فيها الا بدرجة اولى وعلى العموم بواسطة المعادلة التى رتبتها ($\text{ك}+١$) يتعين $\text{ء}_{\text{ك}}$ الذى لا يدخل فيها الا بدرجة اولى لانه لا يوجد فى التحليل الا حد واحد يحتوى على $\text{س}^{\text{ح}-\text{ك}}$ الذى يحتوى على $\text{ء}_{\text{ك}}$ وهو الحد $\text{م}\,\text{ء}_{\text{ك}}\,\text{س}^{\text{ه}-\text{ك}}\left(\text{ء}_{(٠)}\text{س}^{\text{ه}}\right)^{\text{م}-١}$

ويسهل تطبيق هذه الطريقة بالخصوص على استخراج الجذر التربيعى لكمية كثيرة الحدود

(المبحث الثالث)

فى تطبيق ما ذكر على بعض مسائل

بند ١٣٧ (المسئلة الاولى) المطلوب تعيين الارتباط اللازم وجوده بين ح و ك لتكون ذات الحدود الثلاثة وهى

$$س^{٣} + ع\,س + ك$$

قابلة للقسمة على مربع كمية ذات حدين منتخبة انتخابا موافقا مثل $(س - ح)^{٢}$
اذا فرض ان خارج هذه القسمة هو $(س + د)$ يكون

$$س^{٣} + ع\,س + ك = (س - ح)^{٢}\,(س + د) = (س^{٢} - ٢\,ح\,س + ح^{٢})\,(س + د)$$

$$= س^{٣} + (د - ٢ح)\,س^{٢} + (ح^{٢} - ٢ح\,د)\,س + ح^{٢}\,د$$

ومن ذلك يستنتج بمطابقة الطرفين أن

$$د - ٢ح = ٠ \;،\; ح^{٢} - ٢ح\,د = ع \;،\; ح^{٢}\,د = ك$$

وبتعويض د فى المعادلتين الاخيرتين بمقداره وهو ٢ ح المستخرج من المعادلة الاولى يحدث

$$ح^{٢} - ٤ح^{٢} = ع \quad \text{أو} \quad ح = \sqrt{-\frac{ع}{٣}} \;،$$
$$٢ح^{٣} = ك$$

وبحذف ح من هاتين المعادلتين يحدث

$$ك = ٢\left(\sqrt{-\frac{ع}{٣}}\right)^{٣}$$

أو

$$٤ع^{٣} + ٢٧ك^{٢} = ٠$$

وهو الشرط المطلوب

١٣٨ (المسئلة الثانية) المطلوب تعيين المعاملين م و ه بحيث يكون المقدار الجبرى

$$م\,س^{٣} - (٢م^{٢} + ٣ه)\,س^{٢} + (م^{٣} + ٦م\,ه)\,س - ٣م^{٢}\,ه$$

مكعبا كاملا

لاجل ذلك يلزم مطابقة هذا المقدار الجبرى بمكعب كمية ذات حدين مثل $(ح\,س + د)$
أعنى بالكمية

$$ح^{٣}\,س^{٣} + ٣ح^{٢}\,د\,س^{٢} + ٣ح\,د^{٢}\,س + د^{٣}$$

وبذلك توجد المعادلات

$$م = ح^{٣} \;،\; -(٢م^{٢} + ٣ه) = ٣ح^{٢}\,د \;،\; م^{٣} + ٦م\,ه = ٣ح\,د^{٢} \;،\; -٣م^{٢}\,ه = د^{٣}$$

فمن المعادلتين الاخيرتين يوجد أن

$$د =$$

$$ء = -\sqrt[3]{٣م^{٢}ه} \quad ، \quad ح = \frac{م^{٣}+٦مه}{٣\sqrt[3]{٩م^{٤}ه^{٢}}} = \frac{م^{٣}+٦ه}{٣\sqrt[3]{٩مه^{٢}}}$$

وحيث علم ح ، ء فتكون المعادلتان الباقيتان معادلتين شرطيتين فاذا عوض فيهما ح ، ء بمقداريهما تؤل هاتان المعادلتان الى

$$م = \frac{(م^{٢}+٦ه)^{٣}}{٢٧ \times ٩مه^{٢}} \quad ، \quad (١)$$

$$٢م^{٢}+٣ه = \frac{٣(م^{٢}+٦ه)\sqrt[3]{٣م^{٢}ه}}{٩\sqrt[3]{٨١م^{٢}ه^{٤}}} = \frac{(م^{٢}+٦ه)^{٢}}{٣\sqrt[3]{٢٧ه^{٣}}} = \frac{(م^{٢}+٦ه)^{٢}}{٩ه} \quad (٢)$$

وبعدم مقام هذه المعادلة الاخيرة والاختصار يوجد أن

$$م^{٤}-٦هم^{٢}+٩ه^{٢}=٠$$

أو

$$(م^{٢}-٣ه)^{٢}=٠$$

ومن هنا يستخرج

$$ه = \frac{م^{٢}}{٣} \quad (٣)$$

فاذا وضع هذا المقدار فى المعادلة (١) تؤل به الى متطابقة وحينئذ يؤل الشرط المطلوب الى الارتباط (٣) واذن تكون كثيرة الحدود المطلوبة مكعب

$$س\sqrt[3]{م} - م\sqrt[3]{م}$$

كما يتحقق من ذلك بالسهولة



(تمرينات)

(الاول) المطلوب ايجاد الشروط اللازمة والكافية لاجل أن تكون كثيرة الحدود وهى

$$س^{٤}-٤حس^{٣}+٤كس^{٢}+٢ع(م+١)س+(م+١)^{٢}$$

مربع كمية كثيرة الحدود صحيحة بالنسبة الى س

(الجواب) يلزم أن يكون $م+١=ك-\frac{ح^٢}{٤}$

(الثاني) المطلوب تعيين الشرط الذي به تكون كثيرة الحدود وهي

$$حص^٢+ءس ص+هس^٢+وص+رس+ع$$

حاصل ضرب مقدارين جبريين بدرجة أولى بالنسبة الى س و ص

(الجواب) يلزم أن يكون $(ءو-٢حر)^٢=(ء^٢-٤حه)(و^٢-٤حع)$

(الثالث) المطلوب تحليل كثيرة الحدود

$$٢س^٢-٢١س ص-١١ص^٢-س+٣٤ص-٣$$

بهذه الكيفية

(الجواب) يوجد $(٢س+ص-٣)(س-١١ص+١)$

(الرابع) المطلوب وضع المقدار الجبري وهو $٤(س^٤+س^٣+س^٢+س+١)$

بصورة فرق مربعي كميتين كثيرتي الحدود بدرجة ثانية وصحيحتين بالنسبة الى س

(الجواب) يوجد $(٢س^٢+س+٢)^٢-٥س^٢$

(الخامس) المطلوب تعيين الشروط التي بها يكون المقدار الجبري وهو

$$(س-ل)^٢+(ص-ى)^٢-ك(حص^٢+ء^٢س^٢-ح^٢ء^٢)$$

مربع كمية كثيرة الحدود بدرجة اولى بالنسبة الى س و ص

(الجواب) اذا كان $ح>ء$ يلزم ان يكون $ك=\frac{١}{ح^٢}$ و $ل=\pm\sqrt{ح^٢-ء^٢}$ و $ى=٠$

وتكون كثيرة الحدود مربع $\frac{ح\pm س\sqrt{ح^٢-ء^٢}}{ح}$

واذا كان $ح<ء$ يلزم ان يكون $ك=\frac{١}{ء^٢}$, $ل=٠$, $ى=\sqrt{ء^٢-ح^٢}$ وتكون

كثيرة الحدود مربع $\frac{ء\pm س\sqrt{ء^٢-ح^٢}}{ء}$

(السادس) المطلوب وضع $(حس^٣+٣ءس^٢ص+٣هس ص^٢+وص^٣)$ بالصورة

(ل

(ل سـ + ى صـ)^٣ + (ط سـ + ق صـ)^٣

(الجواب) بالمطابقة كثيرتي الحدود ببعضهما يؤخذ م ولا ساعدا م = ل ق − ى ط ثم نحسب الكميات حه − ءَ^٢ ، ء و − هـ^٢ ، ح و − ء هـ ثم (ح و − ء هـ)^٢ − ٤ (ح هـ − ءَ^٢) × (ء و − هـ^٢) وهذه الكمية الاخيرة تساوي م^٦ وبها يعلم م والثلاث الكميات الاخرى بها يعلم ل ط ، ى ق ، ل ق + ى ط ومن هنا يستخرج بالسهولة ل ، ى ، ط ، ق

(الباب الثاني)
في حساب المشتقات

(الفصل الاول)
في حساب مشتقات الدوال المحلولة ذات المتغير الواحد

بند ١٣٩ اذا كانت كميتان متغيرتان مثل سـ ، صـ مرتبطتين احداهما بالاخرى بحيث انه اذا تغيرت الاولى تتغير الثانية تبعا لها يقال ان هاتين الكميتين دالتان احداهما للاخرى فاذا اعتبرت الكمية صـ دالة للكمية سـ يقال للمتغير سـ متغيرا غير متعلق ويبين هذا الارتباط بالرمز صـ = ء (سـ) وفي جميع ما سيأتي نفرض انه متى زاد المتغير سـ بكيفية مستمرة تزيد كذلك الدالة صـ بكيفية مستمرة فمتى زاد المتغير الغير المتعلق سـ بكمية صغيرة جدا ولتكن ح تزيد الدالة تبعا له بكمية صغيرة جدا مثل ك ومتى مالت الزيادة الاولى ح الى الصفر تميل كذلك الزيادة الثانية ك الى الصفر وعموما تميل النسبة ك/ح الواقعة بين زيادة الدالة وزيادة متغيرها الغير المتعلق الى نهاية محدودة ومعينة وهذه النهاية تسمى مشتقة الدالة المفروضة والمشتقة دالة جديدة للمتغير الغير المتعلق سـ نرمز لها بالرمز صَـ او بالرمز ءَ (سـ)

مثلا لنعتبر الدالة صـ = سـ^٢ فاذا زيد المتغير الغير المتعلق سـ بزيادة قدرها ح تؤول الدالة الى

(سـ + ح)^٢ = سـ^٢ + ٢ ح سـ + ح^٢

وتكون زيادة هذه الدالة هي

$$ك = (س+ح)^{٢} - س^{٢} = ٢ح س + ح^{٢}$$

ويمكن جعل ح صغيرا صغرا كافيا بحيث يكون مقدار كل من الحدين ٢ ح س و $ح^{٢}$ صغيرا بقدر ما يراد وبناء على ذلك يصير مجموعهما وهو ك صغيرا كذلك بقدر ما يراد ويعلم من ذلك ان الدالة ص تزيد بكيفية مستمرة متى زاد س بكيفية مستمرة وبقسمة الطرفين على ح يحدث

$$\frac{ك}{ح} = ٢ س + ح$$

فاذا مال ح الى الصفر تميل النسبة $\frac{ك}{ح}$ الواقعة بين زيادة الدالة وزيادة متغيرها الغير المتعلق الى النهاية ٢ س وينتج من ذلك ان للدالة المفروضة مشتقة وهى $ص' = ٢ س$

بند ١٤٠ ولنأخذ ايضا الدالة الاعم وهى $ص = ء س^{م}$ التى فيها الاس م صحيح وموجب والمعامل ء ثابت فاذا زيد المتغير الغير المتعلق س بزيادة ح تؤل الدالة الى

$$ء(س+ح)^{م} = ء س^{م} + \frac{م}{١} ء س^{م-١} ح + \frac{م(م-١)}{١\times٢} ء س^{م-٢} ح^{٢} + \cdots + ء ح^{م}$$

وتكون زيادتها هى

$$ك = ء(س+ح)^{م} = م ء س^{م-١} ح + \frac{م(م-١)}{١\times٢} ء س^{م-٢} ح^{٢} + \cdots + ء ح^{م}$$

ويمكن جعل ح صغيرا صغرا كافيا بحيث يكون لكل حد من حدود الطرف الثانى وبالنسبة لمجموع هذه الحدود وهو ك مقدار صغير بقدر ما يراد ويعلم من ذلك ان الدالة ص تتغير بكيفية مستمرة متى تغير س بكيفية مستمرة وبالقسمة على ح يحدث

$$\frac{ك}{ح} = م ء س^{م-١} + \frac{م(م-١)}{١\times٢} ء س^{م-٢} ح + \cdots + ء ح^{م-١}$$

فاذا مال ح الى الصفر تميل حدود الطرف الثانى التالية للحد الاول الى الصفر وحيث ان عدد هذه الحدود محدود فيميل مجموعها كذلك الى الصفر وحينئذ تميل النسبة $\frac{ك}{ح}$ الى النهاية $م ء س^{م-١}$ وينتج من ذلك ان للدالة المفروضة مشتقة وهى

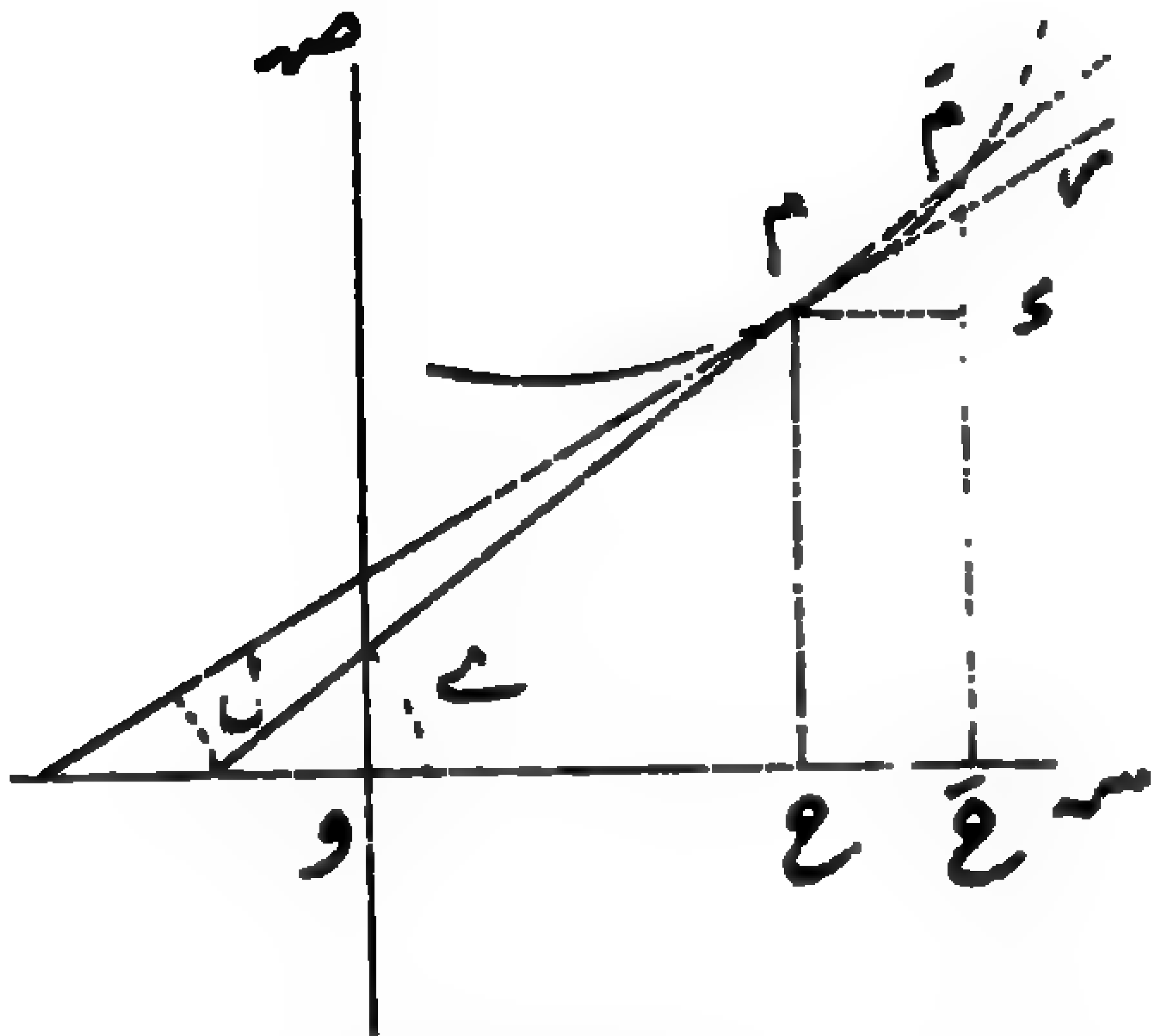
$$ص' = م ء س^{م-١}$$

ويعلم من ذلك انه يتحصل على مشتقة الدالة $ء س^{م}$ بضرب هذه الدالة فى أس س ثم تنقيص الأس بواحد

بند ١٤١

ما ١٤ د وعلى العموم يكون للدوال المستمرة مشتقات وهذه الخاصية التحليلية للدوال يناظرها الخاصية الهندسية للمنحنيات المبينة بهذه الدوال وهى ان هذه المنحنيات تقبل مماسا فى كل نقطة من نقطها

ولبيان ذلك نفرض ان ص = د (س) الدالة المفروضة ثم نرسم فى مستو مستقيمين ثابتين مثل وس ، و ص أحدهما افقى وآخرهما رأسى ثم نأخذ بالابتداء من نقطة و طول و ع على المستقيم الاول مساويا بالمقدار حيثما اتفق للمتغير س ونقيم من نقطة ع عمودا على المستقيم وس ثم نأخذ عليه طول ع م مساويا بالمقدار الدالة ص المطابق للمقدار و ع للمتغير س فحيث كانت الدالة مستمرة يكون مسار النقط التى مثل م المتحصلة مكونا لمنحن يدل على سير الدالة ولكى تسرى طريقة



البيان هذه على جميع المقادير يتفق على أخذ مقادير س الموجبة على يمين نقطة و وعلى أخذ مقادير س السالبة على شمال هذه النقطة وكذا يؤخذ مقدار ص على العمود فوق المستقيم وس ان كان موجبا وتحت هذا المستقيم ان كان سالبا

اذا تقرر هذا وأعطينا للمتغير س زيادة ع عَ = ح تزيد الدالة زيادة ك مبينة بالفرق مَ د بين العمودين أو الراسين المتجاورين م ع ، مَ عَ فاذا رسمنا القاطع م مَ يكون النسبة $\frac{ك}{ح}$ فى المثلث القائم الزاوية م مَ د مساوية لظل الزاوية مَ م د أو الزاوية ى الواقعة بين هذا القاطع والمحور الافقى و س فاذا انقصنا الآن الزيادة ح الى الصفر تقرب النقطة مَ قربا لانهائيا من النقطة م فاذا كان للدالة د (س) مشتقة أعنى اذا مالت النسبة $\frac{ك}{ح}$ الى نهاية ولتكن دَ (س) تميل الزاوية ى الى زاوية نهائية ل تتعين بالمعادلة

ظال = دَ (س)

وحيث ان القاطع م مَ يدور حول نقطة م فيميل الى المستقيم م ر الذى يكون مع المحور الافقى وس زاوية ل وهذا الوضع النهائى وهو م ر للقاطع هو ما يسمى بالماس للمنحنى فى نقطة م

ن ١٤٢ قد أطلقنا اسم مشتقة دالة مستمرة مثل ص = ى (س) على نهاية النسبة بين زيادة الدالة وزيادة متغيرها الغير المتعلق متى مالت هاتان الزيادتان الى الصفر وهذه المشتقة تسمى المشتقة الاولى أو المشتقة برتبة أولى. هذه المشتقة صَ = ىَ (س) دالة مستمرة جديدة للمتغير س لها مشتقة وهذه المشتقة التي هي مشتقة المشتقة برتبة اولى تسمى المشتقة برتبة ثانية للدالة المفروضة ونرمز لها بالرمز صً أو ىً (س) والمشتقة برتبة ثانية وهي صً = ىً (س) دالة مستمرة جديدة للمتغير س ومشتقتها هي المشتقة برتبة ثالثة للدالة المفروضة ونرمز لها بالرمز صٌ أو ىٌ (س) وبالاستمرار بهذه الكيفية تحصل المشتقات بالرتب المختلفة للدالة المفروضة

(في مشتقة المجموع الجبري لعدة دوال)

ن ١٤٣ لتكن ع و و, ر دوال مختلفة مستمرة لمتغير واحد مثل س ولنفرض ان هذه الدوال لها مشتقات ونتفق على بيانها بالرموز عَ وَ و رَ ولنرمز بالرمز ف س للزيادة التي تعطى للمتغير س وبالرموز ف ع , ف و , ف ر للزيادات التي تنتج للدوال ع و و و ر فيكون المجموع الجبري

$$ص = ع + و - ر$$

للدوال المفروضة دالة جديدة للمتغير س فاذا رمزنا للزيادة التي تزيد بها هذه الدالة وهي ص بالرمز ف ص يحدث

$$ف ص = ف ع + ف و - ف ر$$

وحيث ان كل دالة من الدوال ع و و و ر مستمرة فيمكن ان يعطى للمتغير س زيادة ف س صغيرة صغرا كافيا بحيث يكون لكل من الزيادات ف ع و ف و و ف ر وبناء على ذلك يكون أيضا لمجموعها ف ص مقدار صغير بقدر ما يراد ويعلم من ذلك ان الدالة الجديدة تكون مستمرة كذلك

فاذا قسمت جميع الحدود على ف س يحدث

$$\frac{ف ص}{ف س} = \frac{ف ع}{ف س} + \frac{ف و}{ف س} - \frac{ف ر}{ف س}$$

فاذا فرضنا الآن ان الزيادة ف س للمتغير تميل الى الصفر تميل الزيادات ف ع , ف و و ف ر , ف ص الى الصفر كذلك وتميل النسبة $\frac{ف ع}{ف س}$ الى نهاية تكون على حسب التعريف هي مشتقة الدالة ع وهذه المشتقة نرمز لها بالرمز عَ وكذلك تميل النسبتان

$$\frac{ف و}{ف س}$$

$\frac{ف و}{ف سه}$ و $\frac{ف ر}{ف سه}$ الى نهايتين هما مشتقتا الدالتين و و ر وينتج من ذلك ان النسبة $\frac{ف صه}{ف سه}$ تميل كذلك الى نهاية تساوى $\bar{ن} + \bar{و} - \bar{ر}$ واذن يكون للدالة صه مشتقة ويكون

$$\bar{صه} = \bar{ن} + \bar{و} - \bar{ر}$$

ويعلم من ذلك ان مشتقة المجموع الجبرى لعدة دوال تساوى المجموع الجبرى لمشتقات هذه الدوال

(فى مشتقة دالة صحيحة)

بند ١٤٤ كل دالة صحيحة بدرجة م تكون بالصورة

$$ء(سه) = ج سه^{م} + ج_{١} سه^{م-١} + \cdots + ج_{م-١} سه + ج_{م}$$

وهى المجموع الجبرى للحدود المركبة منها وحيث كان كل حد دالة مستمرة الى سه ولها مشتقة فبموجب النظرية السابقة يكون مجموعها دالة مستمرة كذلك للتغير سه ويكون له مشتقة وتكون هذه المشتقة مساوية للمجموع الجبرى لمشتقات حدود الدالة المفروضة وقد شاهدنا (بند ١٤٠) انه لاجل ايجاد مشتقة الدالة الصحيحة ء $سه^{م}$ يلزم ضربها فى الاس م وتنقيص هذا الاس بواحد فاذا طبقت هذه القاعدة على كل حد من حدود الكمية الكثيرة الحدود يوجد أن

$$\bar{ء}(سه) = م ج سه^{م-١} + (م-١) ج_{١} سه^{م-٢} + \cdots + ج_{م-١}$$

فيشاهد أن درجة كل حد تنخفض بواحد وتكون المشتقة دالة صحيحة بدرجة (م-١) والحد الثابت $ج_{م}$ لا يدخل فى المشتقة لانه عندما يزيد سه بزيادة ف سه تكون زيادة الثابت وهى ك صفرا ويكون $\frac{ك}{ف سه} = ٠$ وتكون المشتقة معدومة فاذا اخذت مشتقة هذه المشتقة التى هى برتبة اولى تحصل المشتقة برتبة ثانية للدالة المفروضة وهى

$$\bar{\bar{ء}}(سه) = م(م-١) ج سه^{م-٢} + (م-١)(م-٢) ج_{١} سه^{م-٣} + \cdots + ٢ ج_{م-٢}$$

وهذه المشتقة دالة صحيحة بدرجة (م-٢)

وتكون المشتقة برتبة ثالثة وهى

$$\text{د}'''(\text{س}) = \text{م}(\text{م}-1)(\text{م}-2)\text{ج س}^{\text{م}-3} + \dots$$

بدرجة (م−٣) وهلم جرّا فى كل عملية تنقص الدرجة واحدا
وتكون المشتقة برتبة م بدرجة صفر وحينئذ تكون كمية ثابتة وتكون المشتقات التالية معدومة ويعلم من ذلك ان كل كمية كثيرة الحدود بدرجة م يكون لها مشتقات برتب مختلفة عددها م

(مثال)

$$\text{د}(\text{س}) = \text{س}^3 + 5\text{س}^2 - 7\text{س} + 6$$

فبتطبيق القاعدة السالفة الذكر توجد المشتقات المتوالية وهى

$$\text{د}'(\text{س}) = 3\text{س}^2 + 10\text{س} - 7 \quad \text{و}$$

$$\text{د}''(\text{س}) = 6\text{س} + 10 \quad \text{و}$$

$$\text{د}'''(\text{س}) = 6$$

وليلاحظ ان الحد الثابت من كثيرة الحدود المفروضة لايدخل فى المشتقة برتبة أولى وان معاملى الحدين الاخيرين لايدخلان فى المشتقة برتبة ثانية وهكذا ومعامل الحد الاول هو الذى يدخل فقط فى المشتقة الاخيرة

(فى تحليل دالة صحيحة د(س) على حسب القوى التصاعدية لكمية ح متى وضع فيها س + ح عوضا عن س)

بند ١٤٥ اذا وضع (س+ح) فى الدالة الصحيحة وهى

$$\text{د}(\text{س}) = \text{ج س}^{\text{م}} + \text{ج}_1\text{س}^{\text{م}-1} + \text{ج}_2\text{س}^{\text{م}-2} + \dots + \text{ج}_{\text{م}-1}\text{س} + \text{ج}_{\text{م}}$$

عوضا عن س يحدث

$$\text{د}(\text{س}+\text{ح}) = \text{ج}(\text{س}+\text{ح})^{\text{م}} + \text{ج}_1(\text{س}+\text{ح})^{\text{م}-1} + \text{ج}_2(\text{س}+\text{ح})^{\text{م}-2} + \dots$$

$$+ \text{ج}_{\text{م}-1}(\text{س}+\text{ح}) + \text{ج}_{\text{م}}$$

وبتحليل كل حد على حسب قانون نوتون يحدث

$$\text{د}(\text{س}+\text{ح})$$

$$د(س+ح) = ج\,س^{م} + ج_1\,س^{م-1} + ج_2\,س^{م-2} + \cdots + ج_{م-1}\,س + ج_{م}$$
$$+ \left[م\,ج\,س^{م-1} + (م-1)\,ج_1\,س^{م-2} + (م-2)\,ج_2\,س^{م-3} + \cdots + ج_{م-1} \right] \frac{ح}{1}$$
$$+ \left[م(م-1)\,ج\,س^{م-2} + (م-1)(م-2)\,ج_1\,س^{م-3} + (م-2)(م-3)\,ج_2\,س^{م-4} + \cdots \right] \frac{ح^{2}}{1\times2}$$
$$+ \cdots + م(م-1)\cdots\times3\times2\times1\times ج\,\frac{ح^{م}}{1\times2\times\cdots\times م}$$

و بالتأمل نجد في العمود الاول كثيرة الحدود المفروضة د (س) وفي العمود الثاني الذي هو معامل ح نجد المشتقة برتبة اولى دَ (س) وفي الواقع يشاهد بموجب قاعدة تكوين قانون نوتون انه يتحصل على هذه الكمية الكثيرة الحدود الثانية بضرب كل حد من حدود كثيرة الحدود المفروضة في أس س وتنقيص هذا الاس بواحد والكمية الكثيرة الحدود الموجودة في العمود الثالث الذي هو معامل $\frac{ح^{2}}{1\times2}$ تستنتج من كثيرة الحدود السابقة لها على حسب القانون المتقدم واذن تكون هي مشتقة المشتقة برتبة اولى او المشتقة برتبة ثانية دً (س) لكثيرة الحدود المفروضة والكمية الكثيرة الحدود التالية التي هي معامل $\frac{ح^{3}}{1\times2\times3}$ هي المشتقة برتبة ثالثة $د'''$ (س) وهلم جرا ثم ان معامل $\frac{ح^{م}}{1\times2\cdots\times م}$ في الحد الاخير هو المشتقة برتبة م واذن يكون قانون تحليل د(س+ح) على حسب القوى التصاعدية الى ح هو

$$د(س+ح) = د(س) + دَ(س)\frac{ح}{1} + د''(س)\frac{ح^{2}}{1\times2} + د'''(س)\frac{ح^{3}}{1\times2\times3} + \cdots$$
$$+ د^{م}(س)\frac{ح^{م}}{1\times2\cdots\times م}$$

(في مشتقة حاصل ضرب)

بند ١٤٦ لنعتبر في أول الامر الحاصل ص = ع و الذي هو حاصل ضرب دالتين ع و و مستمرتين لمتغير واحد س ونفرض دائما أن الدالتين ع و و لهما مشتقتان فاذا زيد

المتغير س زيادة ف س تزيد الدوال ع و و و ص زيادات مثل ف ع و ف و و ف ص ويحدث

$$\text{ص} + \text{ف ص} = (\text{ع} + \text{ف ع})\ (\text{و} + \text{ف و})$$

وباجراء عملية الضرب وحذف الكميتين المتساويتين وهما ص و ع و من الطرفين يحدث

$$\text{ف ص} = \text{ع ف و} + \text{و ف ع} + \text{ف ع} \times \text{ف و}$$

فيمكن جعل زيادة المتغير وهي ف س صغيرة صغرا كافيا بحيث يكون كل من الزيادتين ف ع و ف و وبالتبعية مجموعهما ف ص صغيرا بقدر ما يراد ويعلم من ذلك ان الدالة الجديدة ص تكون كذلك دالة مستمرة للمتغير س فاذا قسمت جميع الحدود على ف س يحدث

$$\frac{\text{ف ص}}{\text{ف س}} = \text{ع}\,\frac{\text{ف و}}{\text{ف س}} + \text{و}\,\frac{\text{ف ع}}{\text{ف س}} + \frac{\text{ف ع}}{\text{ف س}} \times \text{ف و}$$

فاذا مالت زيادة المتغير س وهي ف س الى الصفر تميل النسبتان $\frac{\text{ف ع}}{\text{ف س}}$ و $\frac{\text{ف و}}{\text{ف س}}$ الى النهايتين اللتين هما المشتقتان عَ و وَ واما الحد الثالث من الطرف الثانى فانه يؤل الى صفر اذ أن العامل الاول $\frac{\text{ف ع}}{\text{ف س}}$ يميل الى مقدار محدود وهو عَ والعامل الثانى يميل الى الصفر وينتج من ذلك ان النسبة $\frac{\text{ف ص}}{\text{ف س}}$ تميل الى نهاية تساوى ع وَ + و عَ واذن يكون للدالة ص مشتقة ويكون

$$\text{صَ} = \text{ع وَ} + \text{و عَ}$$

ويعلم من ذلك ان مشتقة حاصل ضرب دالتين لمتغير واحد تساوى حاصل ضرب العامل الاول فى مشتقة العامل الثانى زائدا حاصل ضرب العامل الثانى فى مشتقة العامل الاول ومتى كانت دالة مضروبة فى عامل ثابت مثل ح فمن الواضح ان مشتقة حاصل الضرب تساوى حاصل ضرب العامل الثابت فى مشتقة الدالة لاننا اذا فرضنا ان ص = ح ع فمن الواضح انه يكون

$$\text{ف ص} = \text{ح ف ع}$$

واذن يكون

$$\frac{\text{ف ص}}{\text{ف س}} = \text{ح}\,\frac{\text{ف ع}}{\text{ف س}}$$

وينتج من ذلك أن

$$\text{صَ} = \text{ح عَ}$$

بـ ١٤٧ د ولنعتبر الآن حاصل ضرب ثلاث دوال مستمرة لمتغير واحد لها مشتقات وليكن

$$\text{ص} = \text{ى}\,\text{و}\,\text{ر}$$

فاذا اعتبر حاصل ضرب الدالتين الاوليين عاملا واحدا تكون الدالة ص بموجب النظرية المتقدمة مستمرة ولها مشتقة واذن يكون

$$\text{ص}' = (\text{ى}\,\text{و})\,\text{ر}' + \text{ر}\,(\text{ى}\,\text{و})'$$

وحينئذ يكون

$$\text{ص}' = \text{ى}\,\text{و}\,\text{ر}' + \text{ر}\,(\text{ى}\,\text{و}' + \text{و}\,\text{ى}')$$

او

$$\text{ص}' = \text{ى}\,\text{و}\,\text{ر}' + \text{ى}\,\text{ر}\,\text{و}' + \text{و}\,\text{ر}\,\text{ى}'$$

ويعلم من ذلك ان مشتقة حاصل ضرب عدة دوال لمتغير واحد تساوى مجموع حواصل الضرب التي يتحصل عليها بضرب مشتقة كل دالة فى حاصل ضرب جميع الدوال الاخر



(مثالان)

الاول
$$\text{ص} = (\text{٢س} - \text{٥})(\text{٤س}^{\text{٢}} + \text{٧س} - \text{٣})$$

$$\text{ص}' = (\text{٢س} - \text{٥})(\text{٨س} + \text{٧}) + (\text{٤س}^{\text{٢}} + \text{٧س} - \text{٣})\,\text{٢} = \text{٢٤س}^{\text{٢}} - \text{١٢س} - \text{٤١}$$

الثانى
$$\text{ص} = \text{س}^{\text{٣}}(\text{س}^{\text{٢}} + \text{١})(\text{٣س} - \text{١})$$

$$\text{ص}' = \text{س}^{\text{٣}}(\text{س}^{\text{٢}} + \text{١})\,\text{٣} + \text{س}^{\text{٣}}(\text{٣س} - \text{١})\,\text{٢س} + (\text{س}^{\text{٢}} + \text{١})(\text{٣س} - \text{١})\,\text{٣س}^{\text{٢}}$$
$$= \text{١٨س}^{\text{٥}} - \text{٥س}^{\text{٤}} + \text{١٢س}^{\text{٣}} - \text{٣س}^{\text{٢}}$$



(فى مشتقة خارج قسمة)

بـ ١٤٨ د ليكن الخارج

$$\text{ص} = \frac{\text{ى}}{\text{و}}$$

فيكون
$$\text{و}\,\text{ص} = \text{ى}$$

وبناء على ما تقدم يكون

$$\text{ص}\,\text{و}' + \text{و}\,\text{ص}' = \text{ى}'$$

وبتحويل ص و' الى الطرف الثانى يحدث

$$\text{و}\,\text{ص}' = \text{ى}' - \text{ص}\,\text{و}'$$

وبتعويض ص بمقداره $\frac{\text{ى}}{\text{و}}$ يكون

$$\text{و}\,\text{ص}' = \text{ى}' - \frac{\text{ى}}{\text{و}}\,\text{و}'$$

او

$$\text{و}\,\text{ص}' = \frac{\text{و}\,\text{ى}' - \text{ى}\,\text{و}'}{\text{و}}$$

واذن يكون

$$\text{ص}' = \frac{\text{و}\,\text{ى}' - \text{ى}\,\text{و}'}{\text{و}^2}$$

ويعلم من ذلك ان مشتقة خارج قسمة دالتين تساوى حاصل ضرب المقام فى مشتقة البسط ناقصا حاصل ضرب البسط فى مشتقة المقام والناتج مقسوم على مربع المقام

(أمثلة)

الاول

$$\text{ص} = \frac{\text{س} - 1}{\text{س} + 1}$$

$$\text{ص}' = \frac{\text{س} + 1 - (\text{س} - 1)}{(\text{س} + 1)^2} = \frac{2}{(\text{س} + 1)^2}$$

الثانى

$$\text{ص} = \frac{5\text{س}^2 - 3\text{س} + 4}{\text{س}^2 - 1}$$

$$\text{ص}' = \frac{(\text{س}^2 - 1)(10\text{س} - 3) - (5\text{س}^2 - 3\text{س} + 4)\,2\text{س}}{(\text{س}^2 - 1)^2} = \frac{3\text{س}^2 - 18\text{س} + 3}{(\text{س}^2 - 1)^2}$$

الثالث

$$\text{ص} = \frac{\text{ح}^2 - \text{س}^2}{\text{ح}^4 + \text{ح}^2\text{س}^2 + \text{س}^4}$$

$$\text{ص}' = \frac{-2\text{س}(\text{ح}^4 + \text{ح}^2\text{س}^2 + \text{س}^4) - (\text{ح}^2 - \text{س}^2)(2\text{ح}^2\text{س} + 4\text{س}^3)}{(\text{ح}^4 + \text{ح}^2\text{س}^2 + \text{س}^4)^2}$$

$$= \frac{2\text{س}(\text{س}^4 - 2\text{ح}^2\text{س}^2 - 2\text{ح}^4)}{(\text{ح}^4 + \text{ح}^2\text{س}^2 + \text{س}^4)^2}$$

(فى مشتقة القوة)

بند ١٤٩ لنفرض ان المطلوب ايجاد مشتقة الدالة $\text{ع}^{\text{م}}$ (م عدد صحيح موجب) بحيث ان

$$\text{ع}^{\text{م}} = \text{ع} \times \text{ع} \times \text{ع} \ldots \text{ بقدر م}$$ فيكون

$$(\text{ع}^{\text{م}})' = (\text{ع ع ع} \ldots \text{ بقدر م}-\text{١})\,\text{ع}' + (\text{ع ع ع} \ldots \text{ بقدر م}-\text{١})\,\text{ع}' + \ldots \text{ بقدر م}$$

أى
$$(\text{ع}^{\text{م}})' = \text{ع}^{\text{م}-\text{١}}\,\text{ع}' + \text{ع}^{\text{م}-\text{١}}\,\text{ع}' + \ldots \text{ بقدر م}$$

واذن يكون
$$(\text{ع}^{\text{م}})' = \text{م}\,\text{ع}^{\text{م}-\text{١}}\,\text{ع}'$$

ويمكن ايجاد هذا الناتج مباشرة لانه اذا وضع

$$\text{ص} = \text{ع}^{\text{م}}$$

وزاد المتغير س زيادة قدرها ف س تزيد الدالة ع زيادة قدرها ف ع وتزيد الدالة ص زيادة قدرها ف ص ويكون

$$(\text{ص} + \text{ف ص}) = (\text{ع} + \text{ف ع})^{\text{م}}$$

وبالتحليل بموجب قانون نوتون يكون

$$\text{ص} + \text{ف ص} = \text{ع}^{\text{م}} + \text{م}\,\text{ع}^{\text{م}-\text{١}}\,\text{ف ع} + \frac{\text{م}(\text{م}-\text{١})}{\text{١}\times\text{٢}}\,\text{ع}^{\text{م}-\text{٢}}\,\text{ف ع}^{\text{٢}} + \frac{\text{م}(\text{م}-\text{١})(\text{م}-\text{٢})}{\text{١}\times\text{٢}\times\text{٣}}\,\text{ع}^{\text{م}-\text{٣}}\,\text{ف ع}^{\text{٣}} + \ldots$$

واذن يكون

$$\text{ف ص} = \text{م}\,\text{ع}^{\text{م}-\text{١}}\,\text{ف ع} + \frac{\text{م}(\text{م}-\text{١})}{\text{١}\times\text{٢}}\,\text{ع}^{\text{م}-\text{٢}}\,\text{ف ع}^{\text{٢}} + \frac{\text{م}(\text{م}-\text{١})(\text{م}-\text{٢})}{\text{١}\times\text{٢}\times\text{٣}}\,\text{ع}^{\text{م}-\text{٣}}\,\text{ف ع}^{\text{٣}} + \ldots$$

وبقسمة الطرفين على ف س يكون

$$\frac{\text{ف ص}}{\text{ف س}} = \text{م}\,\text{ع}^{\text{م}-\text{١}}\,\frac{\text{ف ع}}{\text{ف س}} + \frac{\text{م}(\text{م}-\text{١})}{\text{١}\times\text{٢}}\,\text{ع}^{\text{م}-\text{٢}}\,\text{ف ع}\cdot\frac{\text{ف ع}}{\text{ف س}} + \frac{\text{م}(\text{م}-\text{١})(\text{م}-\text{٢})}{\text{١}\times\text{٢}\times\text{٣}}\,\text{ع}^{\text{م}-\text{٣}}\,\text{ف ع}^{\text{٢}}\cdot\frac{\text{ف ع}}{\text{ف س}} + \ldots$$

فاذا فرض ان ف س يميل الى الصفر تميل الزيادة ف ع الى الصفر وتميل النسبة $\frac{\text{ف ص}}{\text{ف س}}$ الى المشتقة ص' وتميل النسبة $\frac{\text{ف ع}}{\text{ف س}}$ الى المشتقة ع' ويكون

$$\text{ص}' = (\text{ع}^{\text{م}})' = \text{م}\,\text{ع}^{\text{م}-\text{١}}\,\text{ع}'$$

ويمكن ايجاد هذه المشتقة بدون استعمال قانون نوتون لانه يمكن وضع

$$ص + ف ص = (ى + ف ى)^م$$

فاذا فرض ان $ى + ف ى = ى_١$ يكون

$$ص + ف ص = ى_١^م$$

واذن يكون $ف ص = ى_١^م - ى^م = (ى_١ - ى)(ى_١^{م-١} + ى_١^{م-٢} ى + \cdots + ى^{م-١})$

واذن يكون $\frac{ف ص}{ف س} = \frac{ف ى}{ف س}(ى_١^{م-١} + ى_١^{م-٢} ى + \cdots + ى^{م-١})$

فاذا فرض ان ف س يميل الى الصفر يؤول $ى_١$ الى ى ويميل النسبة $\frac{ف ى}{ف س}$ الى المشتقة ىَ والنسبة $\frac{ف ص}{ف س}$ تميل الى المشتقة صَ وحينئذ يكون

$$صَ = (ى^م)' = م ى^{م-١} ىَ$$

بشرط ولنفرض الآن ان الاس م مساو لكسر موجب وليكن $\frac{ح}{ك}$ فيكون

$$ص = ى^{\frac{ح}{ك}}$$

واذن يكون $ص^ك = ى^ح$

وحيث ان ح , ك عددان صحيحان وموجبان فيمكن أخذ مشتقة الطرفين وتطبيق القاعدة السابقة وبذلك يكون

$$ك ص^{ك-١} صَ = ح ى^{ح-١} ىَ$$

او $$ك ص^ك صَ = ح ى^{ح-١} ص ىَ$$

وحيث ان $ص^ك = ى^ح$, $ص = ى^{\frac{ح}{ك}}$ فيكون

$$صَ = \frac{ح}{ك} \frac{ى^{\frac{ح}{ك}}}{ى} ىَ$$

او $$صَ = \left(ى^{\frac{ح}{ك}}\right)' = \frac{ح}{ك} ى^{\frac{ح}{ك}-١} ىَ$$

فاذا

فاذا عوض $\frac{ح}{ع}$ بعدد م يوجد أن

$$(ع^{م})' = م\,ع^{م-1}\,ع'$$

بند ١٥١ ولنفرض ان م = − ه (ه عدد صحيح أو كسرى) فيكون

$$ص = ع^{-ه}$$

أو

$$ص = \frac{1}{ع^{ه}}$$

واذن يكون

$$ص' = -\frac{ه\,ع^{ه-1}\,ع'}{ع^{2ه}}$$

وحينئذ يكون

$$ص' = -ه\,ع^{-ه-1}\,ع'$$

وبتعويض − ه بعدد م يوجد كذلك أن

$$ص' = م\,ع^{م-1}\,ع'$$

ويعلم من ذلك ان مشتقة اى دالة مرفوعة الى أية قوة تحصل بتنقيص الاس بواحد وضرب الناتج فى درجة القوة ثم فى مشتقة هذه الدالة

فاذا فرض ان ع = س يكون

$$ص' = (س^{م})' = م\,س^{م-1}$$

وهذا القانون قد تحصلنا عليه سابقا (بند ١٤٠)

بند ١٥٢ هذه القاعدة تستعمل لاخذ مشتقات الجذور لان

$$\sqrt[م]{ع} = ع^{\frac{1}{م}}$$

واذن يكون

$$\left(\sqrt[م]{ع}\right)' = \left(ع^{\frac{1}{م}}\right)' = \frac{1}{م}\,ع^{\frac{1}{م}-1}\,ع' = \frac{ع'}{م\sqrt[م]{ع^{م-1}}}$$

وفى الحالة الخصوصية التى يكون فيها م = ٢ يكون

$$\left(\sqrt{ع}\right)' = \frac{ع'}{2\sqrt{ع}}$$

(أمثلة)

(الاول)

$$\text{ص}=\sqrt{\text{٢س}^{٣}-\text{٤س}^{٢}+\text{٥}}$$

$$\text{ص}'=\frac{\text{٦س}^{٢}-\text{٨س}}{\text{٢}\sqrt{\text{٢س}^{٣}-\text{٤س}^{٢}+\text{٥}}}$$

(الثانى)

$$\text{ص}=\text{ح}+\text{د}\sqrt{\text{س}}-\frac{\text{هـ}}{\text{س}}$$

$$\text{ص}'=\frac{\text{د}}{\text{٢}\sqrt{\text{س}}}+\frac{\text{هـ}}{\text{س}^{٢}}$$

(الثالث)

$$\text{ص}=\text{ح}+\frac{\text{د}}{\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}}-\frac{\text{هـ}}{\text{س}\sqrt[٣]{\text{س}}}+\frac{\text{و}}{\text{س}^{٢}}$$

$$\text{ص}'=-\frac{\text{٢د}}{\text{٣س}\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}}+\frac{\text{٤هـ}}{\text{٣س}^{٢}\sqrt[٣]{\text{س}}}-\frac{\text{٢و}}{\text{س}^{٣}}$$

(الرابع)

$$\text{ص}=(\text{ح}+\text{د}\,\text{س}^{\text{ن}})^{\text{م}}$$

$$\text{ص}'=\text{م}\,\text{د}\,\text{ن}\,(\text{ح}+\text{د}\,\text{س}^{\text{ن}})^{\text{م}-١}\,\text{س}^{\text{ن}-١}$$

(الخامس)

$$\text{ص}=\text{س}^{٢}(\text{ح}^{٢}+\text{س}^{٢})\sqrt{\text{ح}^{٢}-\text{س}^{٢}}$$

$$\text{ص}'=\frac{\text{٢ح}^{٤}+\text{ح}^{٢}\text{س}^{٢}-\text{٥س}^{٤}}{\sqrt{\text{ح}^{٢}-\text{س}^{٢}}}\,\text{س}$$

(فى مشتقة الدالة الاسية)

بـ ١٥٣ لاجل ايجاد مشتقة $\text{ح}^{\text{س}}$ نضع

$$\text{ص}=\text{ح}^{\text{س}}$$

ثم نزيد المتغير س زيادة ما ف س فتزيد الدالة ص بزيادة ما ف ص ويكون

$$\text{ف ص}=\text{ح}^{\text{س}+\text{ف س}}-\text{ح}^{\text{س}}$$

وبقسمة

وبقسمة الطرفين على ف س يوجد أن

$$\frac{\text{ف ص}}{\text{ف س}}=\frac{\text{ح}^{\text{س}+\text{ف س}}-\text{ح}^{\text{س}}}{\text{ف س}}$$

وحيث ان $\text{ح}^{\text{س}+\text{ف س}}-\text{ح}^{\text{س}}=\text{ح}^{\text{س}}(\text{ح}^{\text{ف س}}-1)$

فيكون $$\frac{\text{ف ص}}{\text{ف س}}=\frac{\text{ح}^{\text{س}}(\text{ح}^{\text{ف س}}-1)}{\text{ف س}}$$

ولاجل الحصول على نهاية الطرف الثانى عندما يميل ف س الى الصفر نضع

$$\text{ح}^{\text{ف س}}-1=\frac{1}{\text{ه}}$$

فمتى كان ف س صغيرا جدا لا يكون $\text{ح}^{\text{ف س}}$ مخالفا للواحد الا بكمية يسيرة جدا وبناء على ذلك يكون ه كبيرا جدا ومتى مال ف س الى الصفر يميل ه الى ما لا نهاية ويستنتج من هذا الارتباط أن

$$\text{ح}^{\text{ف س}}=1+\frac{1}{\text{ه}}$$

وباخذ لوغاريتمى طرفى هذه المساواة يحدث

$$\text{ف س لو ح}=\text{لو}(1+\frac{1}{\text{ه}})$$

ومن هنا يكون $$\text{ف س}=\frac{\text{لو}(1+\frac{1}{\text{ه}})}{\text{لو ح}}$$

واذن يكون

$$\frac{\text{ف ص}}{\text{ف س}}=\text{ح}^{\text{س}}\cdot\frac{\frac{1}{\text{ه}}}{\frac{\text{لو}(1+\frac{1}{\text{ه}})}{\text{لو ح}}}=\frac{\text{ح}^{\text{س}}\text{لو ح}}{\text{ه لو}(1+\frac{1}{\text{ه}})}$$

وحيث ان البسط لا يحتوى على ه فيكفى ان يبحث عن نهاية المقام ولذا نعلم ان

$$\text{ه لو}(1+\frac{1}{\text{ه}})=\text{لو}(1+\frac{1}{\text{ه}})^{\text{ه}}$$

وحينئذ اذا زاد ه الى ما لا نهاية تميل الكمية $(1+\frac{1}{\text{ه}})^{\text{ه}}$ الى أساس نبير وهو هـ ويكون

$$\text{نها لو}(1+\frac{1}{\text{ه}})^{\text{ه}}=\text{لو هـ}$$

واذن يكون

$$\text{نها}\frac{\text{ف ص}}{\text{ف س}}=\frac{\text{ح}^{\text{س}}\,\text{لوح}}{\text{لو}\left(١+\frac{١}{\text{هـ}}\right)^{\text{هـ}}}=\frac{\text{ح}^{\text{س}}\,\text{لوح}}{\text{لوهـ}}$$

اعنى أن

$$\left(\text{ح}^{\text{س}}\right)'=\frac{\text{ح}^{\text{س}}\,\text{لوح}}{\text{لوهـ}}$$

وحيث ان $\frac{\text{لوح}}{\text{لوهـ}}=\text{لَوح}$ فيكون

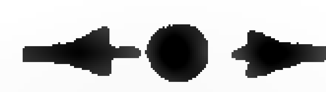
$$\left(\text{ح}^{\text{س}}\right)'=\text{ح}^{\text{س}}\,\text{لَوح}$$

ويعلم من ذلك ان مشتقة الدالة الاسية تساوى حاصل ضرب هذه الدالة الاسية فى اللوغاريتم النيبريانى للاساس

فاذا اعتبرنا الآن الدالة الاسية $\text{ص}=\text{هـ}^{\text{س}}$ (هـ اساس نيبر) يكون $\text{لَوهـ}=١$ ويكون

$$\left(\text{هـ}^{\text{س}}\right)'=\text{هـ}^{\text{س}}$$

ويعلم من ذلك ان مشتقة الدالة الاسية $\text{هـ}^{\text{س}}$ هى نفس هذه الدالة



(فى مشتقة الدالة اللوغاريتمية)

بند ١٥٤ ليكن $\text{ص}=\text{لوس}$ فبتغيير س الى $\text{س}+\text{ف س}$ يؤل ص الى $\text{ص}+\text{ف ص}$ ويكون

$$\text{ص}+\text{ف ص}=\text{لو}(\text{س}+\text{ف س})$$

ويكون $\text{ف ص}=\text{لو}(\text{س}+\text{ف س})-\text{لوس}$

أو $\text{ف ص}=\text{لو}\frac{\text{س}+\text{ف س}}{\text{س}}$

أى $\text{ف ص}=\text{لو}\left(١+\frac{\text{ف س}}{\text{س}}\right)$

فاذا وضع $\text{ف س}=\frac{\text{س}}{\text{م}}$ يكون $\text{س}=\text{م ف س}$ ويكون

$$\text{ف ص}=\text{لو}\left(١+\frac{١}{\text{م}}\right)$$

وبالقسمة

وبالقسمة على ف س يكون

$$\frac{\text{ف ص}}{\text{ف س}}=\frac{\text{لو}\left(1+\frac{1}{\text{م}}\right)}{\text{ف س}}$$

وحيث ان $\text{ف س}=\frac{\text{س}}{\text{م}}$ فيكون

$$\frac{\text{ف ص}}{\text{ف س}}=\frac{\text{م}}{\text{س}}\,\text{لو}\left(1+\frac{1}{\text{م}}\right)$$

أو

$$\frac{\text{ف ص}}{\text{ف س}}=\frac{1}{\text{س}}\,\text{لو}\left(1+\frac{1}{\text{م}}\right)^{\text{م}}$$

فاذا مالت الزيادة ف س الى الصفر يميل م الى $+\infty$ وتميل الكمية $\left(1+\frac{1}{\text{م}}\right)^{\text{م}}$ الى اساس نبير المرموز له بحرف هـ ويكون

$$\text{ص}'=(\text{لو س})'=\frac{\text{لو هـ}}{\text{س}}$$

وفى الجملة النبيرياتية يكون $(\text{لو س})'=\frac{1}{\text{س}}$

(فى مشتقة الجيب)

بند ١٥٥ ليكن المطلوب ايجاد مشتقة الدالة

$$\text{ص}=\text{جا س}$$

فبتغيير س الى س + ف س تؤول الدالة ص الى ص + ف ص ويكون

$$\text{ف ص}=\text{جا}(\text{س}+\text{ف س})-\text{جا س}$$

وحيث ان $\text{جا}(\text{س}+\text{ف س})-\text{جا س}=2\,\text{جا}\frac{\text{ف س}}{2}\,\text{جتا}\left(\text{س}+\frac{\text{ف س}}{2}\right)$

فيكون $\text{ف ص}=2\,\text{جا}\frac{\text{ف س}}{2}\,\text{جتا}\left(\text{س}+\frac{\text{ف س}}{2}\right)$

واذن يكون

$$\frac{\text{ف ص}}{\text{ف س}}=\frac{\text{جا}\frac{\text{ف س}}{2}}{\frac{\text{ف س}}{2}}\times\text{جتا}\left(\text{س}+\frac{\text{ف س}}{2}\right)$$

فمتى مالت الزيادة ف س الى الصفر تميل النسبة $\frac{\text{جا}\frac{\text{ف س}}{2}}{\frac{\text{ف س}}{2}}$ الواقعة بين الجيب وقوسه الى الواحد ويؤول العامل الثانى الى جتا س وبناء على ذلك يكون

صَ = جتا س

و يعلم من ذلك ان مشتقة الجيب تساوى جيب التمام

(فى مشتقة جيب التمام)

بـ١٥٦د لاجل حساب مشتقة جتا س نعلم أن

جتا س = √(١ − جا² س)

واذن يكون

(جتا س)َ = −٢ جا س جتا س ⁄ ٢ √(١ − جا² س) = − جا س

و يعلم من ذلك ان مشتقة جيب التمام تساوى الجيب ماخوذا باشارة مخالفة وبواسطة ما تقدم يمكن ان يتحصل على المشتقات المتوالية للجيب وجيب التمام وها هى

ص = جا س	ص = جتا س
صَ = جتا س	صَ = − جا س
صً = − جا س	صً = − جتا س
صً′ = − جتا س	صً′ = جا س
ص⁽٤⁾ = جا س	ص⁽٤⁾ = جتا س
. . . .	. . . .
. . . .	. . . .

فيشاهد أن المشتقات تحدث بالدور من أربعة الى أربعة وانه بعد اشتقاقين تحدث الدالتان جا س و جتا س باشارتين مخالفتين

(فى مشتقة الظل)

بـ١٥٧د لايجاد مشتقة ظا س نعلم ان

ظا س = جا س ⁄ جتا س

واذن

واذن يكون

$$\left(\text{ظا س}\right)' = \frac{\text{جا}^{2}\text{س} + \text{جتا}^{2}\text{س}}{\text{جتا}^{2}\text{س}} = \frac{1}{\text{جتا}^{2}\text{س}}$$

أعنى أن مشتقة الظل تساوى خارج قسمة الواحد على مربع جيب التمام

(فى مشتقة ظل التمام)

بند ١٥٨ لايجاد مشتقة ظل التمام نضع

$$\text{ظتا س} = \frac{\text{جتا س}}{\text{جا س}}$$

فيكون

$$\left(\text{ظتا س}\right)' = -\frac{1}{\text{جا}^{2}\text{س}}$$

أعنى ان مشتقة ظل التمام تساوى خارج قسمة الواحد على مربع الجيب مأخوذا هذا الخارج باشارة مخالفة

(فى مشتقة القاطع)

بند ١٥٩ لاجل ايجاد مشتقة قا س نعلم أن

$$\text{قا س} = \frac{1}{\text{جتا س}}$$

واذن يكون

$$\left(\text{قا س}\right)' = \frac{\text{جا س}}{\text{جتا}^{2}\text{س}}$$

ويعلم من ذلك ان مشتقة القاطع تساوى خارج قسمة الجيب على مربع جيب التمام

(فى مشتقة قاطع التمام)

بند ١٦٠ لاجل ايجاد مشتقة قتا س نعلم أن

$$\text{قتاس} = \frac{1}{\text{جاس}}$$

واذن يكون

$$(\text{قتاس})' = -\frac{\text{جتاس}}{\text{جا}^{2}\text{س}}$$

ويعلم من ذلك ان مشتقة قاطع التمام تساوى خارج قسمة جيب التمام على مربع الجيب ماخوذا باشارة مخالفة

(فى مشتقات الدوال الدائرية العكسية)

بند ١٦١ تعريف الدوال الدائرية العكسية يحتاج الى بعض توضيحات لانه بكل مقدار للمتغير تحصل أقواس لانهاية لعددها فلنعتبر الدالة

$$\text{ص} = \text{قوس ظاس}$$

فلاجل تعريف الدالة بطريقة مضبوطة يعطى المقدار ص للقوس حينما يكون للظل مقدار مخصوص وليكن س فمتى تغير الظل س بكيفية مستمرة من ابتداء س يتغير احد الاقواس المطابقة له بكيفية مستمرة من ابتداء ص وهذا القوس المتغير هو الدالة ص مثلا اذا فرض ان ص ينعدم حينما يكون س معدوما فان الدالة ص تتغير من ٠ الى $+\frac{\text{ط}}{2}$ متى تغير س من ٠ الى $+\infty$ وتتغير هذه الدالة من ٠ الى $-\frac{\text{ط}}{2}$ متى تغير س من ٠ الى $-\infty$

بند ١٦٢ (مشتقة قوس جاس) لتكن الدالة العكسية

$$\text{ص} = \text{قوس جاس}$$

فيستنتج من ذلك أن

$$\text{س} = \text{جاص}$$

وقد شاهدنا ان النسبة $\frac{\text{ف س}}{\text{ف ص}}$ تميل الى نهاية تساوى جتاص فحينئذ تميل النسبة العكسية $\frac{\text{ف ص}}{\text{ف س}}$ الى نهاية تساوى $\frac{1}{\text{جتاص}}$ ويكون

$$\text{ص}' = \frac{1}{\text{جتاص}}$$

وحيث

وحيث ان جاصه = سه فيكون جتاصه = $\pm\sqrt{1-\text{سه}^2}$ فاذا عوض جتاصه بمقداره يحدث

$$\text{صَه} = \frac{1}{\pm\sqrt{1-\text{سه}^2}}$$

وينبغي اخذ الجذر باشارة عين اشارة جتاصه فاذا كان القوس منتهيا في الربع الاول أوفي الربع الرابع تؤخذ اشارة + واذا كان منتهيا في الربع الثاني أوفي الثالث تؤخذ اشارة −

بند ١٦٣ (مشتقة قوس جتاسه) لاجل ايجاد مشتقة الدالة العكسية

$$\text{صه} = \text{قوس جتا سه}$$

نعلم انه يكون $\text{سه} = \text{جتا صه}$

وحيث ان النسبة $\frac{\text{ف سه}}{\text{ف صه}}$ تميل الى نهاية تساوي − جاصه فتميل النسبة العكسية $\frac{\text{ف صه}}{\text{ف سه}}$ الى نهاية تساوي $-\frac{1}{\text{جاصه}}$ وحينئذ يكون

$$\text{صَه} = -\frac{1}{\text{جاصه}} = -\frac{1}{\pm\sqrt{1-\text{سه}^2}}$$

وينبغي ان يؤخذ الجذر باشارة عين اشارة جاصه

بند ١٦٤ (مشتقة قوس ظاسه) لاجل ايجاد مشتقة الدالة

$$\text{صه} = \text{قوس ظاسه}$$

نضع $\text{سه} = \text{ظاصه}$

فحيث ان النسبة $\frac{\text{ف سه}}{\text{ف صه}}$ تميل الى نهاية تساوي $\frac{1}{\text{جتا}^2\text{صه}}$ فتميل النسبة العكسية $\frac{\text{ف صه}}{\text{ف سه}}$ الى نهاية تساوي $\text{جتا}^2\text{ صه}$ واذن يكون

$$\text{صَه} = \text{جتا}^2\text{ صه}$$

وحيث ان $\text{جتا}^2\text{صه} = \frac{1}{1+\text{ظا}^2\text{صه}}$ فيكون

$$\text{صَ} = \frac{1}{1+\text{طا}^{2}\text{ص}} = \frac{1}{1+\text{س}^{2}}$$

بـ١٦٥ د (مشتقة قوس ظتاس) لاجل ايجاد مشتقة الدالة

$$\text{ص} = \text{قوس ظتاس}$$

نضع $\text{س} = \text{ظتاص}$

فحيث ان النسبة $\frac{\text{فى س}}{\text{فى ص}}$ تميل الى نهاية تساوى $-\frac{1}{\text{جا}^{2}\text{ص}}$ فتميل النسبة العكسية الى $-\text{جا}^{2}\text{ص}$ ويكون

$$\text{صَ} = -\text{جا}^{2}\text{ص}$$

وحيث ان $\text{جا}^{2}\text{ص} = \frac{1}{1+\text{ظتا}^{2}\text{ص}} = \frac{1}{1+\text{س}^{2}}$ فيكون

$$\text{صَ} = -\frac{1}{1+\text{س}^{2}}$$

بـ١٦٦ د (مشتقة قوس قا س) لتكن الدالة

$$\text{ص} = \text{قوس قا س}$$

فنها يستنتج أن $\text{س} = \text{قا ص}$

وحيث ان النسبة $\frac{\text{فى س}}{\text{فى ص}}$ تميل الى نهاية تساوى $\frac{\text{جاص}}{\text{جتا}^{2}\text{ص}}$ فتميل النسبة العكسية $\frac{\text{فى ص}}{\text{فى س}}$ الى نهايه تساوى $\frac{\text{جتا}^{2}\text{ص}}{\text{جاص}}$ واذن يكون

$$\text{صَ} = \frac{\text{جتا}^{2}\text{ص}}{\text{جاص}}$$

وحيث ان $\text{جتا}^{2}\text{ص} = \frac{1}{\text{قا}^{2}\text{ص}} = \frac{1}{\text{س}^{2}}$ و $\text{جاص} = \frac{\sqrt{\text{قا}^{2}\text{ص} - 1}}{\text{قاص}} = \frac{\sqrt{\text{س}^{2} - 1}}{\text{س}}$

فيكون

فيكون

$$\acute{\text{ص}} = \frac{1}{\text{س}\sqrt{\text{س}^2 - 1}}$$

وينبغي أخذ الجذر بإشارة عين إشارة قاص

بند ١٦٧ (مشتقة قوس قتا س) ولتكن الدالة

$$\text{ص} = \text{قوس قتا س}$$

فمنها يستنتج أن

$$\text{س} = \text{قتا ص}$$

وحيث علم أن النسبة $\frac{\text{ف س}}{\text{ف ص}}$ تميل الى نهاية تساوي $-\frac{\text{جتا ص}}{\text{جا}^2\text{ص}}$ فتميل النسبة العكسية $\frac{\text{ف ص}}{\text{ف س}}$ الى نهاية تساوي $-\frac{\text{جا}^2\text{ص}}{\text{جتا ص}}$ وإذن يكون

$$\acute{\text{ص}} = -\frac{\text{جا}^2\text{ص}}{\text{جتا ص}}$$

وحيث ان $\text{جا}^2\text{ص} = \frac{1}{\text{قتا}^2\text{ص}}$ و $\text{جتا ص} = \frac{\sqrt{\text{قتا}^2\text{ص} - 1}}{\text{قتا ص}}$ فيكون

$$\acute{\text{ص}} = -\frac{1}{\text{قتا}^2\text{ص}} : \frac{\sqrt{\text{قتا}^2\text{ص} - 1}}{\text{قتا ص}} = -\frac{1}{\text{س}^2} : \frac{\sqrt{\text{س}^2 - 1}}{\text{س}} = -\frac{1}{\text{س}\sqrt{\text{س}^2 - 1}}$$

اعني ان

$$\acute{\text{ص}} = -\frac{1}{\text{س}\sqrt{\text{س}^2 - 1}}$$

وينبغي أخذ الجذر بإشارة عين إشارة قتا ص

بند ١٦٨ الى هنا قد وجدنا مشتقات الدوال البسيطة التي تعتبر عادة في العلوم الرياضية ومن المهم حفظها وهاك جدولا جامعا لتلك المشتقات

الدالة	المشتقة
$\text{ص} = \text{س}^{\text{م}}$	$\text{ص}' = \text{م}\,\text{س}^{\text{م}-1}$ (م عدد ثابت حيثما اتفق)
$\text{ص} = \text{د}^{\text{س}}$	$\text{ص}' = \text{د}^{\text{س}}\,\text{لوَ د}$
$\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}$	$\text{ص}' = \text{هـ}^{\text{س}}$
$\text{ص} = \text{لو س}$	$\text{ص}' = \frac{\text{لو هـ}}{\text{س}} = \frac{1}{\text{س لوَ د}}$
$\text{ص} = \text{لوَ س}$	$\text{ص}' = \frac{1}{\text{س}}$
$\text{ص} = \text{جا س}$	$\text{ص}' = \text{جتا س}$
$\text{ص} = \text{جتا س}$	$\text{ص}' = -\,\text{جا س}$
$\text{ص} = \text{ظا س}$	$\text{ص}' = \frac{1}{\text{جتا}^{2}\,\text{س}}$
$\text{ص} = \text{ظتا س}$	$\text{ص}' = -\frac{1}{\text{جا}^{2}\,\text{س}}$
$\text{ص} = \text{قا س}$	$\text{ص}' = \frac{\text{جا س}}{\text{جتا}^{2}\,\text{س}}$
$\text{ص} = \text{قتا س}$	$\text{ص}' = -\frac{\text{جتا س}}{\text{جا}^{2}\,\text{س}}$
$\text{ص} = \text{قوس جا س}$	$\text{ص}' = \frac{1}{\pm\sqrt{1-\text{س}^{2}}}$
$\text{ص} = \text{قوس جتا س}$	$\text{ص}' = \frac{-1}{\pm\sqrt{1-\text{س}^{2}}}$
$\text{ص} = \text{قوس ظا س}$	$\text{ص}' = \frac{1}{1+\text{س}^{2}}$
$\text{ص} = \text{قوس ظتا س}$	$\text{ص}' = -\frac{1}{1+\text{س}^{2}}$
$\text{ص} = \text{قوس قا س}$	$\text{ص}' = \frac{1}{\text{س}\sqrt{\text{س}^{2}-1}}$
$\text{ص} = \text{قوس قتا س}$	$\text{ص}' = \frac{-1}{\text{س}\sqrt{\text{س}^{2}-1}}$

(فى مشتقة دالة دالة)

بند ١٦٩ – يمكن بواسطة الدوال البسيطة التى ذكرناها تكوين دوال مركبة لانهاية لعددها فليكن ص دالة مثل د(ع) للدالة ع التى نفسها دالة مثل د١ (س) للمتغير س فيمكن بتوسط المتغير ع اعتبار ص دالة الى س ويقال ان ص دالة دالة س ونفرض أن ع دالة مستمرة للمتغير س وأن لها مشتقة عَ أو دَ١ (س) وان د (ع) دالة مستمرة للمتغير ع لها مشتقة دَ (ع) فاذا زيد س زيادة مّا ف س تزيد الدالة ع زيادة مّا ف ع واذن تزيد الدالة ص زيادة مّا ف ص ويعلم من ذلك ان ص دالة مستمرة للمتغير س ومن الواضح أن

$$\frac{\text{ف ص}}{\text{ف س}} = \frac{\text{ف ص}}{\text{ف ع}} \times \frac{\text{ف ع}}{\text{ف س}}$$

فاذا فرض ان الزيادة ف س تميل الى الصفر فان النسبة $\frac{\text{ف ع}}{\text{ف س}}$ تميل الى نهاية تساوى المشتقة عَ وتميل النسبة $\frac{\text{ف ص}}{\text{ف ع}}$ الى نهاية تساوى دَ (ع) وحينئذ تميل النسبة $\frac{\text{ف ص}}{\text{ف س}}$ الى نهاية تساوى الحاصل دَ (ع) × عَ وينتج من ذلك ان مشتقة ص معتبرة دالة الى س هى

$$\text{صَ} = \text{دَ}(\text{ع}) \times \text{عَ}$$

ويعلم من ذلك ان مشتقة دالة دالة تساوى حاصل ضرب مشتقتى الدالتين المركبتين لها

بند ١٧٠ – هذه النظرية يمكن تعميمها فلتكن ص دالة مثل د (ع) للكمية ع التى نفسها دالة مثل د١ (و) للكمية و التى نفسها دالة مثل د٢ (س) للمتغير س فبتوسط الكميتين ع و و يمكن اعتبار ص دالة للمتغير س فلنفرض ان الدوال د (ع) و د١ (و) و د٢ (س) مستمرة ولها مشتقات ولتكن دَ (ع) و دَ١ (و) و دَ٢ (س) فاذا زيد المتغير س زيادة مّا ف س تزيد الدالة و زيادة مّا ف و واذن تزيد الدالة ع زيادة مّا ف ع وبناء على ذلك تزيد الدالة ص زيادة مّا ف ص ومن الواضح ان

$$\frac{\text{ف ص}}{\text{ف س}} = \frac{\text{ف ص}}{\text{ف ع}} \cdot \frac{\text{ف ع}}{\text{ف و}} \cdot \frac{\text{ف و}}{\text{ف س}}$$

فيشاهد انه متى مالت الزيادة ف س الى الصفر تميل النسب $\frac{\text{ف و}}{\text{ف س}}$ و $\frac{\text{ف ع}}{\text{ف و}}$ و $\frac{\text{ف ص}}{\text{ف ع}}$

على التناظر الى نهايات وَ و $\text{ءَ}(\text{و})$ و $\text{ءَ}(\text{ع})$ وتميل النسبة $\frac{\text{ف ص}}{\text{ف س}}$ الى نهاية تساوى الحاصل $\text{ءَ}(\text{ع}) \times \text{ءَ}(\text{و}) \times \text{وَ}$ وينتج من ذلك ان مشتقة ص معتبرة دالة للتغير س هى

$$\text{صَ} = \text{ءَ}(\text{ع}) \times \text{ءَ}(\text{و}) \times \text{وَ}$$

بند ١٧١ حيث ان الدوال البسيطة التى تقدم ذكرها لها مشتقات فبموجب النظرية المتقدمة ينتج ان الدوال المركبة التى تتكون بتوافق هذه الدوال البسيطة بكيفية حيثما اتفق لها مشتقات كذلك وهاك بعض أمثلة على ذلك

(الاول) $\text{ص} = \text{جا س}^{٢}$ فاذا وضعنا $\text{ع} = \text{س}^{٢}$ يكون $\text{ص} = \text{جا ع}$ وتكون ص دالة دالة فبتطبيق النظرية المتقدمة يكون

$$\text{صَ} = \text{جتا ع} \times \text{عَ} = ٢\,\text{س جتا س}^{٢}$$

(الثانى) $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{جا س}}$ فاذا وضعنا $\text{ع} = \text{جا س}$ تحصل كذلك دالة دالة وهى $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{ع}}$ ويكون

$$\text{صَ} = \text{هـ}^{\text{ع}} \times \text{عَ} = \text{هـ}^{\text{جا س}}\ \text{جتا س}$$

(الثالث) $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{جا س}^{٢}}$ فاذا وضع $\text{و} = \text{س}^{٢}$, $\text{ع} = \text{جا و}$ توجد دالة $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{ع}}$ أكثر تركيبا من السابقتين وبموجب النظرية المذكورة يكون

$$\text{صَ} = \text{هـ}^{\text{ع}} \times \text{جتا و} \times ٢\,\text{س} = ٢\,\text{س}\ \text{هـ}^{\text{جا س}^{٢}}\ \text{جتا س}^{٢}$$

(الرابع) $\text{ص} = \text{لوَ}\left(\text{س} + \sqrt{١ + \text{س}^{٢}}\right)$ فبوضع $\text{ع} = \text{س} + \sqrt{١ + \text{س}^{٢}}$ تنتج الدالة $\text{ص} = \text{لوَ ع}$ التى مشتقتها

$$\text{صَ} = \frac{١}{\text{ع}}\,\text{عَ} = \frac{١ + \frac{\text{س}}{\sqrt{١ + \text{س}^{٢}}}}{\text{س} + \sqrt{١ + \text{س}^{٢}}} = \frac{١}{\sqrt{١ + \text{س}^{٢}}}$$

(الخامس) $\text{ص} = \text{سَ}^{\text{س}}$ فيتنبه لانه بموجب تعريف اللوغاريتمات يكون

$\text{س} =$

$س = هـ^{لو س}$ وحينئذ يمكن وضع هذه الدالة بالصورة $ص = هـ^{س لو س}$ واذا وضع $ع = س لو س$

توجد الدالة لدالة وهى $ص = هـ^{ع}$ التى مشتقتها

$$صَ = هـ^{ع} عَ = هـ^{ع} (١ + لو س) = س^{س} (١ + لو س)$$

وبالتعود يتوصل الى تحليل الدوال المركبة عقلا بدون استعمال حروف مساعدة مثل ع , و

(تمرينات)

(الاول) المطلوب ايجاد مشتقة الدالة

$$ص = قوس جا س - \sqrt{١ - س^{٢}}$$

(الجواب) $صَ = \frac{١ + س}{\sqrt{١ - س^{٢}}}$

(الثانى) المطلوب ايجاد مشتقة الدالة $ص = ظا س - ظتا س$

(الجواب) $صَ = \frac{١}{جا^{٢} س جتا^{٢} س}$

(الثالث) المطلوب ايجاد مشتقة الدالة $ص = س (لو س - ١)$

(الجواب) $صَ = لو س$

(الرابع) المطلوب ايجاد مشتقة الدالة $ص = هـ^{س} (س - ١)$

(الجواب) $صَ = س هـ^{س}$

(الخامس) المطلوب ايجاد مشتقة الدالة $ص = د (حـ + م س^{٢})$

(الجواب) يوجد $صَ = دَ (حـ + م س^{٢})\ ٢ م س$

(السادس) المطلوب ايجاد مشتقة الدالة $ص = د \left(\frac{حـ}{س}\right)$

(الجواب) $صَ = - \frac{حـ}{س^{٢}} دَ \left(\frac{حـ}{س}\right)$

(السابع) المطلوب ايجاد مشتقة

$$ص = \frac{١}{س^{٢}} د \left(\frac{س + حـ}{س - م}\right)$$

(الجواب) $\text{ص}' = -\frac{\text{٢}}{\text{س}^{\text{٣}}}\ \text{ء}\left(\frac{\text{س}+\text{ح}}{\text{م}-\text{س}}\right) + \frac{\text{ح}+\text{م}}{\text{س}^{\text{٢}}(\text{م}-\text{س})^{\text{٢}}}\ \text{ء}'\left(\frac{\text{س}+\text{ح}}{\text{م}-\text{س}}\right)$

(الثامن) المطلوب ايجاد مشتقة

$$\text{ص} = \text{لو}'\left(\text{س} + \sqrt{\text{١}+\text{س}^{\text{٢}}}\right)$$

(الجواب) $\text{ص}' = \frac{\text{١}}{\sqrt{\text{١}+\text{س}^{\text{٢}}}}$

(التاسع) المطلوب ايجاد مشتقة الدالة

$$\text{ص} = \text{قوس جتا}\left(\frac{\text{ح جتا س}+\text{ء}}{\text{ء جتا س}+\text{ح}}\right)$$

(الجواب) $\text{ص}' = \frac{\sqrt{\text{ح}^{\text{٢}}-\text{ء}^{\text{٢}}}}{\text{ء جتا س}+\text{ح}}$

(العاشر) المطلوب ايجاد مشتقة الدالة

$$\text{ص} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}\ \text{لو}'\left(\frac{\text{١}-\text{جتا س}}{\text{١}+\text{جتا س}}\right)$$

(الجواب) $\text{ص}' = \frac{\text{١}}{\text{جا س}}$

(الحادى عشر) المطلوب ايجاد مشتقة

$$\text{ص} = \text{قوس ظا}\ \frac{\text{ح}+\text{س}}{\text{١}-\text{ح س}}$$

(الجواب) $\text{ص}' = \frac{\text{١}}{\text{١}+\text{س}^{\text{٢}}}$

(الثانى عشر) المطلوب ايجاد مشتقة

$$\text{ص} = \text{قوس جا}\ \text{٢س}\sqrt{\text{١}-\text{س}^{\text{٢}}}$$

(الجواب) $\text{ص}' = \frac{\text{٢}}{\sqrt{\text{١}-\text{س}^{\text{٢}}}}$

(الثالث عشر) المطلوب ايجاد مشتقة

$$\text{ص} = \frac{\text{١}}{\text{٦}}\ \text{لو}'\left(\frac{(\text{س}-\text{١})^{\text{٢}}}{\text{س}^{\text{٢}}+\text{س}+\text{١}}\right) - \frac{\text{١}}{\sqrt{\text{٣}}}\ \text{قوس ظا}\ \frac{\text{٢س}+\text{١}}{\sqrt{\text{٣}}}$$

(الجواب)

(الجواب) $\text{صَ} = \frac{1}{\text{س}^2 - 1}$

(الرابع عشر) المطلوب ايجاد مشتقة

$$\text{ص} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ \text{لو}\ \frac{\sqrt{1+\text{س}^4}+\text{س}\sqrt{2}}{1-\text{س}^2} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\ \text{قوس جا}\ \frac{\text{س}\sqrt{2}}{1+\text{س}^2}$$

(الجواب) $\text{صَ} = \frac{\text{س}^2}{(1-\text{س}^4)\sqrt{1+\text{س}^4}}$

(الفصل الثانى)
(فى معرفة تغيير الدوال)

بند ١٧٢ لتكن د (س) دالة مستمرة مشتقتها دَ (س) فقد أطلقنا اسم مشتقة دالة على نهاية النسبة بين الزيادة ك للدالة والزيادة ح للمتغير متى مالت كلتا هاتين الزيادتين الى الصفر

فمتى كانت الزيادة ح صغيرة جدا تكون النسبة $\frac{\text{ك}}{\text{ح}}$ قريبة جدا من نهايتها وحينئذ يكون

$$\frac{\text{ك}}{\text{ح}} = \text{دَ}(\text{س}) + \text{ل}$$

واذن يكون

$$\text{ك} = \text{ح}\left\{\text{دَ}(\text{س}) + \text{ل}\right\}$$

(ل كمية صغيرة جدا تنعدم عندما يكون ح = ٠) فاذا لم تكن المشتقة دَ (س) معدومة يمكن تعيين كمية موجبة ے بحيث اذا أعطى الى ح مقدار موجب حيثما اتفق أقل من ے يكون المقدار المطلق للكمية ل أقل من المقدار المطلق للمشتقة دَ (س) واذن تكون اشارة الكمية الموضوعة بين القوسين عين اشارة المشتقة دَ (س) وحيث كانت الزيادة ح موجبة فينتج من ذلك ان الزيادة ك للدالة تكون اشارتها عين اشارة المشتقة دَ (س) وحينئذ اذا كانت المشتقة موجبة تكون الزيادة ك موجبة وبناء على ذلك اذا أعطى الى ح أى مقدار أقل من ے يكون د (س+ح) أكبر من د (س) واذا كانت المشتقة سالبة تكون الزيادة ك سالبة واذن يكون د(س+ح) أقل من د (س) ويعلم من ذلك انه متى زاد المتغير من ابتداء مقدار ما س_1

وكانت المشتقة موجبة يبتدئ تغير الدالة بالزيادة واذا كانت المشتقة سالبة يبتدئ تغير الدالة بالنقص

ولنفرض الآن ان مشتقة الدالة تكون على الدوام موجبة بجميع مقادير سه المحصورة بين سه$_{1}$ و سه$_{2}$ (سه$_{2}$ أكبر من سه$_{1}$) فمن الواضح بموجب ما تقدم انه اذا زاد سه من سه$_{1}$ الى سه$_{2}$ تأخذ الدالة فى الزيادة واذا كانت المشتقة سالبة بجميع مقادير سه المحصورة بين سه$_{1}$ و سه$_{2}$ تأخذ الدالة فى التناقص

وهذه القضية حقيقية ولو انعدمت بمقدار الى سه محصور بين سه$_{1}$ و سه$_{2}$ لانه يكفى ان لا تتغير اشارتها مثلا اذا فرضنا ان المشتقة موجبة بجميع مقادير سه المحصورة بين سه$_{1}$ و سه$_{2}$ وتنعدم بمقدار متوسط وليكن م ورمزنا بحرف ى لكمية موجبة صغيرة جدا فعندما يتغير سه من سه$_{1}$ الى ح ــ ى تكون المشتقة موجبة وتزيد الدالة وعندما يتغير سه من ح + ى الى سه$_{2}$ تكون المشتقة موجبة وتزيد الدالة كذلك وحيث ان المسافة ٢ ى صغيرة بقدر ما يراد وان الدالة مستمرة فينتج من ذلك ان الدالة تأخذ على الدوام فى الازدياد متى زاد سه من سه$_{1}$ الى سه$_{2}$

بند ١٧٣ متى تزايدت دالة زمنا ما ثم تناقصت فانها تمر بنهاية كبرى أعنى بمقدار اكبر من جميع المقادير المجاورة وبالعكس أى متى تناقصت دالة زمنا ما ثم تزايدت بعد ذلك تمر بنهاية صغرى أعنى بمقدار أصغر من جميع المقادير المجاورة

ففى الحالة الاولى حيث ان الدالة تبتدئ بالزيادة تكون المشتقة فى أول الامر موجبة وحيث ان الدالة تأخذ فى النقص بعد ذلك فتصير المشتقة سالبة ويعلم من ذلك انه اذا مرت الدالة بنهاية كبرى تتغير اشارة المشتقة وتصير سالبة بعد ان كانت موجبة

وفى الحالة الثانية حيث ان الدالة تبتدئ بالنقص فتكون المشتقة فى أول الامر سالبة وحيث ان الدالة تتزيد بعد ذلك فتصير المشتقة موجبة ويعلم من ذلك انه متى مرت الدالة بنهاية صغرى تتغير اشارة المشتقة وتصير موجبة بعد ان كانت سالبة

والعكس بالعكس أى انه متى تغيرت اشارة المشتقة تمر الدالة بنهاية كبرى او بنهاية صغرى واذا تغيرت المشتقة من الايجاب الى السلب فحيث ان الدالة تكون متزايدة فى أول الامر ثم تأخذ فى التناقص فتمر بنهاية كبرى واذا تغيرت المشتقة من السلب الى

الايجاب

الايجاب فحيث ان الدالة تأخذ فى التناقص ثم تصير متزايدة فتمر بنهاية صغرى وعادة تكون مشتقة الدالة المستمرة محدودة ومستمرة كذلك وتتغير اشارتها بعدم مرورها بالمقدار صفر المتوسط وحينئذ نحصل عموما على مقادير سه التى بها تكون الدالة نهاية كبرى أو نهاية صغرى بالبحث عن مقادير سه التى تنعدم بها المشتقة والتى بها تتغير اشارتها

(أمثلة)

بند ١٧٤ (مسئلة اولى) المطلوب معرفة تغير حجم اسطوانة مستديرة قائمة سطحها الكلى ثابت

لاجل ذلك نرمز بحرف سه لنصف قطر القاعدة وبحرف صه لارتفاعها ونفرض ان السطح الكلى المعلوم هو $2\,\text{ط}\,\text{ح}^2$ فنجد الارتباط

$$2\,\text{ط}\,\text{سه}^2 + 2\,\text{ط}\,\text{سه}\,\text{صه} = 2\,\text{ط}\,\text{ح}^2$$

او

$$\text{سه}^2 + \text{سه}\,\text{صه} = \text{ح}^2$$

لكن حجم الاسطوانة مرموزاله بحرف ع هو

$$\text{ع} = \text{ط}\,\text{سه}^2\,\text{صه}$$

فاذا عوض صه بمقداره المستخرج من الارتباط السابق وهو

$$\text{صه} = \frac{\text{ح}^2 - \text{سه}^2}{\text{سه}}$$

يحدث

$$\text{ع} = \text{ط}\,\text{سه}\left(\text{ح}^2 - \text{سه}^2\right) = \text{ط}\left(\text{ح}^2\,\text{سه} - \text{سه}^3\right)$$

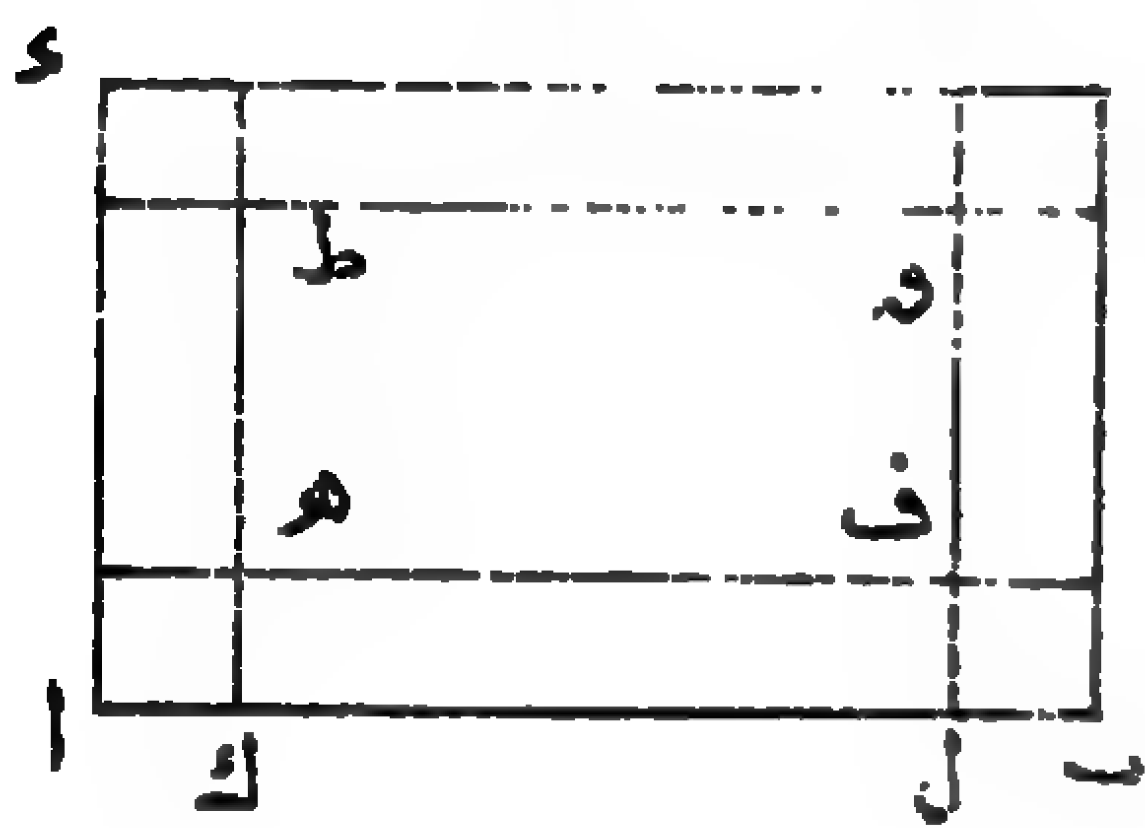
وهذه دالة للتغير الغير المتعلق سه

ومن المعلوم انه يجب ان يكون مقدارا سه و صه موجبين ولا يمكن ان يتغير نصف قطر القاعدة وهو سه الا من 0 الى ح فحتى تغير سه من 0 الى ح يشاهد ان الحجم يبتدئ من الصفر ثم يعود اليه مع مروره بمقادير محدودة وموجبة ويبتدئ بالزيادة ثم يصير بعد ذلك متناقصا وبناء على ذلك يمر بنهاية كبرى ولاجل معرفة تغير هذه الدالة بطريقة تامة نأخذ مشتقتها فنجد ان

$$\bar{\text{ع}} = \text{ط}\left(\text{ح}^2 - 3\,\text{سه}^2\right) = 3\,\text{ط}\left(\frac{\text{ح}^2}{3} - \text{سه}^2\right)$$

فالمشتقة موجبة بمقادير س الموجبة والاقل من $\frac{ح}{\sqrt{٣}}$ وسالبة بمقادير س الاكبر من $\frac{ح}{\sqrt{٣}}$ وحينئذ اذا زيد س من ٠ الى $\frac{ح}{\sqrt{٣}}$ يأخذ الحجم في الزيادة من الصفر الى مقدار يكون نهاية كبرى واذا زيد س من $\frac{ح}{\sqrt{٣}}$ الى ح يأخذ الحجم في النقص من هذا المقدار الذي هو نهاية كبرى الى الصفر

وعند ما يكون $س = \frac{ح}{\sqrt{٣}}$ يكون $ص = \frac{٢ح}{\sqrt{٣}}$ ويعلم من ذلك ان أكبر الاسطوانات المتحدة السطح الكلي هي الاسطوانة التي ارتفاعها يساوي قطر قاعدتها



بند ١٧٥ (مسئلة ثانية) اذا علمت قطعة من الورق المقوى مستطيلة الشكل ولتكن ا ب ح ء ومدت مستقيمات موازية لاضلاعها على بعد واحد منها ثم اقيمت الاجزاء المستطيلة التي مثل هـ ك ل ف بعد نزع المربعات الصغيرة فانه يتكون علبة قاعها مستطيل هـ ف و ط والمطلوب معرفة تغير حجم هذه العلبة لاجل ذلك نفرض ان ٢ح و ٢ء هما الضلعان ا ب و ا ء للقطعة الورق المقوى وان س البعد المتغير ا ك الذي مدت عليه الموازيات فيكون قاع العلبة مستطيلا اضلاع قاعدته هما $هـف = ٢ (ح - س)$ و $هـط = ٢ (ء - س)$ ويكون مسطحه $٤ (ح - س)(ء - س)$ ويكون ارتفاع العلبة هو س واذن يكون حجم العلبة هو

$$ع = ٤س (ح - س)(ء - س)$$

فاذا فرض ان $ح > ء$ يمكن ان يتغير س من ٠ الى ء ويمر الجسم من الصفر ثم يعود الى الصفر مع كونه يحفظ مقادير محدودة ويبتدئ بالزيادة ثم يأخذ في النقص وبناء على ذلك يمر بنهاية كبرى ومشتقة هذه الدالة هي

$$ع' = ٤ \{ ٣س^{٢} - ٢(ح + ء)س + حء \}$$

والكمية الموجودة بين القوسين كمية ذات ثلاثة حدود بدرجة ثانية فاذا عوض س

في

فى هذه الكمية بصفر يوجد ناتج موجب وهو +حء واذا عوّض سه بكمية ء يحدث ناتج سالب وهو − ء (ح−ء) ويعلم من ذلك ان جذرى ذات الثلاثة الحدود حقيقيان وان أصغرهما سَه محصور بين ٠ و ء وأكبرهما سًه أكبر من ء ويكون

$$\text{ع}' = \text{١٢} \left(\text{سه} - \text{سَه}\right)\left(\text{سه} - \text{سًه}\right)$$

فمتى زيد سه من ٠ الى سَه فحيث ان المشتقة تكون موجبة فيزيد الجسم من الصفر الى مقدار مّا يكون نهاية كبرى واذا زيد سه من سَه الى ء تصير المشتقة سالبة ويتناقص الجسم من هذا المقدار الذى هو نهاية كبرى الى الصفر

ويكون الجسم فى نهايته الكبرى عندما يكون

$$\text{سه} = \text{سَ} = \frac{\text{ح} + \text{ء} - \sqrt{\text{ح}^{\text{٢}} + \text{ء}^{\text{٢}} - \text{حء}}}{\text{٣}}$$

بند ١٧٦ (مسئلة ثالثة) المطلوب معرفة تغير السطح الكلى لاسطوانة مستديرة قائمة مرسومة داخل كرة معلومة

لذلك نرمز بحرف سه لنصف قطر القاعدة ونفرض ان ٢صه ارتفاع الاسطوانة فيكون

$$\text{سه}^{\text{٢}} + \text{صه}^{\text{٢}} = \text{نق}^{\text{٢}}$$

ويكون

$$\text{ع} = \text{٢ط سه}^{\text{٢}} + \text{٤ط سه صه}$$

واذن يكون

$$\text{ع} = \text{٢ط}\left(\text{سه}^{\text{٢}} + \text{٢سه}\sqrt{\text{نق}^{\text{٢}} - \text{سه}^{\text{٢}}}\right)$$

فيمكن تغيير نصف القطر سه من ٠ الى نق ومشتقة الدالة ع التى يراد معرفة تغيرها هى

$$\text{ع}' = \frac{\text{٤ط}\left\{\text{سه}\sqrt{\text{نق}^{\text{٢}} - \text{سه}^{\text{٢}}} + \left(\text{نق}^{\text{٢}} - \text{٢سه}^{\text{٢}}\right)\right\}}{\sqrt{\text{نق}^{\text{٢}} - \text{سه}^{\text{٢}}}}$$

فمتى زاد سه من ٠ الى $\frac{\text{نق}}{\sqrt{\text{٢}}}$ تكون المشتقة موجبة وتزيد الدالة من ٠ الى ٢ ط نق²

ولنزد الآن سه من $\frac{\text{نق}}{\sqrt{\text{٢}}}$ الى نق فمن الواضح ان

$$\text{ع}' = \frac{\text{٤ط}\left\{\text{سه}\sqrt{\text{نق}^{\text{٢}} - \text{سه}^{\text{٢}}} - \left(\text{٢سه}^{\text{٢}} - \text{نق}^{\text{٢}}\right)\right\}}{\sqrt{\text{نق}^{\text{٢}} - \text{سه}^{\text{٢}}}}$$

والكمية التي بين القوسين هي الفرق بين كميتين موجبتين فلو ضرب حدا الكسر في المجموع وقسما عليه يحدث

$$\text{ع}' = \frac{4\,\text{ط}\left\{\text{س}^2(\text{ق}^2-\text{س}^2)-(2\,\text{س}^2-\text{ق}^2)^2\right\}}{\left\{\text{س}\sqrt{\text{ق}^2-\text{س}^2}+(2\,\text{س}^2-\text{ق}^2)\right\}\sqrt{\text{ق}^2-\text{س}^2}}$$

او

$$\text{ع}' = \frac{4\,\text{ط}\left(-5\,\text{س}^4+5\,\text{ق}^2\text{س}^2-\text{ق}^4\right)}{\left\{\text{س}\sqrt{\text{ق}^2-\text{س}^2}+(2\,\text{س}^2-\text{ق}^2)\right\}\sqrt{\text{ق}^2-\text{س}^2}}$$

وحيث ان المقام موجب فيكفي اختبار اشارة البسط الذي هو كمية كثيرة الحدود صحيحة بدرجة ثانية بالنسبة الى س^2 فمتى عوض س^2 في هذه الكمية ذات الثلاثة الحدود موضوعة بصورتها الاولى بالكمية $\frac{\text{ق}^2}{2}$ يحدث ناتج موجب ومتى عوض س^2 بالكمية ق^2 يوجد ناتج سالب وينتج من ذلك ان جذري ذات الثلاثة الحدود حقيقيان وان اصغرهما $\text{س}'^2$ اقل من $\frac{\text{ق}^2}{2}$ وان اكبرهما $\text{س}''^2$ محصور بين $\frac{\text{ق}^2}{2}$ و ق^2 وحينئذ يكون

$$\text{ع}' = \frac{-20\,\text{ط}(\text{س}^2-\text{س}'^2)(\text{س}^2-\text{س}''^2)}{\left\{\text{س}\sqrt{\text{ق}^2-\text{س}^2}+(2\,\text{س}^2-\text{ق}^2)\right\}\sqrt{\text{ق}^2-\text{س}^2}}$$

ومتى تغير س من $\frac{\text{ق}}{\sqrt{2}}$ الى $\text{س}''$ تكون المشتقة موجبة وتستمر الدالة في الازدياد من $2\,\text{ط}\,\text{ق}^2$ الى مقدار يكون نهاية كبرى ثم اذا تغير س من $\text{س}''$ الى ق تكون المشتقة سالبة وتتناقص الدالة من المقدار الذي هو نهاية كبرى الى $2\,\text{ط}\,\text{ق}^2$ وتكون النهاية الكبرى للسطح معلومة بواسطة القانون

$$\text{س} = \text{س}'' = \text{ق}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$$

بند ١٧٧ (مسألة رابعة) ليكن وه ط الخط الفاصل بين وسطين ولنفرض ان سرعتي الضوء في هذين الوسطين هما ع و $\text{ع}'$ والمطلوب معرفة الطريق الذي يجب ان يتبعه الشعاع

الشعاع الضوئي لاجل ذهابه من نقطة ح الى نقطة ء في الزمن الاقصر ما يمكن

لاجل حل هذه المسئلة نقول انه يمكننا ان نعين وضع النقطتين ح و ء بواسطة بعديهما حح و ءك عن المستقيم وط وبواسطة البعد ح ك ولنرمز لهذه الابعاد الثلاثة بحروف حـ و ء و هـ فاذا كانت السرعتان ع و عَ متساويتين فمن الواضح ان الضوء يتبع الطريق الاقصر ما يمكن اعني به المستقيم ح ء لكن اذا فرض ان سرعة الضوء ع في الوسط الاعلى أ كبر من سرعته عَ في الوسط الاسفل فان الضوء يقطع في الوسط الاول مسافة أ كبر من المسافة التي يقطعها في الوسط الثاني وحينئذ يسير على خط منكسر مثل ح م ء فاذا رمزنا بحرف سـ للبعد المطلوب ح م تكون المسافتان اللذان يقطعهما الضوء في الوسطين هما

$$\text{ح م} = \sqrt{\text{حـ}^2 + \text{سـ}^2} \quad \text{و} \quad \text{ء م} = \sqrt{\text{ء}^2 + (\text{هـ} - \text{سـ})^2}$$

ويكون الزمنان المستعملان لقطع هاتين المسافتين هما

$$\frac{\sqrt{\text{حـ}^2 + \text{سـ}^2}}{\text{ع}} \quad \text{و} \quad \frac{\sqrt{\text{ء}^2 + (\text{هـ} - \text{سـ})^2}}{\text{عَ}}$$

واذن يكون الزمن الذي يستعمله الضوء لاجل ذهابه من ح الى ء تابعا للطريق ح م ء هو

$$\text{ر} = \frac{\sqrt{\text{حـ}^2 + \text{سـ}^2}}{\text{ع}} + \frac{\sqrt{\text{ء}^2 + (\text{هـ} - \text{سـ})^2}}{\text{عَ}}$$

وهذا الزمن دالة للتغير سـ معتبرا متغيرا غير متعلق ومشتقة هذه الدالة هي

$$\text{رَ} = \frac{\text{سـ}}{\text{ع}\sqrt{\text{حـ}^2 + \text{سـ}^2}} - \frac{\text{هـ} - \text{سـ}}{\text{عَ}\sqrt{\text{ء}^2 + (\text{هـ} - \text{سـ})^2}}$$

فاذا رسمنا من نقطة م عمودا ةةَ على وط تكون زاوية ح م ة هي زاوية السقوط ولنرمز لهذه الزاوية بحرف و وتكون زاوية ء م ةَ هي زاوية الانكسار ولنرمز لها بحرف وَ وحيث ان

$$\text{جا و} = \frac{\text{ح م}}{\text{ح د}} = \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{د}^2 + \text{س}^2}} \text{ ،}$$

$$\text{جا وَ} = \frac{\text{ك م}}{\text{ء م}} = \frac{\text{هـ} - \text{س}}{\sqrt{\text{ء}^2 + (\text{هـ} - \text{س})^2}}$$

فينتج من ذلك أن

$$\text{رَ} = \frac{\text{جا و}}{\text{ع}} - \frac{\text{جا وَ}}{\text{عَ}}$$

فمتى تحركت النقطة م من ح جهة ك تزيد الزاوية و من صفر الى مقدار مّا بخلاف الزاوية وَ فانها تتقص من نهاية مّا الى الصفر وحينئذ توجد نقطة واحدة لا غير تكون فيها المشتقة معدومة وتكون قبلها سالبة ثم تصير بعدها موجبة واذن تتناقص الدالة الجارى معرفة تغيرها الى النقطة المذكورة ثم تاخذ فى الزيادة وتحصل النهاية الصغرى عندما يكون

$$\frac{\text{جا و}}{\text{ع}} = \frac{\text{جا وَ}}{\text{عَ}}$$

او

$$\frac{\text{جا و}}{\text{جا وَ}} = \frac{\text{ع}}{\text{عَ}}$$

وبهذا الاعتبار للزمن الاصغر ما يمكن قد وجد فيرما قانون انكسار الضوء

نبذة ١٧٨ (مسئلة خامسة) المطلوب معرفة تغير سطح قطاع كروى ثابت الحجم لذلك نرمز بحرف س لنصف قطر القطاع وبحرف ص لارتفاع المنطقة التى تكون قاعدة له ونفرض ان الحجم يساوى حجم كرة نصف قطرها معلوم وليكن د فنجد الارتباط

$$\frac{2}{3}\,\text{ط س}^2\,\text{ص} = \frac{4}{3}\,\text{ط د}^3$$

او

$$\text{س}^2\,\text{ص} = 2\,\text{د}^3$$

ويكون

$$\text{ص} = \frac{2\,\text{د}^3}{\text{س}^2}$$

وتكون مساحة القطاع هى

$$\text{ح} = \text{ط س}\sqrt{\text{ص}\,(2\,\text{س} - \text{ص})} + 2\,\text{ط س ص}$$

واذا عوض ص بمقداره يحدث

$$= \text{ح}.$$

$$\text{ع} = ٢\text{ط}\,\text{ح}\left\{\frac{\text{ح}^{٢}}{\text{س}} + \sqrt{\text{ح}\left(\text{س} - \frac{\text{ح}^{٣}}{\text{س}^{٢}}\right)}\right\}$$

وحيث كان ارتفاع المنطقة وهو ص أصغر من القطر ٢س فيكون نصف القطر س أكبر من ح ويعلم من ذلك ان المتغير س يمكن أن يزيد من ح الى مالانهاية ومشتقة السطح هى

$$\text{ع}' = \frac{\text{ط}\,\text{ح}^{٢}\left\{\text{س}^{٣} + ٢\text{ح}^{٣} - ٤\text{ح}\sqrt{\text{ح}\left(\text{س}^{٣} - \text{ح}^{٣}\right)}\right\}}{\text{س}^{٢}\sqrt{\text{ح}\left(\text{س}^{٣} - \text{ح}^{٣}\right)}}$$

والبسط هو الفرق بين كميتين فاذا ضرب حدا الكسر فى مجموع هاتين الكميتين يحدث

$$\text{ع}' = \frac{\text{ط}\,\text{ح}^{٢}\left(\text{س}^{٦} - ١٢\text{ح}^{٣}\text{س}^{٣} + ٢٠\text{ح}^{٦}\right)}{\text{س}^{٢}\sqrt{\text{ح}\left(\text{س}^{٣} - \text{ح}^{٣}\right)}\left\{\text{س}^{٣} + ٢\text{ح}^{٣} + ٤\text{ح}\sqrt{\text{ح}\left(\text{س}^{٣} - \text{ح}^{٣}\right)}\right\}}$$

وحيث كان المقام موجبا فيكفى اختبار اشارة ذات الثلاثة الحدود

$$\text{س}^{٦} - ١٢\text{ح}^{٣}\text{س}^{٣} + ٢٠\text{ح}^{٦}$$

التى بدرجة ثانية بالنسبة الى $\text{س}^{٣}$ والتى اذا حلت الى عاملين تكتب هكذا

$$\left(\text{س}^{٣} - ٢\text{ح}^{٣}\right)\left(\text{س}^{٣} - ١٠\text{ح}^{٣}\right)$$

فمتى زاد س من ح الى $\text{ح}\sqrt[٣]{٢}$ فحيث ان المشتقة تكون موجبة فيتزايد السطح واذا زاد س من $\text{ح}\sqrt[٣]{٢}$ الى $\text{ح}\sqrt[٣]{١٠}$ تكون المشتقة سالبة و يأخذ السطح فى التناقص ثم اذا زاد س الى مالانهاية من ابتداء $\text{ح}\sqrt[٣]{١٠}$ تكون المشتقة موجبة ويأخذ السطح فى الازدياد ولنختبر الآن الصور المتتالية التى يتربها القطاع فمتى كان س = ح يكون ص = ٢ ح ويكون ع = ٤ ط $\text{ح}^{٢}$ و يؤول القطاع الى كرة نصف قطرها ح واذا زيد نصف القطر س من ح الى $\text{ح}\sqrt[٣]{٢}$ يتناقص ص من ٢ ح الى $\text{ح}\sqrt[٣]{٢}$ وأما القطاع الذى هو أكبر من نصف كرة فينفتح شيأ فشيأ الى أن يصل الى صورة نصف كرة ويتزايد السطح من ابتداء المقدار الابتدائى ٤ ط $\text{ح}^{٢}$ الى النهاية الكبرى ٣ ط $\text{ح}^{٢}\sqrt[٣]{٤}$ ثم اذا زيد نصف

القطر من $ح\sqrt[3]{٢}$ الى $ح\sqrt[3]{١٠}$ يتناقص صه من $ح\sqrt[3]{٢}$ الى $\frac{ح\sqrt[3]{١٠}}{٥}$ والقطاع الذى هو فى أول الامر أقل من نصف كرة يستطيل الى أن لا يصير ارتفاع المنطقة الا خمس نصف القطر و يتناقص سطحه من النهاية الكبرى $٣ ط ح^{٢}\sqrt[3]{٤}$ الى النهاية الصغرى $ط ح^{٢}\sqrt[3]{١٠٠}$ ثم اذا زيد نصف القطر من بعد $ح\sqrt[3]{١٠}$ الى مالانهاية تناقص صه و يميل الى الصفر و يستمر القطاع فى الاستطالة و يزيد سطحه الى مالانهاية

و يمكن التنبيه على ان المقدار الاصغر ما يمكن $ط ح^{٢}\sqrt[3]{١٠٠}$ الذى يمر به السطح عندما يكون $س = ح\sqrt[3]{١٠}$ اكبر من المقدار الابتدائى $٣ ط ح^{٢}$ و $٤ ط ح^{٢}$ و يعلم من ذلك ان سطح القطاع يكون أصغر ما يمكن متى كان القطاع كرة كاملة ولننبه أيضا على ان السطح يمر مرة واحدة بكل مقدار محصور بين المقدار الابتدائى $٤ ط ح^{٢}$ والنهاية الصغرى $ط ح^{٢}\sqrt[3]{١٠}$ وثلاث مرات بكل مقدار محصور بين هذه النهاية الصغرى والنهاية الكبرى وهى $٣ ط ح\sqrt[3]{٤}$ ومرة واحدة بكل مقدار أكبر من هذه النهاية الكبرى

(تمرينات)

(الاول) المطلوب معرفة تغير سطح شبه منحرف مرسوم داخل نصف دائرة

(الثانى) المطلوب معرفة تغير السطح الكلى لمخروط مستدير قائم مرسوم داخل كرة معلومة

(الثالث) المطلوب معرفة تغير حجم متوازى مستطيلات ذى قاعدة مربعة سطحه الكلى معلوم

(الرابع) حرك ضوء على مستقيم رأسى والمطلوب معرفة تغير كمية الضوء التى تسقط على جزء صغير جدا من المستوى الافقى

(الخامس) حرك ضوء على محيط دائرة و يراد معرفة تغير كمية الضوء التى تسقط على جزء صغير جدا من قطر ثابت

(السادس) وضع على أوجه مكعب ستة اهرامات منتظمة ومتحدة الارتفاع والسطح الكلى معلوم والمطلوب معرفة تغير حجم الجسم المكون بهذه الكيفية

(السابع)

(السابع) وضع على أوجه هرم مثلثى منتظم أربعة اهرامات كل منها مركب من ثلاثة مثلثات متساوية ومتساوية الساقين والسطح الكلى معلوم ويراد معرفة تغير حجم الجسم المتكون بهذه الكيفية

(الثامن) لايخفى ان الاريومتر مكون من اسطوانة معلومة نصف القطر ومنته بمخروطين متساويين فالمطلوب معرفة تغير حجم هذا الاريومتر من بعد معلومية السطح الكلى

(التاسع) المطلوب معرفة تغير سطح قطعة دائرة طول قوسها معلوم

(العاشر) مثلث مكون من ثلاثة أقواس من دائرة متساوية ومعلومة الطول والمطلوب معرفة تغير سطح هذا المثلث

(الحادى عشر) مضلع منتظم مكون من أقواس من دائرة عددها ه متساوية ومعلومة الطول والمطلوب معرفة تغير السطح

(الفصل الثالث)

(فى مشتقة دالة ذات عدة متغيرات)

بند ١٧٩ الى الآن لم نعتبر سوى الدوال ذات المتغير الواحد فلنذكر الآن بعض كلمات على الدوال ذات عدة المتغيرات فنقول

لتكن ء (سہ , صہ) دالة ذات متغيرين غير متعلقين سہ , صہ فاذا اعتبرنا صہ ثابتا وأخذنا مشتقة الدالة بالنسبة الى سہ ينتج لنا مايسمى مشتقة جزئية للدالة بالنسبة الى سہ وكذلك اذا اعتبرنا سہ ثابتا وأخذنا مشتقة الدالة بالنسبة الى صہ تنتج المشتقة الجزئية للدالة بالنسبة الى صہ وهاتان المشتقتان هما المشتقتان الجزئيتان برتبة اولى للدالة المفروضة ونرمز لهما بالرمزين $\text{ءَ}_{\text{سہ}}$, $\text{ءَ}_{\text{صہ}}$ والحرف الموضوع تحت الرمز ءَ يدل على المتغير الذى تؤخذ المشتقة بالنسبة له

فاذا أخذت المشتقة مرتان متواليتان امامرتان بالنسبة الى سہ واما مرة بالنسبة الى سہ والمرة الاخرى بالنسبة الى صہ واما مرتان بالنسبة الى صہ تحصل المشتقات الجزئية برتبة ثانية التى نرمز لها بالرموز $\text{ءً}_{\text{سہ}^{٢}}$, $\text{ءً}_{\text{سہ صہ}}$, $\text{ءً}_{\text{صہ}^{٢}}$ وهلم جرا

مثلا لتكن الدالة

$$\text{ء}(\text{سہ} , \text{صہ}) = ٣\text{سہ}^{٢} - ٥\text{سہ صہ} + \text{صہ}^{٢} - ٣\text{سہ} + ٤\text{صہ} + ٢$$

فبأخذ مشتقتها بالنسبة الى س ثم مشتقتها بالنسبة الى ص توجد المشتقتان الجزئيتان برتبة أولى وهما

$$ء'_{س} = ٦س - ٥ص - ٣ \quad و$$

$$ء'_{ص} = -٥س + ٢ص + ٤$$

وبأخذ مشتقة $ء'_{س}$ بالنسبة الى س ومشتقة $ء'_{ص}$ بالنسبة الى ص ومشتقة $ء'_{س}$ بالنسبة الى ص أو مشتقة $ء'_{ص}$ بالنسبة الى س توجد ثلاث مشتقات بدرجة ثانية وهى

$$ء''_{س^{٢}} = ٦ \quad و \quad ء''_{س ص} = -٥ \quad و \quad ء''_{ص^{٢}} = ٢$$

والمشتقات التالية معدومة

(نظرية على الدوال المتجانسة)

بند ١٨٠ يقال ان اى دالة صحيحة ذات عدة متغيرات س و ص و ع و ... الخ متجانسة وبدرجة م متى كان مجموع أسس هذه الحروف ثابتا فى كل حد من حدودها ومساويا م فاذا فرضنا ان الدالة ذات ثلاثة متغيرات ولتكن س و ص و ع يكون كل حد من حدودها بالصورة

$$د\, س^{ه}\, ص^{ح}\, ع^{ك}$$

واذن يمكن كتابة

$$ء(س \,و\, ص \,و\, ع) = مجـ\, د\, س^{ه}\, ص^{ح}\, ع^{ك}$$

فاذا أخذت المشتقة بالنسبة لكل متغير يحدث

$$ء'_{س} = مجـ\, ه\, د\, س^{ه-١}\, ص^{ح}\, ع^{ك} \quad و$$

$$ء'_{ص} = مجـ\, ح\, د\, س^{ه}\, ص^{ح-١}\, ع^{ك} \quad و$$

$$ء'_{ع} = مجـ\, ك\, د\, س^{ه}\, ص^{ح}\, ع^{ك-١}$$

فاذا ضربت هذه المشتقات على التناظر فى س و ص و ع يحدث

$$س\, ء'_{س} = مجـ\, ه\, د\, س^{ه}\, ص^{ح}\, ع^{ك} \quad و$$

$$\text{ص}\frac{\text{دى}}{\text{دص}}=\text{م}\,\text{ح}\,\text{د}\,\text{س}^{\text{ه}}\text{ص}^{\text{ح}}\text{ع}^{\text{ك}}\qquad\text{و}$$

$$\text{ع}\frac{\text{دى}}{\text{دع}}=\text{م}\,\text{ك}\,\text{د}\,\text{س}^{\text{ه}}\text{ص}^{\text{ح}}\text{ع}^{\text{ك}}$$

وينتج من ذلك ان

$$\text{س}\frac{\text{دى}}{\text{دس}}+\text{ص}\frac{\text{دى}}{\text{دص}}+\text{ع}\frac{\text{دى}}{\text{دع}}=\text{م}(\text{ه}+\text{ح}+\text{ك})\,\text{د}\,\text{س}^{\text{ه}}\text{ص}^{\text{ح}}\text{ع}^{\text{ك}}$$

وحيث كان المجموع ه+ح+ك ثابتا ومساويا م فيكون

$$\text{س}\frac{\text{دى}}{\text{دس}}+\text{ص}\frac{\text{دى}}{\text{دص}}+\text{ع}\frac{\text{دى}}{\text{دع}}=\text{م}\,\text{م}\,\text{د}\,\text{س}^{\text{ه}}\text{ص}^{\text{ح}}\text{ع}^{\text{ك}}$$

او

$$\text{س}\frac{\text{دى}}{\text{دس}}+\text{ص}\frac{\text{دى}}{\text{دص}}+\text{ع}\frac{\text{دى}}{\text{دع}}=\text{م}\,\text{ى}(\text{س و ص و ع})$$

ويعلم من ذلك انه متى كانت دالة صحيحة متجانسة واخذت مشتقتها بالنسبة لكل متغير من المتغيرات التى تحتوى عليها وضربت كل مشتقة فى المتغير المأخوذة بالنسبة له وجمعت النواتج على بعضها يكون حاصل الجمع مساويا لحاصل ضرب الدالة المفروضة فى درجة التجانس

(فى مشتقات الدوال المركبة)

بند ١٨١ لنشرع الآن فى ايجاد مشتقة دالة مركبة من عدة دوال لمتغير واحد مبتدئين بايجاد مشتقة دالة مركبة من دالتين لمتغير واحد فنقول

لنكن $\text{ص}=\text{ى}(\text{ع و و})$

و ع و و دالتان لمتغير واحد غير متعلق مثل س فبتبدل س الى س + ف س تؤول الدوال ع و و و ص الى ع + ف ع و و + ف و و ص + ف ص لكن عوضا عن تغيير ع الى ع + ف ع و و الى و + ف و فى ى (ع و و) يمكن اجراء هذين التغييرين احدهما بعد الآخر فاذا غير فى أول الامر ع الى ع + ف ع مع ابقاء و ثابتا تزيد الدالة ص زيادة قدرها

$$\text{ى}(\text{ع}+\text{ف ع و و})-\text{ى}(\text{ع و و})$$

فاذا قسمنا هذا الفرق على ف ع وأخذنا نهاية الطرفين مع اعتبار الدالة و ثابتة يحدث

$$\text{نها}\ \frac{\text{د}(\text{ن}+\text{ف ن}\,,\,\text{و})-\text{د}(\text{ن}\,,\,\text{و})}{\text{ف ن}}=\text{دَ}_{\text{ن}}(\text{ن}\,,\,\text{و})=\text{د}_{١}(\text{ن}\,,\,\text{و})$$

وبمثل ذلك يوجد أن

$$\text{نها}\ \frac{\text{د}(\text{ن}\,,\,\text{و}+\text{ف و})-\text{د}(\text{ن}\,,\,\text{و})}{\text{ف و}}=\text{دَ}_{\text{و}}(\text{ن}\,,\,\text{و})=\text{د}_{٢}(\text{ن}\,,\,\text{و})$$

وحينئذ اذا رمزنا بحرف ل لدالة تنعدم عند ماينعدم ف ن مهما كانت الدالة و وبحرف ے لدالة تنعدم عند ماينعدم ف و مهما كانت الدالة ن يحدث

$$\text{د}(\text{ن}+\text{ف ن}\,,\,\text{و})-\text{د}(\text{ن}\,,\,\text{و})=\left[\text{د}_{١}(\text{ن}\,,\,\text{و})+\text{ل}\right]\text{ف ن}\qquad (١)$$

$$\text{د}(\text{ن}\,,\,\text{و}+\text{ف و})-\text{د}(\text{ن}\,,\,\text{و})=\left[\text{د}_{٢}(\text{ن}\,,\,\text{و})+\text{ے}\right]\text{ف و}\qquad (٢)$$

فاذا غيرت الدالة ن الى ن+ف ن في المعادلة (٢) يحدث

$$\left.\begin{aligned}&\text{د}(\text{ن}+\text{ف ن}\,,\,\text{و}+\text{ف و})-\text{د}(\text{ن}+\text{ف ن}\,,\,\text{و})\\&=\left[\text{د}_{٢}(\text{ن}+\text{ف ن}\,,\,\text{و})+\text{ےَ}\right]\text{ف و}\end{aligned}\right\}\qquad (٣)$$

و ےَ رمز لما تؤول اليه ے متى غيرفيها ن الى ن+ف ن وتنعدم مثل ے عند ماينعدم ف و فاذا جمعت المعادلتان (١) و (٣) على بعضهما وقسمت المعادلة المتحصلة على ف س يحدث

$$\frac{\text{د}(\text{ن}+\text{ف ن}\,,\,\text{و}+\text{ف و})-\text{د}(\text{ن}\,,\,\text{و})}{\text{ف س}}$$

$$=\left[\text{د}_{١}(\text{ن}\,,\,\text{و})+\text{ل}\right]\frac{\text{ف ن}}{\text{ف س}}+\left[\text{د}_{٢}(\text{ن}+\text{ف ن}\,,\,\text{و})+\text{ےَ}\right]\frac{\text{ف و}}{\text{ف س}}$$

وبأخذ النهاية يحدث

$$\text{صَ}_{\text{س}}=\text{د}_{١}(\text{ن}\,,\,\text{و})\,\text{نَ}_{\text{س}}+\text{د}_{٢}(\text{ن}\,,\,\text{و})\,\text{وَ}_{\text{س}}$$

أو

$$\text{صَ}_{\text{س}}=\text{دَ}_{\text{ن}}(\text{ن}\,,\,\text{و})\,\text{نَ}_{\text{س}}+\text{دَ}_{\text{و}}(\text{ن}\,,\,\text{و})\,\text{وَ}_{\text{س}}$$

ويعلم من ذلك ان مشتقة دالة مركبة من دالتين لمتغير واحد تساوي مجموع مشتقتي هذه الدالة مأخوذتين بالنسبة للدالتين المركبتين لها مضروبتين على التناظر في مشتقتي هاتين

هاتين الدالتين المركبتين للدالة المركبة بالنسبة للمتغير الغير المتعلق

وهذه القاعدة تصدق على اى دالة مركبة من دوال لمتغير واحد مهما كان عددها

ولبيان ذلك نفرض ان $\text{ص} = \text{د}(\text{ى}، \text{و}، \text{ع})$

فنجد ان $\text{ف ص} = \text{د}(\text{ى} + \text{ف ى}، \text{و} + \text{ف و}، \text{ع} + \text{ف ع}) - \text{د}(\text{ى}، \text{و}، \text{ع})$

فاذا وضعنا

$$\text{ص}'_{\text{ى}} = \text{د}_{١}(\text{ى}، \text{و}، \text{ع})، \quad \text{ص}'_{\text{و}} = \text{د}_{٢}(\text{ى}، \text{و}، \text{ع})، \quad \text{ص}'_{\text{ع}} = \text{د}_{٣}(\text{ى}، \text{و}، \text{ع})$$

نجد بموجب الاعتبارات المتقدمة ان

$$\text{د}(\text{ى} + \text{ف ى}، \text{و}، \text{ع}) - \text{د}(\text{ى}، \text{و}، \text{ع}) = \left\{\text{د}_{١}(\text{ى}، \text{و}، \text{ع}) + \text{ل}\right\} \text{ف ى} \quad ، \quad (١)$$

$$\text{د}(\text{ى}، \text{و} + \text{ف و}، \text{ع}) - \text{د}(\text{ى}، \text{و}، \text{ع}) = \left\{\text{د}_{٢}(\text{ى}، \text{و}، \text{ع}) + \text{ے}\right\} \text{ف و} \quad ، \quad (٢)$$

$$\text{د}(\text{ى}، \text{و}، \text{ع} + \text{ف ع}) - \text{د}(\text{ى}، \text{و}، \text{ع}) = \left\{\text{د}_{٣}(\text{ى}، \text{و}، \text{ع}) + \text{ط}\right\} \text{ف ع} \quad (٣)$$

وبتغيير ى الى ى + ف ى فى المعادلة (٢) يحدث

$$\left.\begin{array}{l} \text{د}(\text{ى} + \text{ف ى}، \text{و} + \text{ف و}، \text{ع}) - \text{د}(\text{ى} + \text{ف ى}، \text{و}، \text{ع}) \\ = \left\{\text{د}_{٢}(\text{ى} + \text{ف ى}، \text{و}، \text{ع}) + \bar{\text{ے}}\right\} \text{ف} \end{array}\right\} \quad (٤)$$

وبتغيير ى الى ى + ف ى ، و الى و + ف و فى المعادلة (٣) يحدث

$$\left.\begin{array}{l} \text{د}(\text{ى} + \text{ف ى}، \text{و} + \text{ف و}، \text{ع} + \text{ف ع}) - \text{د}(\text{ى} + \text{ف ى}، \text{و} + \text{ف و}، \text{ع}) \\ = \left\{\text{د}_{٣}(\text{ى} + \text{ف ى}، \text{و} + \text{ف و}، \text{ع}) + \bar{\text{ط}}\right\} \text{ف ع} \end{array}\right\} (٥)$$

وبجمع المعادلات (١) و (٤) و (٥) على بعضها طرفا على طرف ثم قسمة طرفى المعادلة الناتجة على ف س يحدث

$$\frac{\text{ف ص}}{\text{ف س}} = \left[\text{د}_{١}(\text{ى}، \text{و}، \text{ع}) + \text{ل}\right] \frac{\text{ف ى}}{\text{ف س}} + \left[\text{د}_{٢}(\text{ى} + \text{ف ى}، \text{و}، \text{ع}) + \text{ے}\right] \frac{\text{ف و}}{\text{ف س}}$$

$$+ \left[\text{د}_{٣}(\text{ى} + \text{ف ى}، \text{و} + \text{ف و}، \text{ع}) + \bar{\text{ط}}\right] \frac{\text{ف ع}}{\text{ف س}}$$

وباخذ النهاية يحدث

$$\text{ص}'_{\text{س}} = \text{د}_{١}(\text{ن، و، ع})\,\text{ن}'_{\text{س}} + \text{د}_{٢}(\text{ن، و، ع})\,\text{و}'_{\text{س}} + \text{د}_{٣}(\text{ن، و، ع})\,\text{ع}'_{\text{س}}$$

$$\text{او}\quad \text{ص}'_{\text{س}} = \text{د}'_{\text{ن}}(\text{ن، و، ع})\,\text{ن}'_{\text{س}} + \text{د}'_{\text{و}}(\text{ن، و، ع})\,\text{و}'_{\text{س}} + \text{د}'_{\text{ع}}(\text{ن، و، ع})\,\text{ع}'_{\text{س}}$$

وعلى العموم تكون مشتقة اى دالة مركبة من عدة دوال لمتغير واحد تساوى مجموع مشتقات هذه الدالة المركبة مأخوذة بالنسبة لكل دالة من الدوال المركبة لها مضروبة على التناظر فى مشتقات هذه الدوال بالنسبة للمتغير الغير المتعلق

وهذه القاعدة تشمل جميع القواعد التى ذكرت فى الفصل الاول من هذا الباب كقاعدة حاصل جمع وحاصل ضرب وهكذا

(مثالان)

الاول لنأخذ الدالة $\text{ص} = \text{س}^{\text{س}}$ التى قد وجدنا مشتقتها آنفا (بند ١٧١) فاذا وضعنا $\text{ن} = \text{س}$ ، $\text{و} = \text{س}$ يكون $\text{ص} = \text{ن}^{\text{و}}$ وبتطبيق النظرية المتقدمة يحدث

$$\text{ص}' = \text{و}\,\text{ن}^{\text{و}-١}\,\text{ن}' + \text{ن}^{\text{و}}\,\text{لو}\,\text{ن}\cdot\text{و}' = \text{س}^{\text{س}} + \text{س}^{\text{س}}\,\text{لو}\,\text{س} = \text{س}^{\text{س}}(١ + \text{لو}\,\text{س})$$

الثانى $\text{ص} = (\text{جا}\,\text{س})^{٤\text{س}}$ فبوضع $\text{ن} = \text{جا}\,\text{س}$ ، $\text{و} = ٤\,\text{س}$ يوجد كذلك ان $\text{ص} = \text{ن}^{\text{و}}$ واذن يكون

$$\text{ص}' = \text{و}\,\text{ن}^{\text{و}-١}\,\text{ن}' + \text{ن}^{\text{و}}\,\text{لو}\,\text{ن}\cdot\text{و}'$$

$$= ٤\,\text{س}(\text{جا}\,\text{س})^{٤\text{س}-١} \times \text{جتا}\,\text{س} + ٤(\text{جا}\,\text{س})^{٤\text{س}}\,\text{لو}\,\text{جا}\,\text{س}$$

(فى مشتقات الدوال الغير المحلولة المعلومة بمعادلة واحدة)

بند ١٨٣ يقال ان الدالة غير محلولة متى كانت مرتبطة بالمتغير الغير المتعلق بمعادلة غير محلولة بالنسبة لهذه الدالة وذلك مثل ص فى المعادلة

$$\text{ء}(\text{س}\ \text{و}\ \text{ص}) = ٠$$

التي طرفها الاول دالة حيثما اتفق للمتغيرين س و ص فاذا أمكن حل هذه المعادلة استنتج منها $\text{ص} = \text{ء}_{١}(\text{س})$ وتصير الدالة محلولة

ويمكن بالسهولة ان يتحصل على مشتقة الدالة ص بالنسبة للمتغير س بدون حل هذه المعادلة لاننا اذا أخذنا مشتقة الدالة ء (س و ص) التي فيها س هو المتغير الغير المتعلق و ص دالة الى س تكون هذه المشتقة بموجب قاعدة الدوال المركبة هي

$$\text{ء}'_{\text{س}} + \text{ء}'_{\text{ص}} \times \text{ص}'$$

وحيث ان الدالة ء (س و ص) معدومة على الدوام فتكون مشتقتها كذلك معدومة وحينئذ توجد المعادلة

$$\text{ء}'_{\text{س}} + \text{ء}'_{\text{ص}} \times \text{ص}' = ٠$$

ومن هنا يستنتج

$$\text{ص}' = -\frac{\text{ء}'_{\text{س}}}{\text{ء}'_{\text{ص}}}$$

أعني ان مشتقة أي دالة غير محلولة تساوي مشتقة الطرف الاول بالنسبة للمتغير الغير المتعلق مقسومة على مشتقة هذا الطرف باعتبار الدالة فيه متغيرا غير متعلق والناتج مأخوذ باشارة مخالفة

(مثالان)

(الاول) لنعتبر الدالة الغير المحلولة ص المعلومة بالمعادلة

$$\text{س}^{٢} - ٤\text{س}\,\text{ص} + \text{ص}^{٢} + ٢\text{س} = ٠$$

فبموجب القانون المتقدم يكون

$$\text{ص}' = -\frac{٢\text{س} - ٤\text{ص} + ٢}{-٤\text{س} + ٢\text{ص}} = \frac{٢\text{ص} - \text{س} - ١}{\text{ص} - ٢\text{س}}$$

وحيث كانت المعادلة المفروضة بدرجة ثانية بالنسبة الى ص فيمكن حلها وبذلك يكون

$$\text{ص} = ٢\text{س} \pm \sqrt{٣\text{س}^{٢} - ٢\text{س}}$$

وحينئذ تصير الدالة محلولة وتوجد مشتقتها مباشرة وهي

$$\text{صَ}=\text{٢}\pm\frac{\text{٣س}-\text{١}}{\sqrt{\text{٣س}^{\text{٢}}-\text{٢س}}}$$

فاذا عوض ص بمقداره فى مقدار صَ الاول يوجد المقدار الثانى

(الثانى) $\text{٣س}^{\text{٥}}-\text{٤س ص}+\text{ص}^{\text{٣}}=\text{٠}$

$$\text{صَ}=-\frac{\text{١٥س}^{\text{٤}}-\text{٤ص}}{-\text{٤س}+\text{٣ص}}$$

(فى مشتقات الدوال الغير المحلولة المعلومة بعدة معادلات)

بند ١٨٣ اذا علمت دالتان مثل ص ، ع بالمعادلتين

$\text{ى}(\text{س ، ص ، ع})=\text{٠}$ ، (١)

$\text{د}(\text{س ، ص ، ع})=\text{٠}$ (٢)

فانه يمكن أن يتحصل على المشتقين $\text{صَ}_{\text{س}}$ و $\text{عَ}_{\text{س}}$ بدون حل هاتين المعادلتين لانه اذا أخذت مشتقتا طرفى المعادلتين (١) ، (٢) وطبقت قاعدة الدوال المركبة يحدث

$\text{ىَ}_{\text{س}}+\text{ىَ}_{\text{ص}}\,\text{صَ}_{\text{س}}+\text{ىَ}_{\text{ع}}\,\text{عَ}_{\text{س}}=\text{٠}$ ، (٣)

$\text{دَ}_{\text{س}}+\text{دَ}_{\text{ص}}\,\text{صَ}_{\text{س}}+\text{دَ}_{\text{ع}}\,\text{عَ}_{\text{س}}=\text{٠}$ (٤)

وهاتان المعادلتان تشتملان على المجهولين $\text{صَ}_{\text{س}}$ و $\text{عَ}_{\text{س}}$ بدرجة أولى ومنهما يستخرج

$$\text{صَ}_{\text{س}}=\frac{\text{ىَ}_{\text{س}}\,\text{دَ}_{\text{ع}}-\text{ىَ}_{\text{ع}}\,\text{دَ}_{\text{س}}}{\text{ىَ}_{\text{ع}}\,\text{دَ}_{\text{ص}}-\text{ىَ}_{\text{ص}}\,\text{دَ}_{\text{ع}}}$$

$$\text{عَ}_{\text{س}}=\frac{\text{ىَ}_{\text{ص}}\,\text{دَ}_{\text{س}}-\text{ىَ}_{\text{س}}\,\text{دَ}_{\text{ص}}}{\text{ىَ}_{\text{ع}}\,\text{دَ}_{\text{ص}}-\text{ىَ}_{\text{ص}}\,\text{دَ}_{\text{ع}}}$$

وعلى العموم اذا علمت معادلات عددها ه تحتوى على متغيرات عددها ه+١ منها متغير

متغير واحد غير متعلق وجميع المتغيرات الاخر التي عددها ه دوال لهذا المتغير الغير المتعلق تساوي مشتقات الاطراف الاول لهذه المعادلات بصفر فتحدث معادلات عددها ه تحتوي على المشتقات المطلوبة بدرجة أولى ثم تستخرج هذه المشتقات منها مثلا لتكن المعادلتان

$$سـ^٢ + صـ^٢ + ع^٢ = ة^٢ \quad و \qquad (١)$$

$$حـ سـ + ء صـ + هـ ع + و = ٠ \qquad (٢)$$

فبأخذ مشتقي طرفيهما الاولين يحدث

$$سـ + صـ صـَ + ع عَ = ٠ \quad و$$

$$حـ + ء صـَ + هـ عَ = ٠$$

ومن هاتين المعادلتين يستخرج

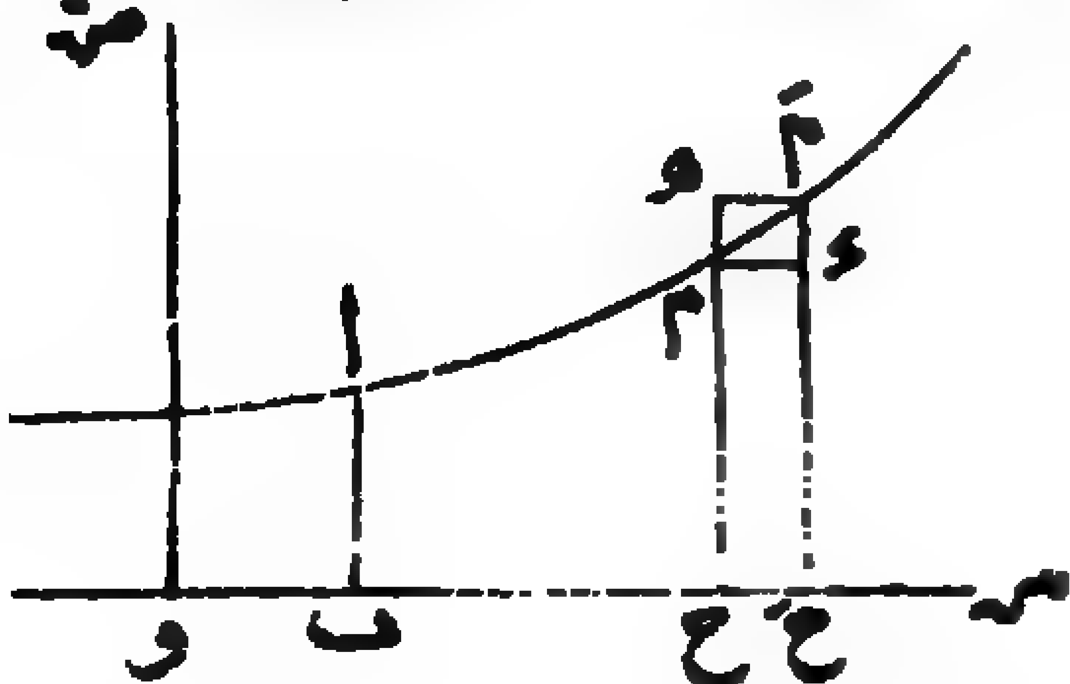
$$صـَ = \frac{حـ ع - هـ سـ}{هـ صـ - ء ع} \quad و \qquad (٣)$$

$$عَ = \frac{ء سـ - حـ صـ}{هـ صـ - ء ع} \qquad (٤)$$

(الفصل الرابع)

في الدوال الاصلية

بـ ١٨٤ د الدالة الاصلية لدالة معلومة هي الدالة التي تكون الدالة المعلومة مشتقة لها ولنثبت في أول الامر على ان كل دالة يكون لها دالة أصلية فنقول لتكن صـ = ء(سـ) الدالة المفروضة ولنرسم المنحني المدلول عليه بهذه المعادلة كما ذكرنا في بـ ١٤ د بان نأخذ على المستقيم الافقي وسـ بالابتداء من نقطة و أطوال مساوية للمقادير المختلفة للمتغير سـ ونقيم أعمدة أو رأسيات تساوي المقادير المناظرة لها للمتغير صـ ثم نعتبر المساحة ا ب م ح المحدودة بالابتداء من رأسي ثابت ا ب الى رأسي متحرك م ح فهذه المساحة دالة للمتغير سـ لانه اذا زيد سـ يبعد الرأسي م ح وتزيد المساحة المذكورة ولنرمز لهذه المساحة بالرمز ء₁(سـ) ولنثبت على ان الدالة ء₁(سـ) المعينة بهذه الكيفية تكون دالة أصلية للدالة المفروضة وهي ء(سـ) ولذلك



نتصور اننا أعطينا المتغير س زيادة قدرها ع عَ = ح فتكون الزيادة ك للدالة ءَ (س) مساحة شبه منحرف م ع عَ مَ منحنى الضلع فاذا رسمنا من النقطتين م و مَ موازيين م ء و مَ هـ للمحور و س تكون مساحة شبه المنحرف المنحنى الضلع محصورة بين مساحتى المستطيلين م ع عَ ء و هـ ع عَ مَ وحيث ان مساحتى هذين المستطيلين هما م ع × ح و مَ عَ × ح فيكون

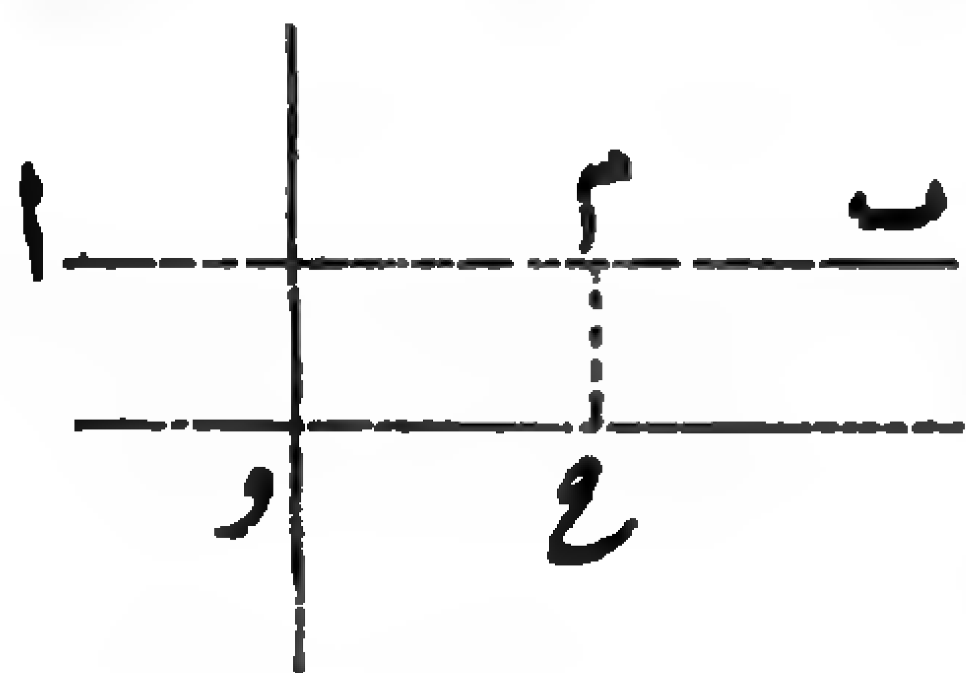
$$مَ عَ × ح > ك > م ع × ح$$

وبالقسمة على ح يكون $مَ عَ > \frac{ك}{ح} > م ع$

فتى مالت الزيادة ح الى الصفر يصير الرأسى م ع مساويا مَ عَ وبناء على ذلك تميل النسبة $\frac{ك}{ح}$ الى نهاية تساوى الرأسى م ع وحينئذ تكون مشتقة الدالة ءَ (س) هى الدالة المفروضة ء (س) وحينئذ تكون هذه الدالة ءَ (س) دالة أصلية للدالة ء (س) وينتج من ذلك ان أى دالة مستمرة تكون لها دالة أصلية يمكن بيانها بمساحة مستوية فاذا أضيف للدالة الاصلية ءَ (س) ثابت اختيارى ث تكون ءَ (س) + ث دالة أصلية كذلك لان الثابت ث ينعدم عند أخذ المشتقة

ونشاهد انه باضافة الثابت الاختيارى توجد جميع الدوال الاصلية للدالة المفروضة

بـ ١٨٥ ــ لنثبت فى أول الامر انه اذا كانت مشتقة دالة مستمرة معدومة على الدوام تكون هذه الدالة كمية ثابتة فنقول



لنتصور ان الدالة مبينة بخط فاذا رمزنا بحرف ل للزاوية الواقعة بين المماس للخط فى نقطة حيثما اتفق والمحور الافقى و س نعلم (بـ ١٤١ ــ) ان مشتقة الدالة تساوى ظا ل

وحيث ان المشتقة معدومة على الدوام فتكون الزاوية ل معدومة على الدوام ويكون المماس للخط فى كل نقطة من نقطه افقيا ولا يكون هذا الخط الا مستقيم افقى ا ب ويكون الرأسى م ع لكل نقطة من نقط هذا المستقيم ثابتا على الدوام وينتج من ذلك ان مقدار الدالة المفروضة يكون ثابتا

ولتكن الآن ءَ (س) و ءً (س) دالتين مشتقتهما واحدة ولتكن ء (س) فأقول ان هاتين الدالتين لا يمكن ان تفترقا عن بعضهما الا بكمية ثابتة لانه بالفرض يكون

$$ء_2'(س)=ء(س)$$ و

$$ء_1'(س)=ء(س)$$

فاذا طرحت هاتان المتساويتان من بعضهما يحدث

$$ء_2'(س)-ء_1'(س)=0$$

لكن الفرق $ء_2'(س)-ء_1'(س)$ هو مشتقة الدالة $ء_2(س)-ء_1(س)$ وحيث ان هذه المشتقة معدومة على الدوام فتكون الدالة كمية ثابتة وحينئذ يكون

$$ء_2(س)-ء_1(س)=ث$$

وهو ما أردنا اثباته

وقد ذكرنا (بند ١٨٤) انه اذا وجدت الدالة الاصلية $ء_1(س)$ للدالة المفروضة واضيف اليها ثابت اختياري يحصل على دالة أصلية جديدة $ء_1(س)+ث$ فينتج مما سبق انه يمكن تكوين جميع الدوال الاصلية للدالة المفروضة بهذه الكيفية حيث ان كل دالة أصلية اخرى لا يمكن ان تختلف عن الدالة الاصلية الاولى الا بثابت وبسبب ان هذه الدالة $ء_1(س)+ث$ تشتمل على ثابت اختياري قد سميت دالة أصلية عمومية للدالة المفروضة ويمكن تعيين هذا الثابت بحيث ان الدالة الاصلية يكون لها مقدار معلوم وليكن $ح_1$ عندما يكون س مساويا لمقدار معلوم وليكن ح وذلك بأن يوضع

$$ء_1(ح)+ث=ح_1$$

ومن هنا يكون $ث=ح_1-ء_1(ح)$

مثلا اذا كانت الدالة الاصلية تنعدم عندما يكون $س=ح$ يوضع

$$ء_1(ح)+ث=0$$

ومن هنا يكون $ث=-ء_1(ح)$

وتكون الدالة المفروضة هي $ء_1(س)-ء_1(ح)$

ومن البيان الهندسي للدالة الاصلية يتضح كذلك ان هذه الدالة تشتمل على ثابت اختياري لانه يمكن حساب المساحة بالابتداء من رأس ابتدائي ا ب حيثما

اتفق (بند ١٨٤) ومن الواضح انه اذا غير هذا الرأسي الابتدائي تتغير المساحة بكمية ثابتة فتعيين الثابت بحيث تنعدم الدالة متى كان $\text{س} = \text{ح}$ عبارة عن حساب المساحة بالابتداء من رأسي ابتدائي مطابق للافقي $\text{س} = \text{ح}$

بند ١٨٦ البحث عن الدوال الاصلية عملية صعبة جدا هي الغرض الاصلي من فرع عال من العلوم التحليلية يسمى حساب التكامل ولنقتصر هنا على الحالات البسيطة جدا فنقول

لنعتبر في أول الامر دالة صحيحة مثل

$$\text{ح}\,\text{س}^{\text{م}} + \text{ح}_{١}\,\text{س}^{\text{م}-١} + \text{ح}_{٢}\,\text{س}^{\text{م}-٢} + \cdots + \text{ح}_{\text{م}-١}\,\text{س} + \text{ح}_{\text{م}}$$

فدالتها الاصلية هي

$$\frac{\text{ح}\,\text{س}^{\text{م}+١}}{\text{م}+١} + \frac{\text{ح}_{١}\,\text{س}^{\text{م}}}{\text{م}} + \frac{\text{ح}_{٢}\,\text{س}^{\text{م}-١}}{\text{م}-١} + \cdots + \frac{\text{ح}_{\text{م}-١}\,\text{س}^{٢}}{٢} + \text{ح}_{\text{م}}\,\text{س} + \text{ث}$$

لانه اذا أخذت مشتقة هذه الكمية الكثيرة الحدود توجد الدالة المفروضة ويعلم من ذلك انه لاجل ايجاد الدالة الاصلية لدالة صحيحة تزاد اسس المتغير بواحد ويقسم كل حد على الاس المتحصل وبهذه العملية ترتفع درجة الدالة بواحد

مثلا الدالة الاصلية العمومية للدالة $\text{س}^{٣} - ٥\text{س} + ٧$

هي $\frac{\text{س}^{٤}}{٤} - \frac{٥\text{س}^{٢}}{٢} + ٧\text{س} + \text{ث}$

فاذا اريد ان تنعدم الدالة الاصلية عندما يكون $\text{س} = ٠$ يجعل $\text{ث} = ٠$

وهذه القاعدة تطبق على الاسس الكسرية والسالبة

(أمثلة)

الاول $\quad \text{ء}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}} = \text{س}^{\frac{١}{٢}}$

$$\text{ء}_{١}(\text{س}) = \frac{٢}{٣}\,\text{س}^{\frac{٣}{٢}} + \text{ث}$$

الثاني $\quad \text{ء}(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}^{٢}} = \text{س}^{-٢}$

$$\text{ء}_{١}(\text{س}) = -\text{س}^{-١} + \text{ث} = -\frac{١}{\text{س}}$$

الثالث

الثالث

$$ء(س) = -\frac{٢}{٣}\,ح\,س^{-\frac{٥}{٣}} + \frac{٤}{٣}\,ء\,س^{-\frac{٧}{٣}} - ٢\,و\,س^{-٣}$$

$$ء_{١}(س) = ح\,س^{-\frac{٢}{٣}} - ء\,س^{-\frac{٤}{٣}} + و\,س^{-٢} + ث$$

وهاك حالات أخرى يمكن فيها ايجاد الدالة الاصلية مباشرة

الاولى	$ء(س) = \frac{١}{س}$	$ء_{١}(س) = لو\,س + ث$
الثانية	$ء(س) = \frac{١}{١+س^{٢}}$	$ء_{١}(س) = قوس\,ظا\,س + ث$
الثالثة	$ء(س) = \frac{١}{\sqrt{١-س^{٢}}}$	$ء_{١}(س) = قوس\,جا\,س + ث$
الرابعة	$ء(س) = \frac{-١}{\sqrt{١-س^{٢}}}$	$ء_{١}(س) = قوس\,جتا\,س + ث$
الخامسة	$ء(س) = هـ^{س}$	$ء_{١}(س) = هـ^{س} + ث$
السادسة	$ء(س) = ح^{س}$	$ء_{١}(س) = \frac{ح^{س}}{لو\,ح} + ث$
السابعة	$ء(س) = جتا\,س$	$ء_{١}(س) = جا\,س + ث$
الثامنة	$ء(س) = جا\,س$	$ء_{١}(س) = -\,جتا\,س + ث$
التاسعة	$ء(س) = \frac{١}{جتا^{٢}\,س}$	$ء_{١}(س) = ظا\,س + ث$
العاشرة	$ء(س) = \frac{-١}{جا^{٢}\,س}$	$ء_{١}(س) = -\,ظتا\,س + ث$
الحادية عشر	$ء(س) = \frac{جا\,س}{جتا^{٢}\,س}$	$ء_{١}(س) = قا\,س + ث$
الثانية عشر	$ء(س) = \frac{جتا\,س}{جا^{٢}\,س}$	$ء_{١}(س) = -\,قتا\,س + ث$

وغالبا يمكن بواسطة نظرية دوال الدوال أيجاد الدالة الاصلية وهاك بعض امثلة على ذلك

الاول $\text{د}(\text{س})=\frac{1}{\text{س}+\text{ح}}$ | $\underset{1}{\text{ء}}\,\text{د}(\text{س})=\text{لو}(\text{س}+\text{ح})+\text{ث}$

الثانى $\text{د}(\text{س})=\frac{1}{(\text{س}+\text{ح})^{\text{م}}}=(\text{س}+\text{ح})^{-\text{م}}$ | $\underset{1}{\text{ء}}\,\text{د}(\text{س})=\frac{-1}{(\text{م}-1)(\text{س}+\text{ح})^{\text{م}-1}}+\text{ث}$

الثالث $\text{د}(\text{س})=\frac{1}{\text{ح}^2+\text{س}^2}=\frac{1}{\text{ح}}\times\frac{\frac{1}{\text{ح}}}{1+(\frac{\text{س}}{\text{ح}})^2}$ | $\underset{1}{\text{ء}}\,\text{د}(\text{س})=\frac{1}{\text{ح}}\,\text{قوس ظا}\,\frac{\text{س}}{\text{ح}}+\text{ث}$

الرابع $\text{د}(\text{س})=\frac{\text{س}}{\text{ح}^2+\text{س}^2}=\frac{1}{2}\times\frac{2\text{س}}{\text{ح}^2+\text{س}^2}$ | $\underset{1}{\text{ء}}\,\text{د}(\text{س})=\frac{1}{2}\,\text{لو}(\text{ح}^2+\text{س}^2)+\text{ث}$

وهنا يشاهد انه حيث ان البسط ٢ س مشتقة المقام $\text{ح}^2+\text{س}^2$ فتكون الدالة $\frac{2\text{س}}{\text{ح}^2+\text{س}^2}$ مشتقة $\text{لو}(\text{ح}^2+\text{س}^2)$

الخامس $\text{د}(\text{س})=\frac{\text{س}}{\sqrt{\text{ح}^2+\text{س}^2}}$ | $\underset{1}{\text{ء}}\,\text{د}(\text{س})=\sqrt{\text{ح}^2+\text{س}^2}+\text{ث}$

السادس $\text{د}(\text{س})=\text{هـ}^{\text{حس}}$ | $\underset{1}{\text{ء}}\,\text{د}(\text{س})=\frac{\text{هـ}^{\text{حس}}}{\text{ح}}+\text{ث}$

السابع $\text{د}(\text{س})=\text{جتا حس}$ | $\underset{1}{\text{ء}}\,\text{د}(\text{س})=\frac{\text{جا حس}}{\text{ح}}+\text{ث}$

الثامن $\text{د}(\text{س})=\frac{\text{لو س}}{\text{س}}$ | $\underset{1}{\text{ء}}\,\text{د}(\text{س})=\frac{1}{2}(\text{لو س})^2+\text{ث}$

التاسع $\text{د}(\text{س})=\frac{1}{\text{س لو س}}$ | $\underset{1}{\text{ء}}\,\text{د}(\text{س})=\text{لو لو س}+\text{ث}$

العاشر $\text{د}(\text{س})=\frac{1}{\text{س}(\text{لو س})^{\text{م}}}$ | $\underset{1}{\text{ء}}\,\text{د}(\text{س})=\frac{-1}{(\text{م}-1)(\text{لو س})^{\text{م}-1}}+\text{ث}$

الحادى عشر $\text{د}(\text{س})=\frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{1+\text{هـ}^{2\text{س}}}$ | $\underset{1}{\text{ء}}\,\text{د}(\text{س})=\text{قوس ظا}(\text{هـ}^{\text{س}})+\text{ث}$

(الفصل الخامس)
فى تحليل الدوال الى متسلسلات
فى متسلسلة تيلور

بند ١٨٧ قد أجرينا فى بند ١٤٥ تحليل $\text{د}(\text{س}+\text{ح})$ على حسب القوى الصحيحة والتصاعدية لكمية ح متى كانت الدالة صحيحة وقد وجدنا ان

$$\text{د}(\text{سـ}+\text{ح})=\text{د}(\text{سـ}_{\circ})+\text{دَ}(\text{سـ}_{\circ})\frac{\text{ح}}{١}+\text{دً}(\text{سـ}_{\circ})\frac{\text{ح}^{٢}}{١\times٢}+\cdots$$
$$+\text{د}^{(\text{م})}(\text{سـ}_{\circ})\frac{\text{ح}^{\text{م}}}{١\times٢\cdots\times\text{م}}$$

(م درجة الدالة) والتحليل ينتهى بالحد المحتوى على المشتقة برتبة م وتكون المشتقات التالية معدومة وصورة التحليل هذه تطبق على اى دالة مستمرة الا ان التحليل يمتد الى مالانهاية ويكون متسلسلة

ولبيان ذلك نفرض ان الدالة د(سـ) تبقى محدودة ومستمرة هى ومشتقاتها الاولى التى عددها (ه+١) متى غير سـ من سـ٠ الى سـ٠ + ح ثم نعتبر الكمية الكثيرة الحدود وهى

$$\text{د}(\text{سـ}_{\circ})+\text{دَ}(\text{سـ}_{\circ})\frac{\text{ح}}{١}+\text{دً}(\text{سـ}_{\circ})\frac{\text{ح}^{٢}}{١\times٢}+\cdots+\text{د}^{(\text{ه})}(\text{سـ}_{\circ})\frac{\text{ح}^{\text{ه}}}{١\times٢\cdots\times\text{ه}}$$

التى بدرجة ه بالنسبة الى ح ونفرض ان الفرق الواقع بين د(سـ٠+ح) وهذه الكمية الكثيرة الحدود هو

$$\text{ر}\frac{\text{ح}^{\text{ه}+١}}{١\times٢\cdots\times\text{ه}(\text{ه}+١)}$$

فنجد ان

$$\left.\begin{array}{l}\text{د}(\text{سـ}_{\circ}+\text{ح})=\text{د}(\text{سـ}_{\circ})+\text{دَ}(\text{سـ}_{\circ})\frac{\text{ح}}{١}+\text{دً}(\text{سـ}_{\circ})\frac{\text{ح}^{٢}}{١\times٢}+\cdots\\+\text{د}^{(\text{ه})}(\text{سـ}_{\circ})\frac{\text{ح}^{\text{ه}}}{١\times٢\cdots\times\text{ه}}+\text{ر}\frac{\text{ح}^{\text{ه}+١}}{١\times٢\cdots(\text{ه}+١)}\end{array}\right\}\quad(١)$$

فاذا وضعنا سـ١ = سـ٠ + ح يكون سـ١ − سـ٠ = ح واذا عوضنا كمية ح بالكمية سـ١ − سـ٠ المساوية لها وحولنا جميع حدود الطرف الثانى الى الطرف الاول يحدث

$$\left.\begin{array}{l}\text{د}(\text{سـ}_{١})-\text{د}(\text{سـ}_{\circ})-\text{دَ}(\text{سـ}_{\circ})\frac{\text{سـ}_{١}-\text{سـ}_{\circ}}{١}-\text{دً}(\text{سـ}_{\circ})\frac{(\text{سـ}_{١}-\text{سـ}_{\circ})^{٢}}{١\times٢}-\cdots\\-\text{د}^{(\text{ه})}(\text{سـ}_{\circ})\frac{(\text{سـ}_{١}-\text{سـ}_{\circ})^{\text{ه}}}{١\times٢\cdots\times\text{ه}}-\text{ر}\frac{(\text{سـ}_{١}-\text{سـ}_{\circ})^{\text{ه}+١}}{١\times٢\cdots(\text{ه}+١)}=\circ\end{array}\right\}\quad(٢)$$

فيشاهد ان الكمية ر المجهولة تتعلق بالكميتين س و $س_١$

ولنعتبر الدالة

$$\left.\begin{aligned} د_١(س) = د(س_١) - د(س) - \frac{(س_١-س)}{١\times٢}\,د'(س) - \frac{(س_١-س)^٢}{١\times٢}\,د''(س) - \cdots\cdots \\ - \frac{(س_١-س)^{ه}}{١\times٢\cdots\times ه}\,د^{(ه)}(س) - \frac{(س_١-س)^{ه+١}}{١\times٢\cdots(ه+١)}\,ر \end{aligned}\right\}\ (٣)$$

ولاجل تكوين هذه الدالة قد عوّضنا $س_١$ بالمتغير س في المتساوية (٢) ماعدا الكمية ر فاننا أبقيناها ثابتة ولاجل الاختصار قد رمزنا للناتج بالرمز $د_١(س)$ فاذا أخذنا مشتقتي طرفي المتساوية (١) ونبهنا على ان الحدود تمحو بعضها اثنين اثنين لا يبقى الا الحدان الاخيران فقط ويكون

$$د'_١(س) = -\frac{(س_١-س)^{ه}}{١\times٢\cdots(ه+١)}\,د^{(ه+١)}(س) + \frac{(س_١-س)^{ه}}{١\times٢\cdots\times ه}\,ر$$

او

$$د'_١(س) = \frac{(س_١-س)^{ه}}{١\times\cdots\times ه}\left\{ر - د^{(ه+١)}(س)\right\} \qquad (٤)$$

وعلى حسب مافرضناه تبقى الدالة $د_١(س)$ ومشتقتها $د'_١(س)$ محدودة ومستمرة متى غير س من $س_٠$ الى $س_١$ لكن عندما يكون $س = س_٠$ تؤول الدالة $د_١(س)$ الى المقدار (٢) الذي يساوي صفرا وعندما يكون $س = س_١$ يمحو الحدان الاوّلان بعضهما بعضا وتنعدم الحدود التالية وتكون الدالة مساوية لصفر كذلك ويعلم من ذلك انه متى تغير س من $س_٠$ الى $س_١$ تبتدئ الدالة $د_١(س)$ من الصفر وتعود الى الصفر وحيث انها تبقى محدودة ومستمرة فتمر مقدارها المطلق بنهاية كبرى وحينئذ تتغير اشارة المشتقة $د'_١(س)$ وحيث ان هذه المشتقة تبقى محدودة ومستمرة فتمر بالصفر وينتج من ذلك ان المشتقة تنعدم بمقدار الى س محصور بين $س_٠$ و $س_١$ أعني محصور ابين $س_٠$ و $س_٠+ح$

ومقدار

ومقدار سَ هذا الذى تتقدم به المشتقة يمكن بيانه بكمية $\text{س}_0 + \text{ے}\,\text{ح}$ (ے كسر أصغر من الواحد) ويكون

$$\text{د}'_1(\text{س}_0 + \text{ے}\,\text{ح}) = 0$$

وبموجب معادلة (٤) ينتج أن

$$\text{م} = \text{د}^{(\text{ن}+1)}(\text{س}_0 + \text{ے}\,\text{ح})$$

وحينئذ تؤول متساوية (١) الى

$$(5)\quad \begin{cases} \text{د}(\text{س}_0+\text{ح}) = \text{د}(\text{س}_0) + \text{د}'(\text{س}_0)\frac{\text{ح}}{1} + \text{د}''(\text{س}_0)\frac{\text{ح}^2}{1\times 2} + \cdots \\ + \text{د}^{(\text{ن})}(\text{س}_0)\frac{\text{ح}^{\text{ن}}}{1\times 2\cdots \text{ن}} + \frac{\text{ح}^{\text{ن}+1}}{1\times 2\cdots(\text{ن}+1)}\,\text{د}^{(\text{ن}+1)}(\text{س}_0+\text{ے}\,\text{ح}) \end{cases}$$

فاذا مال الحد المكمل الى الصفر متى زاد ن الى مالا نهاية يوصل القانون (٥) الى متسلسلة تقاربية وهذه المتسلسلة هى متسلسلة تيلور

بند ١٨٨ يمكن ان يحصل على الحد المكمل بصورة أعم لاننا اذا فرضنا ان الحد المكمل هو

$$\frac{\text{ح}^{\text{ع}+1}}{1\times 2\cdots \text{ن}(\text{ع}+1)}\,\text{م}$$

و ع عدد صحيح حيثما اتفق يحدث كما تقدم

$$\text{د}(\text{س}_1) - \text{د}(\text{س}_0) - \frac{\text{س}_1-\text{س}_0}{1}\text{د}'(\text{س}_0) - \frac{(\text{س}_1-\text{س}_0)^2}{1\times 2}\text{د}''(\text{س}_0) - \cdots$$
$$- \frac{(\text{س}_1-\text{س}_0)^{\text{ن}}}{1\times 2\cdots \text{ن}}\text{د}^{(\text{ن})}(\text{س}_0) - \frac{(\text{س}_1-\text{س}_0)^{\text{ع}+1}}{1\times 2\cdots \text{ن}(\text{ع}+1)}\,\text{م} = 0$$

وتتقدم الدالة

$$\text{د}'_1(\text{س}) = \text{د}(\text{س}_1) - \text{د}(\text{س}) - \frac{\text{س}_1-\text{س}}{1}\text{د}'(\text{س}) - \frac{(\text{س}_1-\text{س})^2}{1\times 2}\text{د}''(\text{س}) - \cdots$$
$$- \frac{(\text{س}_1-\text{س})^{\text{ن}}}{1\times 2\cdots \text{ن}}\text{د}^{(\text{ن})}(\text{س}) - \frac{(\text{س}_1-\text{س})^{\text{ع}+1}}{1\times 2\cdots \text{ن}(\text{ع}+1)}\,\text{م}$$

كذلك عندما يكون س = س٠ وعندما يكون س = س١ وبناء على ذلك تنعدم مشتقتها وهى

$$\text{د}_1(\text{س}) = \frac{(\text{س}_1 - \text{س})^{\text{ح}}}{1\times 2 \cdots \times \text{ن}} \left\{ \text{ر} - (\text{س}_1 - \text{س})^{\text{ن}-\text{ح}} \, \text{د}^{(\text{ن}+1)}(\text{س}) \right\}$$

بمقدار محصور بين س٠ و س١ وليكن س٠ + ى د وينتج من ذلك أن

$$\text{ر} = \text{د}^{\text{ن}-\text{ح}} (1-\text{ى})^{\text{ن}-\text{ح}} \, \text{د}^{(\text{ن}+1)}(\text{س}_0 + \text{ى}\,\text{د})$$

وإذن يكون الحد المكمل هو

$$\frac{\text{د}^{\text{ن}+1}}{1\times 2 \cdots \text{ن}(\text{ح}+1)} (1-\text{ى})^{\text{ن}-\text{ح}} \, \text{د}^{(\text{ن}+1)}(\text{س}_0 + \text{ى}\,\text{د})$$

والعدد الصحيح ح اختيارى فإذا جعل ح = ن توجد الصورة الأولى وإذا جعل ح = ٠ توجد صورة ثانية وهى

$$\frac{\text{د}^{\text{ن}+1}}{1\times 2 \cdots \times \text{ن}} (1-\text{ى})^{\text{ن}} \, \text{د}^{(\text{ن}+1)}(\text{س}_0 + \text{ى}\,\text{د}) \qquad (٦)$$

وهذه الصورة مفيدة غالبا فى التطبيقات

(فى قانون مكلوران)

نمرة ١٨٩ إذا أخذ القانون (٥) وعوض فيه س٠ بصفر وعوض حرف د بحرف س يوجد القانون

$$(٧)\left\{\begin{aligned} \text{د}(\text{س}) &= \text{د}(0) + \text{د}'(0)\frac{\text{س}}{1} + \text{د}''(0)\frac{\text{س}^2}{1+2} + \cdots \\ &+ \text{د}^{(\text{ن})}(0)\frac{\text{س}^{\text{ن}}}{1\times 2 \cdots \times \text{ن}} + \frac{\text{س}^{\text{ن}+1}}{1\times 2 \cdots (\text{ن}+1)} \text{د}^{(\text{ن}+1)}(\text{ى}\,\text{س}) \end{aligned}\right.$$

ويمكن كذلك وضع الحد المكمل بالصورة

$$\frac{\text{س}^{\text{ن}+1}}{1\times 2 \cdots \times \text{ن}} (1-\text{ى})^{\text{ن}} \, \text{د}^{(\text{ن}+1)}(\text{ى}\,\text{س}) \qquad (٨)$$

فنى

ففي مال الحد المكمل الى الصفر عندما يزيد ن الى ما لانهاية تنحل الدالة الى متسلسلة تقاربية مرتبة على حسب القوى الصحيحة والتصاعدية للمتغير س بواسطة القانون (٧) وهذا القانون هو المسمى بقانون مكلوران

بند ١٩١ ولنطبق هذا القانون على تحليل الدالة $\text{ه}^{\text{س}}$ فحيث ان جميع مشتقات هذه الدالة تساوي الدالة $\text{ه}^{\text{س}}$ نفسها و تؤول الى الواحد عندما يكون س = ٠ فيكون

$$\text{ه}^{\text{س}} = ١ + \frac{\text{س}}{١} + \frac{\text{س}^{٢}}{١\times٢} + \frac{\text{س}^{٣}}{١\times٢\times٣} + \cdots + \frac{\text{س}^{\text{ن}}}{١\times٢\cdots\text{ن}}$$
$$+ \frac{\text{س}^{\text{ن}+١}}{١\times٢\cdots(\text{ن}+١)} \times \text{ه}^{\theta\text{س}}$$

ولنفرض في أول الامر ان المتغير س يكون له مقدارا موجبا وليكن ح عددا صحيحا أكبر من س ولنمط الى ن مقدارا أكبر من ح فيمكن وضع الحد المكمل بالصورة

$$\frac{\text{س}^{\text{ح}}}{١\times٢\cdots\text{ح}} \times \text{ه}^{\theta\text{س}} \times \frac{\text{س}^{\text{ن}-\text{ح}+١}}{(\text{ح}+١)(\text{ح}+٢)\cdots(\text{ن}+١)}$$

فاذا زيد ن الى ما لانهاية يبقى العامل الاول ثابتا ويكون العامل الثاني أقل من $\text{ه}^{\text{س}}$ وأما العامل الثالث وهو

$$\frac{\text{س}}{\text{ح}+١} \cdot \frac{\text{س}}{\text{ح}+٢} \cdot \frac{\text{س}}{\text{ح}+٣} \cdots \frac{\text{س}}{\text{ن}+١}$$

الذي هو حاصل ضرب عوامل عددها ن − ح + ١ أقل من $\frac{\text{س}}{\text{ح}}$ فانه يكون أصغر من $\left(\frac{\text{س}}{\text{ح}}\right)^{\text{ن}-\text{ح}+١}$ ويميل الى الصفر عندما يزيد ن الى ما لانهاية وحينئذ يميل الحد المكمل الى الصفر اذا تقرر هذا واعتبرنا المتسلسلة

$$١ + \frac{\text{س}}{١} + \frac{\text{س}^{٢}}{١\times٢} + \frac{\text{س}^{٣}}{١\times٢\times٣} + \cdots\cdots$$

فبموجب ما تقرر يميل الفرق بين الحدود الاول التي عددها ن + ١ من هذه المتسلسلة والدالة $\text{ه}^{\text{س}}$ الى الصفر عندما يزيد ن الى ما لانهاية حيث ان هذا الفرق يساوي الحد المكمل وينتج من ذلك ان المتسلسلة تكون تقاربية وان مجموع الحدود الاول التي عددها ن + ١ يميل الى نهاية تساوي $\text{ه}^{\text{س}}$ واذن يكون

$$هـ^{س} = ١ + \frac{س}{١} + \frac{س^{٢}}{١\times٢} + \frac{س^{٣}}{١\times٢\times٣} + \cdots \qquad (٩)$$

ولنفرض الآن ان مقدار س سالب وليكن − سَ وليكن ح عدداً صحيحاً أكبر من سَ ولنعط الى ن مقداراً أكبر من ح فالمقدار المطابق للحد المكمل يساوي

$$\frac{سَ^{ح}}{١\times٢\cdots\times ح} \times هـ^{-سَ} \times \frac{سَ^{ن-ح+١}}{(ح+١)(ح+٢)\cdots(ن+١)}$$

وحيث ان العامل الاول يبقى ثابتاً متى زيد ن الى ما لا نهاية والعامل الثاني أصغر من الواحد والعامل الثالث يميل الى الصفر فيميل الحد المكمل الى الصفر كما تقدم ويعلم من ذلك انه يمكن دائماً تحليل الدالة هـ^س بموجب قانون مكاوران الى متسلسلة تقاربية بجميع مقادير س الموجبة أو السالبة

وبهذه الكيفية يمكن تحليل جاس و جتاس بموجب قانون مكاوران الى متسلسلتين تقاربيتين بجميع مقادير س ويوجد أن

$$جاس = \frac{س}{١} - \frac{س^{٣}}{١\times٢\times٣} + \frac{س^{٥}}{١\times٢\times٣\times٤\times٥} - \cdots \quad و \qquad (١٠)$$

$$جتاس = ١ - \frac{س^{٢}}{١\times٢} + \frac{س^{٤}}{١\times٢\times٣\times٤} - \cdots \qquad (١١)$$

(في قانون ذات الحدين باس حيثما اتفق)

بند ١٩١ لنقصد تحليل $(ح+ء)^{م}$ متى كان م عدداً حيثما اتفق فبوضع $\frac{ء}{ح} = س$ يوجد أن

$$(ح+ء)^{م} = \{ح(١+س)\}^{م} = ح^{م}(١+س)^{م}$$

وحيث آل الامر الى تحليل $(١+س)^{م}$ فلو وضع

$$د(س) = (١+س)^{م}$$

يكون

دَ(س)

$$د'(س)=م(١+س)^{م-١} \text{ و } د''(س)=م(م-١)(١+س)^{م-٢} \text{ و } ... \text{ و}$$

$$د^{(ه)}(س)=م(م-١)(م-٢)\cdots(م-ه+١)(١+س)^{م-ه} \text{ و}$$

$$د^{(ه+١)}(حس)=م(م-١)\cdots(م-ه)\;(١+حس)^{م-ه-١}$$

واذن يكون

$$\left.\begin{aligned} (١+س)^م = ١+مس+\frac{م(م-١)}{١\times٢}س^٢+\cdots \\ +\frac{م(م-١)\cdots(م-ه+١)}{١\times٢\cdots\times ه}س^ه \\ +\frac{م(م-١\cdots(م-ه)}{١\times٢\cdots(ه+١)}س^{ه+١}\;(١+حس)^{م-ه-١} \end{aligned}\right\}$$

ولنفرض في أول الامر ان المقدار المطلق الى سه أكبر من الواحد فاقول انه في هذه الحالة تكون المتسلسلة تباعدية لانه اذا فرض ان $ح_{ع+١}$ و $ح_ع$ حدان متواليان يكون

$$ح_{ع+١}=\frac{م(م-١)\cdots(م-ع+١)}{١\times٢\cdots\times ع}س^ع \text{ و}$$

$$ح_ع=\frac{م(م-١)\cdots(م-ع+٢)}{١\times٢\cdots(ع-١)}س^{ع-١}$$

واذن يكون

$$ح_{ع+١}:ح_ع=\left(\frac{م+١}{ع}-١\right)سه$$

فاذا زيد ع الى مالانهاية تميل هذه النسبة الى ‑ سه وحيث ان سه أكبر من الواحد فتكون المتسلسلة تباعدية

واذا كان الامر بالعكس أي اذا كان المقدار المطلق الى سه أصغر من الواحد تكون المتسلسلة تقاربية ويكون مجموعها $(١+سه)^م$

لاننا اذا فرضنا ان سه موجب يكون الحد المكمل هو

$$\frac{م(م-1)\cdots(م-ه)}{1\times2\times3\cdots(ه+1)}\,سـ^{ه+1}\times\left(\frac{1}{1+ح\,سـ}\right)^{ه+1-م}$$

لكن اذا وضع العامل الاول هكذا

$$\frac{م(م-1)\cdots(م-ل+1)\,سـ^{ل}}{1\times2\cdots\times ل}$$

$$\times\frac{م-ل}{ل+1}\,سـ\cdot\frac{م-ل-1}{ل+2}\,سـ\cdots\frac{م-ه}{ه+1}\,سـ$$

يشاهد ان عوامل الصف الثانى تميل الى ـ سـ اذا أخـذ ل كبيرا كبرا كافيا وكذا اذا كان ك عددا موجبا أقل من الواحـد وأكبر من سـ يمكن فرض ل كبيرا كبرا كافيا بحيث يكون كل عامل من هذه العوامل أقل من ك بصرف النظر عن الاشارة وحينئذ يكون حاصل ضربها أقل من $ك^{ه+1-ل}$ وبناء على ذلك يكون صغيرا بقدر ما يراد وإذن يكون حاصل ضربها الكلى وهو

$$\frac{م(م-1)\cdots(م-ه)}{1\times2\cdots(ه+1)}\,سـ^{ه+1}$$

صغيرا كذلك بقدر ما يراد اذا زيد ه

وأما العامل

$$\left(\frac{1}{1+ح\,سـ}\right)^{ه+1-م}$$

فحيث ان أسه ينتهى بصيرورته موجبا فيميل كذلك الى الصفر ما لم تقرب الكمية ح التى تتعلق بعدد ه من الصفر قربا لانهائيا الا أنه على كل حال يبقى هـذا العامل أقل من الواحد وبناء على ذلك يميـل الحد المكمل الى الصفر متى زاد ه الى ما لانهاية وإذن يكون مجموع المتسلسلة هو $(1+سـ)^{م}$ اذا أعطى الى سـ مقدار موجب أصـغر من الواحد وغير ذلك حيث ان الحد المكمل تتغير اشارته متى زاد ه بواحـد فتكون المجموعات المتتالية للمتسلسلة أصغر وأكبر على التعاقب من $(1+سـ)^{م}$

واذا كان مقدار سـ سالبا تستعمل الصورة الثانية للحد المكمل فمن بعد الرمز لهذا الحد بحرف ز يحدث

$$ز=\frac{م(م-1)\cdots(م-ه)}{1\times2\times3\cdots\times ه}\,سـ^{ه+1}\,(1-ح)^{ه}\,(1+ح\,سـ)^{م-ه-1}$$

وحينئذ

وحينئذ اذا وضع $س = -ح ع$ واعتبر المقدار المطلق فقط يحدث

$$ز = \frac{م(م-١)\cdots(م-ه)}{١×٢×٣\cdots×ه} ع^{ه+١} (١-ح)^{ه} \cdot \frac{(١-ح ع)^{م-١}}{(١-ح ع)^{ه}}$$

أو

$$ز = \frac{م(م-١)\cdots(م-ه)}{١×٢×٣\cdots×ه} ع^{ه+١} × \left(\frac{١-ح}{١-ح ع}\right)^{ه} (١-ح ع)^{م-١}$$

فالعامل الاول يميل كذلك الى الصفر متى زاد $ه$ الى مالانهاية

وحيث أن $\frac{١-ح}{١-ح ع} < ١$ فيمكن ان تصير الكمية $\left(\frac{١-ح}{١-ح ع}\right)^{ه}$ أصغر من كل كمية معلومة مالم يمل $ح$ الى الصفر وعلى كل فانه فى هذه الحالة يكون هذا العامل أصغر من الواحد دائما

وحيث ان الكمية $(١-ح ع)^{م-١}$ تكون اصغر من الواحد اذا كان $م-١$ موجبا وتكون أصغر من $\frac{١}{(١-ح ع)^{م-١}}$ اذا كان $م-١$ سالبا فتكون فى جميع الحالات كمية محدودة وحينئذ يمكن أن يصير الحد المكمل وهو $ز$ أصغر من كل كمية معلومة اذا أخذ عدد $ه$ كبيرا كبرا كافيا

وبالاختصار اذا وقع العدد $س$ بين -١ و $+١$ يكون مهما كان $م$

$$(١+س)^{م} = ١ + م س + \frac{م(م-١)}{١×٢} س^{٢} + \frac{م(م-١)(م-٢)}{١×٢×٣} س^{٣} + \cdots$$

(فى المتسلسلات اللوغاريتمية)

بند ١٩٢ ولنأخذ أيضا الدالة لو $(١+س)$ فيكون

$$د'(س) = (١+س)^{-١}$$
$$د''(س) = -١ (١+س)^{-٢}$$
$$د'''(س) = ١×٢ (١+س)^{-٣}$$
$$د^{(٤)}(س) = -١×٢×٣ (١+س)^{-٤}$$

وبموجب القانون (٧) يكون

$$\text{لو}(١+\text{س})=\frac{\text{س}}{١}-\frac{\text{س}^{٢}}{٢}+\frac{\text{س}^{٣}}{٣}-\frac{\text{س}^{٤}}{٤}+\cdots\mp\frac{\text{س}^{\text{ه}}}{\text{ه}}\pm\frac{\text{س}^{\text{ه}+١}}{(\text{ه}+١)(١+\text{ح}\,\text{س})^{\text{ه}+١}}$$

ويكون الحد المكمل هو

$$\frac{١}{\text{ه}+١}\left(\frac{\text{س}}{١+\text{ح}\,\text{س}}\right)^{\text{ه}+١}$$

فمتى كان مقدار س موجبا واقل من الواحد أو مساويا له يميل الحد المكمل الذى هو أصغر من $\frac{\text{س}^{\text{ه}+١}}{\text{ه}+١}$ الى الصفر متى زاد ه الى مالانهاية وتنحل الدالة الى متسلسلة تقاربية

ولنفرض الآن ان مقدار س يكون سالبا وليكن − $\bar{\text{س}}$ وان مقداره المطلق أقل من الواحد فبأخذ الحد المكمل بصورته الثانية نجده

$$\frac{\bar{\text{س}}^{\text{ه}+١}(١-\text{ح})^{\text{ه}}}{(١-\text{ح}\,\bar{\text{س}})^{\text{ه}+١}}=-\frac{\bar{\text{س}}^{\text{ه}+١}}{١-\text{ح}\,\bar{\text{س}}}\left(\frac{١-\text{ح}}{١-\text{ح}\,\bar{\text{س}}}\right)^{\text{ه}}$$

وحيث ان العامل $\frac{١-\text{ح}}{١-\text{ح}\,\bar{\text{س}}}$ أقل من الواحد وان المقام $١-\text{ح}\,\bar{\text{س}}$ أكبر من $١-\bar{\text{س}}$ فيكون المقدار المطلق للحد المكمل أصغر من

$$\frac{\bar{\text{س}}^{\text{ه}+١}}{١-\bar{\text{س}}}$$

وبناء على ذلك يميل الى الصفر متى زاد ه الى مالانهاية وحينئذ تنحل الدالة لو(١+س) الى متسلسلة

$$\text{لو}(١+\text{س})=\frac{\text{س}}{١}-\frac{\text{س}^{٢}}{٢}+\frac{\text{س}^{٣}}{٣}-\frac{\text{س}^{٤}}{٤}+\cdots \qquad (١٢)$$

تقاربية بمقادير س المحصورة بين −١ و +١



(فى حساب اللوغاريتمات النبيرية)

بند ١٩٣ من المتسلسلة المتقدمة تستنتج متسلسلات تستعمل لحساب الجداول اللوغاريتمية ولذلك نبحث عن الفرق بين لوغاريتمي عددين صحيحين متواليين وليكونا ه , $\text{ه}+١$ فحيث ان

$$\text{لوَ}(\text{ه}+١)-\text{لوَ}\,\text{ه}=\text{لوَ}\,\frac{\text{ه}+١}{\text{ه}}=\text{لوَ}\left(١+\frac{١}{\text{ه}}\right)$$

فلو عوض س في متسلسلة (١٢) بكسر $\frac{١}{\text{ه}}$ يكون

$$\text{لو}(\text{ه}+١)-\text{لو}\,\text{ه}=\frac{١}{\text{ه}}-\frac{١}{٢\times\text{ه}^{٢}}+\frac{١}{٣\times\text{ه}^{٣}}-\cdots \qquad (١٣)$$

الان هذه المتسلسلة لا تتقارب بسرعة كافية بحيث يلزم أخذ حدود عددها كبيرا جدا لاجل الحصول على اللوغاريتم بتقريب مّا

ويتوصل الى متسلسلة أكثر تقاربا بالكيفية الآتية وهى اذا طرحت احدى المتسلسلتين

$$\text{لوَ}(١+\text{س})=\frac{\text{س}}{١}-\frac{\text{س}^{٢}}{٢}+\frac{\text{س}^{٣}}{٣}-\frac{\text{س}^{٤}}{٤}+\cdots \quad \text{و}$$

$$\text{لوَ}(١-\text{س})=-\frac{\text{س}}{١}-\frac{\text{س}^{٢}}{٢}-\frac{\text{س}^{٣}}{٣}-\frac{\text{س}^{٤}}{٤}-\cdots$$

من الاخرى تتلاشى الحدود الزوجية الرتبة وأما الحدود الفردية الرتبة فانها تضاف الى بعضها ويكون

$$\text{لوَ}(١+\text{س})-\text{لوَ}(١-\text{س})=\text{لوَ}\,\frac{١+\text{س}}{١-\text{س}}=٢\left(\frac{\text{س}}{١}+\frac{\text{س}^{٣}}{٣}+\frac{\text{س}^{٥}}{٥}+\cdots\right)$$

فاذا وضعنا
$$\frac{١+\text{س}}{١-\text{س}}=\frac{\text{ه}+١}{\text{ه}}$$

يكون
$$\text{س}=\frac{١}{٢\text{ه}+١}$$

وبتعويض س بمقداره تحصل المتسلسلة

$$\left.\begin{aligned}\text{لوَ}\,\frac{\text{ه}+١}{\text{ه}}&=\text{لوَ}(\text{ه}+١)-\text{لوَ}\,\text{ه}\\&=٢\left\{\frac{١}{٢\text{ه}+١}+\frac{١}{٣(٢\text{ه}+١)^{٣}}+\frac{١}{٥(٢\text{ه}+١)^{٥}}+\cdots\right\}\end{aligned}\right\}\qquad(١٤)$$

التي تتقارب بسرعة زائدة كلما كان العدد ه أكبر

بند ١٩٤ وبواسطة المتسلسلة (١٤) تحسب اللوغاريتمات النيبريانية فاذا جعل ه=١ في هذه المتسلسلة يكون

$$لو٢=\frac{٢}{٣}+\frac{٢}{٣\times٣^{٣}}+\frac{٢}{٥\times٣^{٥}}+\frac{٢}{٧\times٣^{٧}}+\dots$$

فيبتدأ بتحويل الكسور $\frac{٢}{٣}$ و $\frac{٢}{٣^{٣}}$ و $\frac{٢}{٣^{٥}}$ و $\frac{٢}{٣^{٧}}$ و ... الخ الى كسور أعشارية بالقسمة بالتوالي على ٩ ثم تقسم هذه الكسور على الاعداد الفردية وهي ١ و٣ و٥ و٧ و ... الخ وبواسطة العشرة حدود الاول يوجد

$$لو٢=٠٫٦٩٣١٤٧١٨٠٦$$

(العشرة الارقام مضبوطة)

واذا جعل ه=٢ في المتسلسلة (١٤) يكون

$$لو٣-لو٢=\frac{٢}{٥}+\frac{٢}{٣\times٥^{٣}}+\frac{٢}{٥\times٥^{٥}}+\dots$$

ويختصر الحساب بالتنبيه على ان القسمة على ٢٥ ترجع الى القسمة على ١٠٠ والضرب في ٤ وبواسطة السبعة الحدود الاول يحدث

$$لو٣=١٫٠٩٨٦١٢٢٨٨٧$$

ويتحصل على لو٤ بتضعيف لو٢ فيوجد

$$لو٤=١٫٣٨٦٢٩٤٣٦١٢$$

ويحسب لو٥ بواسطة المتسلسلة

$$لو٥-لو٤=\frac{٢}{٩}+\frac{٢}{٣\times٩^{٣}}+\frac{٢}{٥\times٩^{٥}}+\dots$$

ويتحصل على الكسور $\frac{٢}{٩}$ و $\frac{٢}{٩^{٣}}$ و $\frac{٢}{٩^{٥}}$ و ... الخ بقسمة الكسور التي تقدم حسابها وهي $\frac{٢}{٣}$ و $\frac{٢}{٣^{٥}}$ و $\frac{٢}{٣^{٩}}$ و ... الخ على ٣ وبواسطة الخمسة الحدود الاول يوجد أن

$$لو٥=١٫٦٠٩٤٣٧٩١٢٤$$

وهذه العشرة الارقام الاعشارية مضبوطة

ويتحصل

ويحصل على لو٦ باضافة لو٣ الى لو٢ ويحسب لو٧ بواسطة المتسلسلة بأن يجعل ه=٦ وهلم جرا

(فى حساب اللوغاريتمات المعتادة)

بند ١٩٥ متى أريد حساب اللوغاريتمات المعتادة يلزم أن يبتدأ بحساب المقياس ولذلك يحسب لو٢ بواسطة المتسلسلة

$$\text{لو}\,٢=\frac{٢}{٣}+\frac{٢}{٣\times٣^{٣}}+\frac{٢}{٥\times٣^{٥}}+\frac{٢}{٧\times٣^{٧}}+\cdots$$

كما تقدم فى البند السابق فيوجد ان

$$\text{لو}\,٢=٠٫٦٩٣١٤٧١٨٠٦$$

فاذا ضعف هذا اللوغاريتم يحصل اللوغاريتم النبيريانى لعدد ٤ وهو

$$\text{لو}\,٤=١٫٣٨٦٢٩٤٣٦١٢$$

ثم يعين اللوغاريتم النبيريانى لعدد ٥ بواسطة المتسلسلة

$$\text{لو}\,٥-\text{لو}\,٤=\frac{٢}{٩}+\frac{٢}{٣\times٩^{٣}}+\frac{٢}{٥\times٩^{٥}}+\cdots$$

مع ملاحظة ان هذه الكسور الجديدة تستنتج من الكسور التى استعملت لحساب لو٢ كما تقدم ومتى علم لو٢ و لو٥ يحدث بجمع هذين اللوغاريتمين

$$\text{لو}\,١٠=٢٫٣٠٢٥٨٥٠٩٣٠$$

ولايخفى ان مقياس اللوغاريتمات المعتادة مرموزاله بحرف م يساوى $\frac{١}{\text{لو}\,١٠}$ (بند ١٨١) فبقسمة ١ على لو١٠ يوجد ان مقدار هذا المقياس هو

$$م=٠٫٤٣٤٢٩٤٤٨١٩$$

وبتضعيفه يحدث

$$٢م=٠٫٨٦٨٥٨٨٩٦٣٨$$

ويحصل على اللوغاريتمات المعتادة بضرب اللوغاريتمات النبيريانية فى المقياس

وبذلك تؤول متسلسلة (١٤) الى هذه

$$\text{لو}(\text{ه}+1)-\text{لوه}=2\text{م}\left\{\frac{1}{2\text{ه}+1}+\frac{1}{3(2\text{ه}+1)^{3}}+\frac{1}{5(2\text{ه}+1)^{5}}+\cdots\right\} \qquad (15)$$

وهذه المتسلسلة هى التى تستعمل لحساب اللوغاريتمات المعتادة من بعد فصل الحدود وكتابتها هكذا

$$\text{لو}(\text{ه}+1)-\text{لوه}=\frac{2\text{م}}{2\text{ه}+1}+\frac{2\text{م}}{3(2\text{ه}+1)^{3}}+\frac{2\text{م}}{5(2\text{ه}+1)^{5}}+\cdots$$

فيحصل على اللوغاريتم المعتاد لعدد ٢ بضرب اللوغاريتم النبيريانى لعدد ٢ الذى استعمل لايجاد المقياس فى م ويحصل على لو ٣ بواسطة المتسلسلة

$$\text{لو}3-\text{لو}2=\frac{2\text{م}}{5}+\frac{2\text{م}}{3\times5^{3}}+\frac{2\text{م}}{5\times5^{5}}+\cdots$$

بان تحسب أولا الكسور $\frac{2\text{م}}{5}$ ، $\frac{2\text{م}}{5^{3}}$ ، $\frac{2\text{م}}{5^{5}}$ ، ... الخ بالقسمة على ٢٥ أولا ولاجل الاختصار بالضرب فى ٤ والقسمة على ١٠٠ ثم تقسم هذه الكسور على ١ ، ٣ ، ٥ ، ... الخ بالتناظر ثم تجمع النواتج على بعضها والناتج الجديد على لو ٢ فيحدث لو ٣ ويحصل على لو ٤ بتضعيف لو ٢ ويحصل على لو ٥ بضرب المقياس فى اللوغاريتم النبيريانى لعدد ٥ الذى استعمل لايجاد المقياس المذكور ويوجد لو ٦ بضم لو ٢ على لو ٣ ويحسب لو ٧ بواسطة المتسلسلة

$$\text{لو}7-\text{لو}6=\frac{2\text{م}}{13}+\frac{2\text{م}}{3\times13^{3}}+\frac{2\text{م}}{5\times13^{5}}+\cdots$$

ويحصل على لو ٨ بضم لو ٤ على لو ٢ ويحصل على لو ٩ بتضعيف لو ٣ ولا يخفى ان لو ١٠ = ١ ويحسب لو ١١ بواسطة المتسلسلة وهلم جرا الى مالا نهاية

وحيث ان المتسلسلة (١٥) تتقارب بسرعة ازيد كلما كان العدد الذى يحسب لوغاريتمه كبيرا فبعد قليل يصير الحساب بسيطا جدا مثلا يحصل على لو ١٠١ مركبا من ثمانية أرقام أعشارية مضبوطة بواسطة حدين فقط بحيث يكون

$$\text{لو}101-2=\frac{2\text{م}}{201}+\frac{2\text{م}}{3\times201^{3}}$$

فيحسب أولا الحد الاول بقسمة العدد المعلوم وهو ٢م على ٢٠١ ثم يستنتج الحد الثانى

من

من الاول بقسمة هذا الحد الاول على ٣×٠١ ٢ أو على ١٢١٢٠٣ والحد الاول من المتسلسلة يكفى للحصول على لو١٠٠١ بحيث يكون

$$لو١٠٠١ - ٣ = \frac{٢م}{٢٠٠١}$$

وبالاولوية يكون الحد الاول كافيا لايجاد لوغاريتم أى عدد صحيح أكبر من ١٠٠١ بـ١٩٦د وهذه هى الكيفية التى يعمل بها الاجل حساب الجداول اللوغاريتمية للاعداد الصحيحة وجداول لالند الصغيرة تحتوى على لوغاريتمات الاعداد الصحيحة من ١ الى ١٠٠٠٠ مشتملة على خمسة أرقام أعشارية وجداول كاليت تحتوى على لوغاريتمات الاعداد الصحيحة من ١ الى ١٠٠٠٠٠ مشتملة على سبعة منازل أعشارية ولاجل ايجاد لوغاريتم أى عدد كسرى مثل ه+ح محصور بين ١، ١٠٠٠ أو بين ١٠٠٠٠، ١٠٠٠٠٠ يبحث فى الجداول عن لوغاريتم الجزء الصحيح ه ثم يضاف اليه الفرق الجدولى وهو

$$ف = لو(ه+١) - لوه$$

من بعد ضربه فى الكسر ح (جزء أول بـ٣٣٧د) والزيادة الحقيقية للوغاريتم هى

$$ى = لو(ه+ح) - لوه = لو\frac{ه+ح}{ه} = لو\left(١+\frac{ح}{ه}\right)$$

وبواسطة التناسب توجد الزيادة التقريبية وهى

$$حف = حلو\frac{ه+١}{ه} = حلو\left(١+\frac{١}{ه}\right)$$

ويكون الخطأ الواقع هو

$$ى - حف = لو\left(١+\frac{ح}{ه}\right) - ح لو\left(١+\frac{١}{ه}\right) \qquad (١٦)$$

ولنثبت على ان هذا الخطأ يكون موجبا فنقول اذا أوقفت متسلسلة تحليل $\overline{لو}(١+س)$ بالحد الاول يحدث

$$\overline{لو}(١+س) = \frac{س}{١+ىس} \qquad (١٧)$$

وحرف ى رمز لعدد موجب أصغر من الواحد ومن هذا القانون يتضح انه متى كان المتغير س موجبا يكون مقدار $\overline{لو}(١+س)$ أكبر من $\frac{س}{١+س}$ اذا تقرر هذا نأخذ الدالة $\frac{\overline{لو}(١+س)}{س}$ التى مشتقتها هى

$$\frac{\frac{\text{س}}{\text{س}+1}-\text{لو}(1+\text{س})}{\text{س}^2}$$

فحيث ان هذه المشتقة سالبة فيتناقص مقدار الدالة متى زاد المتغير الموجب وهو س وحينئذ اذا أعطينا للمتغير س مقداري $\frac{\text{ح}}{\text{ه}}$ و $\frac{1}{\text{ه}}$ اللذين ثانيهما أكبر من الاول يحدث

$$\frac{\text{لو}\left(1+\frac{\text{ح}}{\text{ه}}\right)}{\frac{\text{ح}}{\text{ه}}} > \frac{\text{لو}\left(1+\frac{1}{\text{ه}}\right)}{\frac{1}{\text{ه}}}$$

او

$$\text{لو}\left(1+\frac{\text{ح}}{\text{ه}}\right) > \text{ح}\,\text{لو}\left(1+\frac{1}{\text{ه}}\right)$$

واذن يكون

$$\text{ء} > \text{ح}\text{ف}$$

ولنبحث الآن عن نهاية الخطأ فبموجب معادلة (١٧) يكون

$$\text{ف}=\text{م}\,\text{لو}\left(1+\frac{1}{\text{ه}}\right)=\frac{\text{م}}{\text{ه}+\text{ى}}$$

و

$$\text{ء}=\text{م}\,\text{لو}\left(1+\frac{\text{ح}}{\text{ه}}\right)=\frac{\text{م}\,\text{ح}}{\text{ه}+\text{ى}'\text{ح}}$$

ورمزا ى , ىَ رمزان لعددين موجبين أصغر من الواحد ومن ذلك يستنتج أن

$$\frac{\text{ء}}{\text{ح}\text{ف}}=\frac{\text{ه}+\text{ى}}{\text{ه}+\text{ى}'\text{ح}} < \frac{\text{ه}+1}{\text{ه}}=1+\frac{1}{\text{ه}}$$

واذن يكون

$$\text{ء}-\text{ح}\text{ف} < \frac{\text{ح}\text{ف}}{\text{ه}}$$

وحيث ان زيادة المتغير وهي ح أصغر من الواحد فيكون

$$\text{ء}-\text{ح}\text{ف} < \frac{\text{ف}}{\text{ه}} \qquad (18)$$

ففي جداول لالند حيث ان العدد ه مساو أو اكبر من 10^3 والفرق الجدولي اقل من $\frac{44}{10^5}$ فيكون الخطاء الواقع اقل من $\frac{44}{10^5\times10^3}$ وبناء على ذلك يكون اصغر من $\frac{5}{10^7}$ أو اصغر من $\frac{1}{2\times10^6}$ أعني أصغر من نصف وحدة الرتبة السادسة الاعشارية وحينئذ لا يؤثر على الخمسة الارقام الاول الاعشارية من اللوغاريتم وفي جداول كاليت حيث ان

ان $ن$ مساو أو أكبر من $١٠^{٤}$ والفرق الجدولي أقل من $\frac{٤٣٥}{١٠^{٧}}$ فيكون الخطأ الواقع اصغر من $\frac{٤٣٥}{١٠^{٤}\times ١٠^{٧}}$ وبناء على ذلك يكون اصغر من $\frac{٥}{١٠^{٩}}$ أو أصغر من $\frac{١}{٢\times ١٠^{٨}}$ اعني اصغر من نصف وحدة الرتبة التاسعة الاعشارية وحينئذ لا يؤثر على السبعة الارقام الاول الاعشارية من اللوغاريتم

(الفصل السادس)

في تعيين المقادير الحقيقية للدوال التي توجد بصورة غير معينة

(في الحالة التي توجد فيها الدالة بالصورة $\frac{٠}{٠}$)

بند ١٩٧ لتكن الدالة

$$ص=\frac{ء(س)}{ء_{١}(س)}$$

ولنفرض انه متى كان $س=ح$ يكون $ء(ح)=٠$ و $ء_{١}(ح)=٠$ فتوجد الدالة $ص$ بالصورة $\frac{٠}{٠}$ فلاجل تعيين النهاية التي تميل اليها الدالة $ص$ متى مال المتغير $س$ الى $ح$ نقول

حيث أن $ء(ح)=٠$ و $ء_{١}(ح)=٠$ فيمكن أن يوضع

$$\frac{ء(س)}{ء_{١}(س)}=\frac{ء(س)-ء(ح)}{ء_{١}(س)-ء_{١}(ح)}=\frac{ء(س)-ء(ح)}{س-ح}:\frac{ء_{١}(س)-ء_{١}(ح)}{س-ح}$$

فاذا مال $س$ الى $ح$ يميل حدا النسبة الموجودة في الطرف الثاني من هذه المساواية بموجب تعريف المشتقة الى المشتقتين $ءَ(ح)$ و $ءَ_{١}(ح)$ على التناظر وحينئذ اذا اخذت نهايتا الطرفين عندما يكون $س=ح$ يكون

$$نها\frac{ء(س)}{ء_{١}(س)}=\frac{ءَ(ح)}{ءَ_{١}(ح)} \quad أو \quad نها\frac{ء(س)}{ء_{١}(س)}=نها\frac{ءَ(س)}{ءَ_{١}(س)}$$

وحينئذ إذا لم تكن المشتقتان $ءَ(س)$ و $ءَ_{١}(س)$ معدومتين ولا لانهائيتين عند

مايكون $س = ح$ يكون المقدار الحقيقي للدالة ص هو مقدار خارج قسمة مشتقي حدي هذه الدالة على بعضهما

فاذا كان $ء(ح) = ٠$ و $ء_١(ح) = ٠$ يكون المقدار الحقيقي للخارج $\frac{ء(س)}{ء_١(س)}$ هو $\frac{ء(ح)}{ء_١(ح)}$

وعلى العموم يكون المقدار الحقيقي للدالة ص هو خارج قسمة المشتقتين الاوليين المتحدتين في الدرجة واللتين لاتنعدمان ولا تصيران لانهائيتين متى كان $س = ح$

فاذا كانت احدى هاتين المشتقتين الاخيرتين معدومة يشاهد بالسهولة ان المقدار الحقيقي للدالة ص يكون معدوما أولانهائيا فاذا كان البسط هو المعدوم يكون مقدار الدالة ص معدوما واذا كان المقام معدوما يكون مقدار الدالة لانهائيا

ب ١٩٨ د (أمثلة) الاول ليكن المطلوب تعيين المقدار الحقيقي للدالة $\frac{س^م - ح^م}{س - ح}$ عند مايكون $س = ح$

فخارج قسمة المشتقتين على بعضهما هو $\frac{م س^{م-١}}{١}$ ونهاية هذا الخارج هي $م ح^{م-١}$

الثاني ليكن المطلوب تعيين المقدار الحقيقي للدالة

$$\frac{هـ^{س} - هـ^{-س} - ٢س}{س - جا س}$$

متى كان $س = ٠$

فيعلم أن

$$\frac{ء(س)}{ء_١(س)} = \frac{هـ^{س} + هـ^{-س} - ٢}{١ - جتا س} = \frac{٠}{٠} \text{ متى كان } س = ٠ \text{ و}$$

$$\frac{ء'(س)}{ء'_١(س)} = \frac{هـ^{س} - هـ^{-س}}{جا س} = \frac{٠}{٠} \text{ متى كان } س = ٠ \text{ و}$$

$$\frac{ء''(س)}{ء''_١(س)} = \frac{هـ^{س} + هـ^{-س}}{جتا س} = ٢ \text{ متى كان } س = ٠$$

وحينئذ تكون النهاية المطلوبة هي ٢

الحالة

(الحالة التى توجد فيها الدالة بالصورة $\frac{\infty}{\infty}$)

بند ١٩٩ لنفرض انه متى كان س = ح توجد الدالة ص = $\frac{\text{د}(\text{س})}{\text{د}_1(\text{س})}$ بالصورة $\frac{\infty}{\infty}$
اعنى ان يكون د (ح) = ∞ و د_1 (ح) = ∞ فيمكن ان يوضع

$$\frac{\text{د}(\text{س})}{\text{د}_1(\text{س})} = \frac{1}{\text{د}_1(\text{س})} : \frac{1}{\text{د}(\text{س})}$$

فيشاهد انه متى كان س = ح يكون كل من الكسرين $\frac{1}{\text{د}_1(\text{س})}$ و $\frac{1}{\text{د}(\text{س})}$ معدوما
واذن يكون المقدار الحقيقى لخارج قسمة هذين الكسرين على بعضهما مساويا لخارج قسمة مشتقيهما على بعضهما (بند ١٩٧) وهذا الخارج الاخير هو

$$\frac{-\text{د}'_1(\text{س})}{\left\{\text{د}_1(\text{س})\right\}^2} : \frac{-\text{د}'(\text{س})}{\left\{\text{د}(\text{س})\right\}^2} \quad \text{او} \quad \left\{\frac{\text{د}(\text{س})}{\text{د}_1(\text{س})}\right\}^2 : \frac{\text{د}'(\text{س})}{\text{د}'_1(\text{س})}$$

وحينئذ اذا لم تكن نهاية ص معدومة ولا نهائية ورمزنا لها بحرف ه يحدث

$$\text{نها}\,\frac{\text{د}(\text{س})}{\text{د}_1(\text{س})} = \text{نها}\left\{\frac{\text{د}(\text{س})}{\text{د}_1(\text{س})}\right\}^2 : \text{نها}\,\frac{\text{د}'(\text{س})}{\text{د}'_1(\text{س})}$$

او

$$\text{ه} = \text{ه}^2 : \text{نها}\,\frac{\text{د}'(\text{س})}{\text{د}'_1(\text{س})}$$

واذن يكون

$$\text{ه} = \text{نها}\,\frac{\text{د}'(\text{س})}{\text{د}'_1(\text{س})}$$

كما فى الحالة الاولى (بند ١٩٧)
فاذا كانت نهاية ص صفرا لا يمكن تطبيق الدليل السابق الا انه يلاحظ حينئذ انه اذا رمز بحرف ك لكمية ثابتة تؤول الكمية

$$\frac{\text{د}(\text{س})}{\text{د}_1(\text{س})} + \text{ك} \quad \text{او} \quad \frac{\text{د}(\text{س}) + \text{ك}\,\text{د}_1(\text{س})}{\text{د}_1(\text{س})}$$

الى $\frac{\infty}{\infty}$ كذلك متى كان س = ح وان مقدارها الحقيقى يكون ك حيث ان نهاية $\frac{\text{ء}(\text{س})}{\text{ء}_1(\text{س})}$ هى صفر بالفرض وحينئذ يمكن تطبيق القاعدة المتقدمة ويكون

$$\text{ك} = \frac{\text{ءَ}(\text{ح}) + \text{ك}\,\text{ءَ}_1(\text{ح})}{\text{ءَ}_1(\text{ح})} = \frac{\text{ءَ}(\text{ح})}{\text{ءَ}_1(\text{ح})} + \text{ك}$$

واذن يكون

$$\frac{\text{ءَ}(\text{ح})}{\text{ءَ}_1(\text{ح})} = ٠ \quad \text{او}\quad \text{نها}\ \frac{\text{ءَ}(\text{س})}{\text{ءَ}_1(\text{س})} = ٠ = \text{نها}\ \frac{\text{ء}(\text{س})}{\text{ء}_1(\text{س})}$$

وتكون نهاية ص هى النسبة بين المشتقتين أيضا

ومثل ذلك يحصل اذا كانت نهاية ص لانهائية لانه اذا كان $\frac{\text{ء}(\text{ح})}{\text{ء}_1(\text{ح})} = \infty$ ينتج من ذلك أن $\frac{\text{ء}_1(\text{ح})}{\text{ء}(\text{ح})} = ٠$ وبموجب ما تقدم يكون $\frac{\text{ءَ}_1(\text{ح})}{\text{ءَ}(\text{ح})} = ٠$ وبناء على ذلك يكون

$$\frac{\text{ءَ}(\text{ح})}{\text{ءَ}_1(\text{ح})} = \infty$$

(الحالة التى توجد فيها الدالة بالصورة $٠ \times \infty$)

بند ٢٠٣ اذا وجد حاصل ضرب مثل $\text{ص} = \text{ء}(\text{س}) \times \text{ء}_1(\text{س})$ ووجد أن $\text{ء}(\text{ح}) = ٠$ و $\text{ء}_1(\text{ح}) = \infty$ متى كان س = ح يكتب

$$\text{ص} = \text{ء}(\text{س}) : \frac{1}{\text{ء}_1(\text{س})}$$

او

$$\text{ص} = \text{ء}_1(\text{س}) : \frac{1}{\text{ء}(\text{س})}$$

ثم تطبق القواعد المتقدمة لانه بالصورة الاولى يؤل ص الى $\frac{٠}{٠}$ وبالصورة الثانية يؤل الى $\frac{\infty}{\infty}$

*(الحالة

(الحالة التى توجد فيها الدالة بالصورة 0^0 أو بالصورة 1^∞)

بند ٢٠١ لتكن الدالة

$$ص = ء_1(س)^{ء(س)}$$

ولنفرض ان $ء_1(ح) = 0$ وان $ء(ح) = 0$ فاذا أخذ لوغاريتما الطرفين يحدث

$$لو ص = ء(س) لو ء_1(س)$$

فاذا أمكن ايجاد نهاية الحاصل $ء(س)$ لو $ء_1(س)$ بواسطة قاعدة بند ٢٠٠ تحصل نهاية لو صہ وبالتبعية تحصل نهاية صہ

بند ٢٠٢ ولتكن الدالة

$$ص = ء_1(س)^{ء(س)}$$

ولنفرض ان $ء_1(ح) = 1$ وان $ء(ح) = \infty$ فبأخذ لوغاريتمى الطرفين يحدث

$$لو ص = ء(س) لو ء_1(س)$$

وحينئذ يوجد لو صہ بالصورة $\infty \times 0$ وبواسطة قاعدة بند ٢٠٠ يحصل على المقدار الحقيقى للكمية لو صہ وحينئذ يعلم مقدار صہ

(الحالة التى توجد فيها الدالة بالصورة $\infty - \infty$)

بند ٢٠٣ اذا آل الفرق بين دالتين مثل $ء(س)$ و $ء_1(س)$ الى $\infty - \infty$ يمكن وضع هذا الفرق بالصورة

$$ء(س) - ء_1(س) = \frac{1}{\frac{1}{ء(س)}} - \frac{1}{\frac{1}{ء_1(س)}} = \frac{\frac{1}{ء_1(س)} - \frac{1}{ء(س)}}{\frac{1}{ء(س)\,ء_1(س)}}$$

وحينئذ يؤول هذا الفرق الى $\frac{0}{0}$ وبموجب قاعدة بند ١٩٧ يحصل على مقداره الحقيقى

(فى تعميم القواعد المتقدمة)

بعض القواعد المتقدمة التي بها يتحصل على المقدار الحقيقي للدوال التي تصير غير معينة متى كان $\text{س}=\text{ح}$ حقيقية ايضا متى صار ح لانهائيا حيث انها حقيقية مهما كان كبر ح الا انه لا يمكن اقامة الدليل بالكيفية المتقدمة ولاجل الوصول الى هذه القواعد يكفي ان نثبت على انه اذا آل الكسر $\frac{\text{د(س)}}{\text{د}_1\text{(س)}}$ الى ÷ متى كان $\text{س}=\infty$ يكون $\text{نها}\,\frac{\text{د(س)}}{\text{د}_1\text{(س)}}=\text{نها}\,\frac{\text{د(س)}}{\text{د}_1\text{(س)}}$ حيث ان القواعد الاخرى ناتجة من هذه القاعدة الاخيرة ولاجل ذلك نضع $\text{س}=\frac{1}{\text{ص}}$ فيكون

$$\text{د(س)}=\text{د}\left(\frac{1}{\text{ص}}\right)\quad\text{و}\quad\text{د}_1\text{(س)}=\text{د}_1\left(\frac{1}{\text{ص}}\right)$$

واذن يكون

$$\text{نها}\,\frac{\text{د(س)}}{\text{د}_1\text{(س)}}=\text{نها}\,\frac{\text{د}\left(\frac{1}{\text{ص}}\right)}{\text{د}_1\left(\frac{1}{\text{ص}}\right)}$$

لكن اذا فرض ان $\text{س}=\infty$ يكون $\text{ص}=0$ واذن يكون

$$\text{نها}\,\frac{\text{د}\left(\frac{1}{\text{ص}}\right)}{\text{د}_1\left(\frac{1}{\text{ص}}\right)}=\text{نها}\,\frac{\text{د}'\left(\frac{1}{\text{ص}}\right)\left(-\frac{1}{\text{ص}^2}\right)}{\text{د}'_1\left(\frac{1}{\text{ص}}\right)\left(-\frac{1}{\text{ص}^2}\right)}$$

أو

$$\text{نها}\,\frac{\text{د(س)}}{\text{د}_1\text{(س)}}=\text{نها}\,\frac{\text{د}'\left(\frac{1}{\text{ص}}\right)}{\text{د}'_1\left(\frac{1}{\text{ص}}\right)}=\text{نها}\,\frac{\text{د}'\text{(س)}}{\text{د}'_1\text{(س)}}$$

الا انه يلزم قبل تطبيق تلك القواعد ان يتحقق من أن $\frac{\text{د(س)}}{\text{د}'\text{(س)}}$ و $\frac{\text{د}'\text{(س)}}{\text{د}'_1\text{(س)}}$ يميلان الى نهاية معينة متى مال س الى ∞ مثلا الكسر

$$\frac{\text{س}+\text{جتا س}}{\text{س}-\text{جا س}}=\frac{1+\frac{\text{جتا س}}{\text{س}}}{1-\frac{\text{جا س}}{\text{س}}}$$

يميل

يئول الى الواحد متى كان س = ∞ بخلاف النسبة بين مشتقتى البسط والمقام فان نهايتها تكون غير معينة بالكلية متى كان س = ∞

بند ٢٠٥ (تنبيه) قد يتأتى انه اذا طبقت القواعد المتقدمة توجد مشتقات تكون النسبة بينها غير معينة دائما كالدالة التى يبحث عن المقدار الحقيقى لها ففى هذه الحالة تستعمل طرق تحليلية خصوصية وغالبا يكون الاحسن فى هذه الحالة تعويض س بكميه ح + ل ثم يختصر الناتج من الوضع ويجعل ل = ٠ بعد ذلك مثلا لتكن الدالة

$$\frac{\sqrt[٣]{س-ح}}{\sqrt[٤]{س^{٢}-ح^{٢}}}$$

فهذه الدالة تؤل الى $\frac{٠}{٠}$ متى كان س = ح وكذلك تكون جميع مشتقات حدى هذا الكسر لانهائية فاذا وضعنا س = ح + ل يحدث

$$\frac{\sqrt[٣]{ل}}{\sqrt[٤]{٢حل+ل^{٢}}} \quad \text{أو} \quad \frac{ل^{\frac{١}{٣}}}{ل^{\frac{١}{٤}}(٢ح+ل)^{\frac{١}{٤}}}$$

أو

$$\frac{ل^{\frac{١}{١٢}}}{(٢ح+ل)^{\frac{١}{٤}}}$$

وبهذه الصورة يشاهد ان النهاية صفر متى جعل ل = ٠

(الباب الثالث)
فى المعادلات

(الفصل الاول)
فى حساب الكميات التخيلية

(تعاريف)

بند ٢٠٦ قد علمنا فى الجزء الاول من كتاب الكمالات التوفيقية فى الاصول الجبرية ان

حل المعادلة ذات الدرجة الثانية يوصل الى مقادير جبرية بالصورة $ح+ء\sqrt{-1}$ وهى التى أطلقنا عليها اسم كميات تخيلية فاذا رمزنا بحرف ع للكمية التخيلية وهى $\sqrt{-1}$ فان الكميات التخيلية تكتب بالصورة $ح+ءع$ التى فيها حرفا ح و ء رمزان لكميتين حقيقيتين قد تكونان موجبتين وقد تكونان سالبتين

فاذا رمزنا بحرف ل لعدد موجب و بحرف ز لزاوية يمكن دائما ان يجعل

$$ح=ل \text{ جتا } ز \quad ، \quad ء=ل \text{ جا } ز$$

فاذا ربع طرفا هاتين المتساويتين وجمعت المتساويتان المتحصلتان على بعضهما يحدث

$$ل=\sqrt{ح^{2}+ء^{2}} \qquad (1)$$

واذن يكون

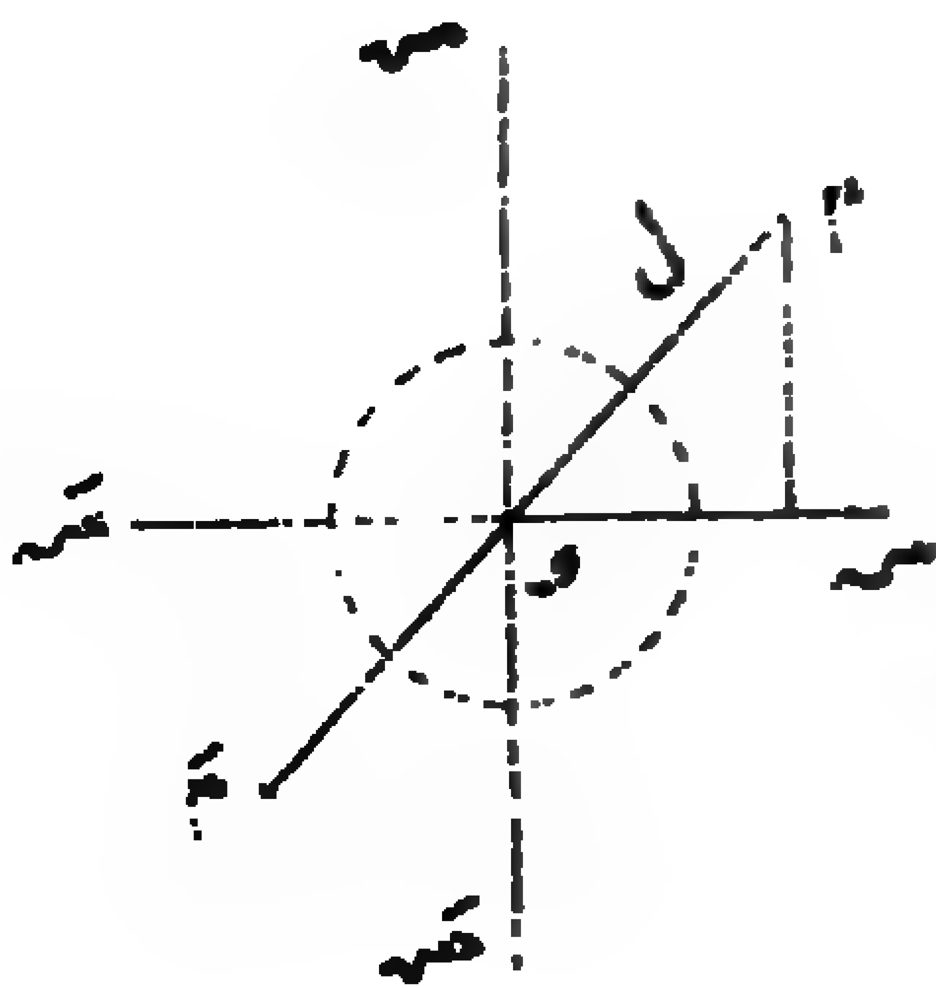
$$\text{جتا } ز=\frac{ح}{ل} \quad ، \quad \text{جا } ز=\frac{ء}{ل} \qquad (2)$$

وبهذه الكيفية توضع الكمية التخيلية $ح+ءع$ هكذا

$$ل\ (\text{جتا } ز+ع \text{ جا } ز)$$

والعدد الموجب ل يسمى مقياس الكمية التخيلية والزاوية ز تسمى دليلها والمقياس ل المعلوم بالمعادلة (1) يكون مقداره معينا تعيينا تاما واما الدليل ز فيمكن ان تكون له مقادير لا حصر لعددها لانه حيث كانت الزاوية ز معلومة بجيبها او بجيب تمامها بواسطة المعادلتين (2) فيكون لها مقدار وحيد محصور بين ٠ و ٢ط ثم يمكن زيادة هذه الزاوية أو نقصها بعدد حيثما اتفق يكون مكرر العدد ٢ط بحيث اذا رمزنا بحرف $ز_{.}$ للمقدار الاول للزاوية ز وبحرف ك لعدد صحيح حيثما اتفق موجب أو سالب تكون جميع مقادير ز محصورة فى القانون

$$ز=ز_{.}+2ك ط$$



بـ٢٠٧ـد لنرسم فى مستو مستقيمين متعامدين مثل وس و وص فيمكن بيان الكمية التخيلية بطول وم مساو لمقياسها ل ومأخوذ فى اتجاه يكون مع المستقيم الثابت وس زاوية تساوى لدليلها ز وتحسب الزاوية ز من ابتداء وس بالدوران فى جهة يتفق عليها مثلا من

وس الى وص فاذا غيرت الزاوية ز من ٠ الى ٢ط يدور المستقيم وم حول نقطة و بالابتداء من الوضع وس ويرسم المستوى بأكمله

والكميات الحقيقية حالات خصوصية من الكميات التخيلية لانه متى كان ز=٠ تصير الكمية التخيلية كمية حقيقية موجبة ل وتكون مبينة بطول يساوى ل مأخوذ على المحور وس في الجهة وس ومتى كان ز=ط تصير الكمية التخيلية كمية حقيقية سالبة -ل وتكون مبينة بطول يساوى اقياسها ل مأخوذا على المحور الثابت في الجهة وسَ

ومتى كان ز = ط/٢ تكون الكمية التخيلية التى تؤل الى ل ء مبينة بطول يساوى ل مأخوذ على المستقيم وص العمود على وس ومتى كان ز = ٣ط/٢ تكون الكمية التخيلية التى تؤل الى -ل ء مبينة بطول يساوى ل مأخوذ على العمود المذكور وانما في الجهة العكسية وصَ

وعلى العموم متى اضيف ط للدليل فحيث ان جا ، جتا تتغير اشارتاهما فتتغير اشارة الكمية التخيلية ل (جتاز + ء جا ز) ويعلم من ذلك ان كل كميتين تخيليتين متساويتين ومختلفتين في الاشارة تكونان مبينتين بطولين متساويين مثل وم ، ومَ مأخوذين في جهتين متضادتين

فاذا أنزلنا من نقطة م عمودا مح على المحور سسَ يحدث

ح=ل جتاز=وح ، ء=ل جا ز=حم

ويشاهد من ذلك ان الجزء الحقيقي ح من الكمية التخيلية يساوى المسقط وح للمستقيم وم على المحور الثابت وس وان معامل ء وهو ء يساوى المسقط حم للمستقيم المذكور على المحور وص ويعلم من ذلك ان كتابة الكمية التخيلية بالصورة ح+ءء ترجع الى تعويض الخط المستقيم وم بالخط المنكسر وحم

بند ٢٠٨ ويتصور مقدار الكمية التخيلية بطول المستقيم وم الدال عليها أعنى بقياس الكمية التخيلية فمتى كان القياس صغيرا يقال ان الكمية التخيلية صغيرة ومتى انعدم القياس يقال ان الكمية التخيلية انعدمت وحيث ان القياس ل يساوى $\sqrt{ح^٢+ء^٢}$ فلاجل ان يكون القياس معدوما يلزم ويكفى ان تكون كلتا الكميتين الحقيقيتين ح ، ء معدومة

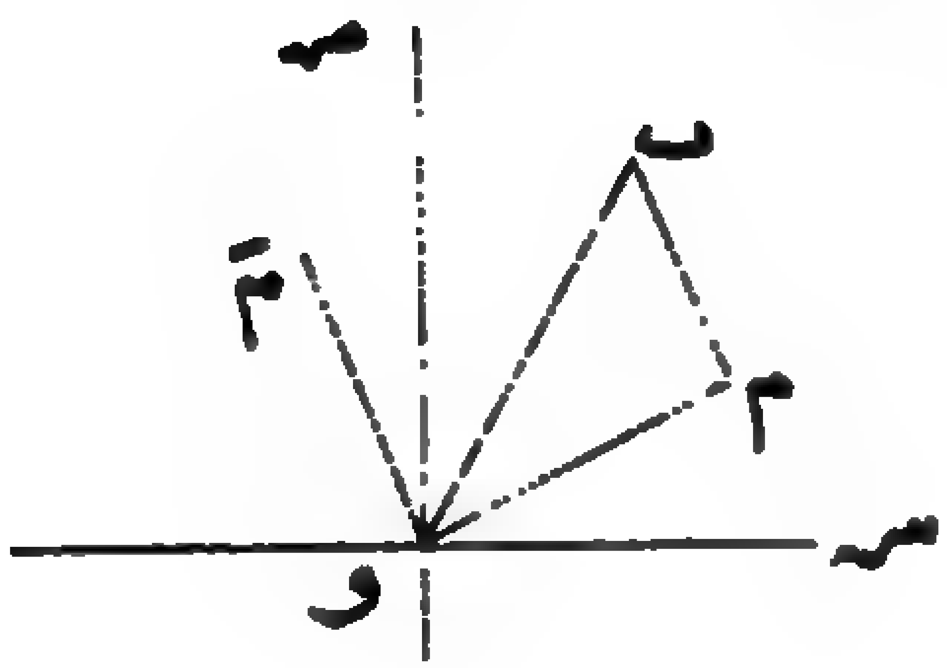
ويقال ان الكميتين التخيليتين متساويتان متى كانتا مبينتين بطول واحد وم يؤخذ فى اتجاه واحد أعنى متى كان مقياساهما متساويين ودليلاهما متساويين أو لا يختلفان عن بعضهما الا بعدد صحيح من المحيطات ومن الواضح انه اذا كانت كميتان تخيليتان مثل ح+ءء و حَ+ءَء متساويتين يكون ح=حَ و ء=ءَ

(فى الجمع)

بمقتضى ما تقدم قد اتفق على ان قواعد الحساب الجبرى تسرى على الكميات التخيلية كما لو كان حرف ء رمز الكمية حقيقية بشرط ان يعوض ء² فى الناتج بعدد -١ فلنفرض أولا ان المطلوب جمع كميتين تخيليتين مثل ح+ءء و حَ+ءَء فبجمع الجزئين الحقيقيين على بعضهما والجزئين التخيليين على بعضهما يحدث

$$(ح+ءء)+(حَ+ءَء)=(ح+حَ)+(ء+ءَ)ء$$

فاذا بينت الكميتان التخيليتان المفروضتان بطولين مثل وم و ومَ كما تقدم سهل مشاهدة ان الجمع غايته أخذ هذين الطولين أحدهما بعد الآخر كل فى اتجاهه فاذا مددنا من نقطة م التى هى نهاية الطول وم مستقيما مب يساوى ويوازى ومَ ووصلنا مستقيم وب



يكون المستقيم وب مبينا لمجموع الكميتين التخيليتين لانه حيث كان مسقط المستقيم وب على كل من المحورين مساويا لمجموع مسقطى جزئى الخط المنكسر ومب فيكون مسقط المستقيم وب مساويا للمجموعين ح+حَ و ء+ءَ وحينئذ يكون هذا المستقيم دالا على الكمية التخيلية وهى

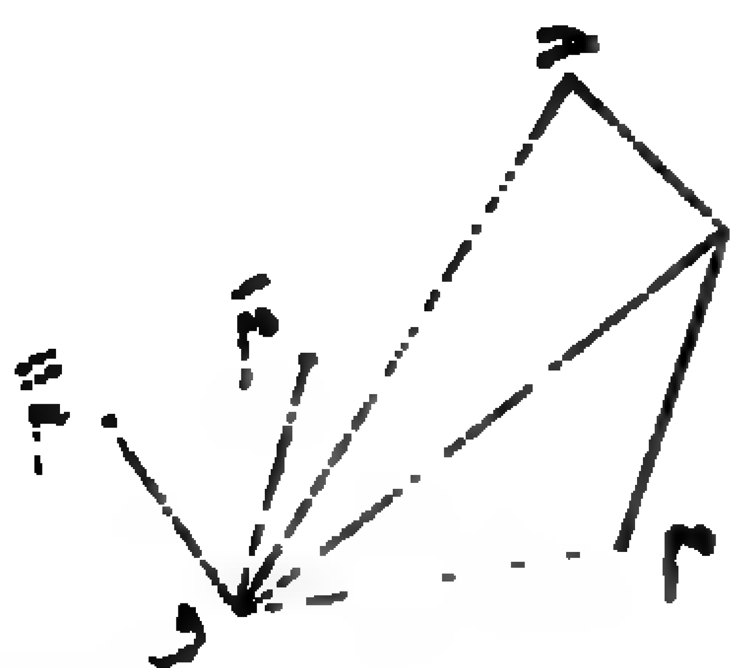
$$(ح+حَ)+(ء+ءَ)ء$$

ولننبه على ان طول الضلع وب من المثلث ومب أصغر من مجموع الضلعين الآخرين وهما وم و مب وأكبر من فاضلهما وينتج من ذلك ان مقياس مجموع كميتين تخيليتين أصغر من مجموع مقياسى هاتين الكميتين وأكبر من فاضلهما

وما ذكرناه يسرى على جمع كميات تخيلية عددها حيثما اتفق فليكن المطلوب جمع

ثلاث

ثلاث كميات تخيلية مبينة بالاطوال وم و ومَ و ومً
فنمد من نقطة م مستقيم م ب يساوى ويوازى
المستقيم و مَ ونمد من نقطة ب مستقيم ب ح
يساوى ويوازى المستقيم ومً فحيث كان المستقيم
و ب مجموع الكميتين الاوليين فيكون المستقيم
و ح مجموع كميتى و ب و ومً وبناء على ذلك يكون
هو مجموع الكميات الثلاثة المفروضة وحيث ان المستقيم و ح أصغر من الخط المنكسر
وم ب ح فيتضح ان مقياس مجموع عدة كميات تخيلية يكون أصغر من مجموع مقاييس
هذه الكميات

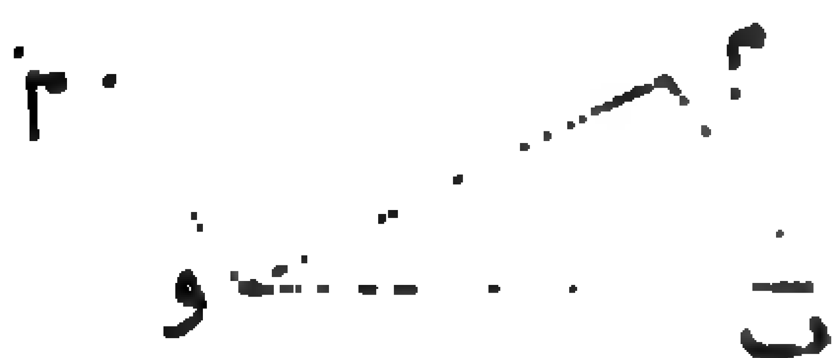


(فى الطرح)

بند ٣١٠ طرح كمية تخيلية مثل حَ + ءَ ء من كمية أخرى مثل ح + ء ء عبارة
عن ايجاد كمية تخيلية ثالثة اذا أضيفت الى الاولى تحصل الثانية والفرق المطلوب هو

$$(ح - حَ) + (ء - ءَ) ء$$

وليكن وم و ومَ الطولين الدالين على الكميتين التخيليتين المفروضتين ولنضف
للمستقيم وم مستقيما مثل م ب يساوى ويوازى ومَ الا انه
مأخوذ فى جهة مضادة لجهته فيكون المستقيم م ب مبينا
للفرق المطلوب لانه اذا أضيف ومَ أو ب م لهذه الكمية
يحصل طول وم



(فى الضرب)

بند ٣١١ اذا ضربت كميتان تخيليتان مثل ح+ءء و حَ+ءَء فى بعضهما وجب
قاعدة الضرب المعتادة يحدث

$$(ح+ءء)(حَ+ءَء) = ححَ + ءءَء^2 + (حءَ + ءحَ) ء$$

وبتعويض $ء^2$ بعدد -١ يحدث

$$(ح+ءء)(حَ+ءَء) = (ححَ - ءءَ) + (حءَ + ءحَ) ء$$

فالحاصل كمية تخيلية صورتها كصورة الكميتين التخيليتين المفروضتين

واذا كان المراد ضرب عوامل تخيلية بعددما فى بعضها بحسب حاصل ضرب العاملين الاولين و يضرب هذا الحاصل فى العامل الثالث وهلم جرّا فالحاصل الاخير يكون هو حاصل الضرب المطلوب وتكون صورته كصورة العوامل التخيلية المفروضة ولنفرض ان العاملين موضوعان بالصورة

$$\text{ل}(\text{جتا ز} + \text{ء جا ز})\ ,\ \text{لَ}(\text{جتا زَ} + \text{ءَ جا زَ})$$

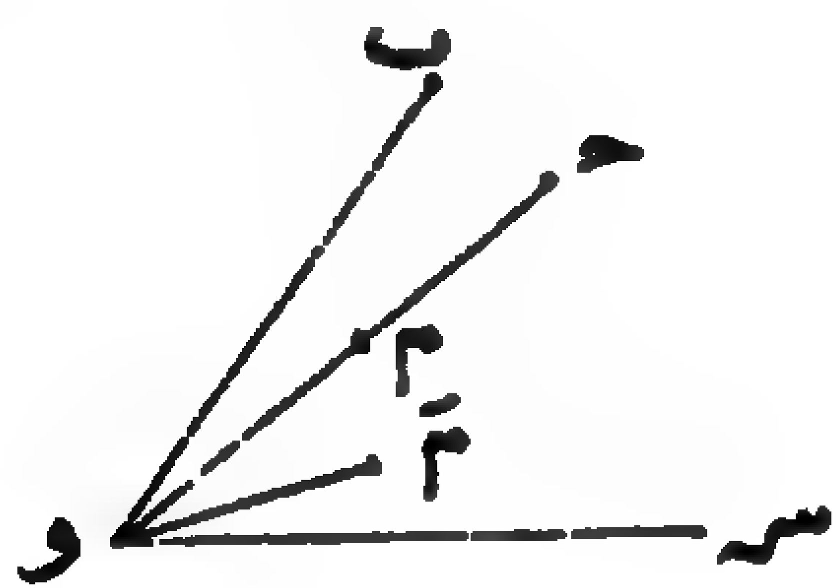
فيكون حاصل الضرب هو

$$\text{للَ}\left\{(\text{جتا ز جتا زَ} - \text{جا ز جا زَ}) + \text{ء}(\text{جا ز جتا زَ} + \text{جتا ز جا زَ})\right\}$$

و يعلم من ذلك ان حاصل ضرب كميتين تخيليتين كمية تخيلية مقياسها حاصل ضرب المقياسين ودليلها مجموع الدليلين

وهذه القاعدة تسرى على عوامل بعددما ومن الواضح ان حاصل الضرب لا يتغير اذا غير ترتيب العوامل

و يسهل اعطاء معنى هندسى لهذه العملية فضرب الطول وم فى الطول ومَ عبارة عن ضرب الطول وم فى العدد المبهم الذى يقاس به الطول ومَ ثم تدوير المستقيم وح المتحصل بهذه الكيفية بزاوية حوب تساوى زاوية سوومَ لانه يشاهد ان مقياس المقدار الهندسى وب يساوى حاصل ضرب المقياسين وان دليله يساوى مجموع الدليلين



فاذا طبقت هذه القاعدة على الحاصل ء × ء يلاحظ ان الكمية التخيلية ء تكون مبينة بطول وم يساوى الواحد مأخوذا على العمود على المحور الثابت س سَ ويلزم ضرب هذا الطول فى الواحد ثم تدويره بزاوية قائمة حول نقطة و فيتحصل طول وب مأخوذ على وسَ ومقداره يساوى −١ وهذا موافق للاتفاق الاساسى وهو $\text{ء}^2 = -1$



وكل كميتين مثل ح+ءء , ح−ءء لا تختلفان عن بعضهما الا بالاشارة فيقال لهما مقترنتان وحيث ان

$$(\text{ح}+\text{د}\,\text{ء})(\text{ح}-\text{د}\,\text{ء})=\text{ح}^{2}+\text{د}^{2}$$

فيعلم من ذلك ان حاصل ضرب أى كميتين مقترنتين فى بعضهما يكون كمية حقيقية تساوى مربع مقياس كل منهما

ومن الواضح ان حاصل ضرب عدة عوامل حقيقية وموجبة لا يمكن ان يكون معدوما الا اذا كان أحد العوامل بالاقل معدوما فهذه الخاصية حقيقية متى كانت العوامل تخيلية لانه حيث كان مقياس حاصل الضرب مساويا لحاصل ضرب مقاييس العوامل فلاجل ان يكون هذا المقياس معدوما يلزم ويكفى ان يكون مقياس أحد العوامل معدوما



(القسمة)

بند ٢١٢ قسمة كمية تخيلية مثل ح+دء على كمية أخرى تخيلية مثل حَ+دَء عبارة عن البحث عن كمية تخيلية مثل س+صء اذا ضربت فى المقسوم عليه يحصل المقسوم وحينئذ يجب ان يكون

$$\text{ح}+\text{د}\,\text{ء}=(\text{حَ}+\text{دَ}\,\text{ء})(\text{س}+\text{ص}\,\text{ء})$$

وباجراء عملية الضرب يحدث

$$\text{ح}+\text{د}\,\text{ء}=(\text{حَ}\,\text{س}-\text{دَ}\,\text{ص})+(\text{دَ}\,\text{س}+\text{حَ}\,\text{ص})\,\text{ء}$$

وحينئذ اذا سوّيت الكميتان الحقيقيتان ببعضهما والكميتان التخيليتان ببعضهما يحدث

$$\text{حَ}\,\text{س}-\text{دَ}\,\text{ص}=\text{ح}\quad\text{و}$$

$$\text{دَ}\,\text{س}+\text{حَ}\,\text{ص}=\text{د}$$

ومن هذا يستنتج ان

$$\text{س}=\frac{\text{ح}\,\text{حَ}+\text{د}\,\text{دَ}}{\text{حَ}^{2}+\text{دَ}^{2}}\quad\text{و}\quad\text{ص}=\frac{\text{د}\,\text{حَ}-\text{ح}\,\text{دَ}}{\text{حَ}^{2}+\text{دَ}^{2}}$$

واذن يكون

$$\frac{\text{ح}+\text{د}\,\text{ء}}{\text{حَ}+\text{دَ}\,\text{ء}}=\frac{\text{ح}\,\text{حَ}+\text{د}\,\text{دَ}}{\text{حَ}^{2}+\text{دَ}^{2}}+\frac{\text{د}\,\text{حَ}-\text{ح}\,\text{دَ}}{\text{حَ}^{2}+\text{دَ}^{2}}\,\text{ء}$$

بند ٢١٣ لا يتغير مقدار أى كسر مثل $\frac{\text{ع}}{\text{ر}}$ متكون من كميات تخيلية اذا ضرب حداه

في كمية واحدة تخيلية مثل ع لانه اذا رمز بحرف ح لخارج قسمة ق على ر يحدث

$$\text{ح} \times \text{ر} = \text{ق}$$

فاذا ضربت هاتان الكميتان المتساويتان في ع يحدث

$$\text{ح} \times \text{ع} \times \text{ر} = \text{ع ق}$$

ومن هنا يكون

$$\frac{\text{ق}}{\text{ر}} = \text{ح} = \frac{\text{ع ق}}{\text{ع ر}}$$

ومن ذلك تنتج طريقة سهلة لايجاد خارج قسمة كميتين تخيليتين على بعضهما لانه اذا ضرب حدا الكسر

$$\frac{\text{ء د} + \text{ح}}{\text{ء د}' + \text{ح}'}$$

في الكمية حَ - دَ ء المقارنة للمقام يوجد أن

$$\frac{(\text{ء د}' - \text{ح}')(\text{ء د} + \text{ح})}{\text{د}'^{٢} + \text{ح}'^{٢}} = \frac{\text{ء د} + \text{ح}}{\text{ء د}' + \text{ح}'}$$

وبذلك يصير المقام حقيقيا وحينئذ تؤل المسئلة الى عملية ضرب وبهذه الكيفية يوجد الناتج المتحصل سابقا وهو

$$\frac{(\text{د}'\text{ح} - \text{ح}'\text{د}) + (\text{د}'\text{د} + \text{ح}'\text{ح})}{\text{د}'^{٢} + \text{ح}'^{٢}} = \frac{\text{ء د} + \text{ح}}{\text{ء د}' + \text{ح}'}$$

ومتى وضعت الكميتان التخيليتان بالصورة

$$\text{ل}\,(\text{جتا ز} + \text{ء جا ز}) \quad \text{و} \quad \text{ل}'\,(\text{جتا ز}' + \text{ء جا ز}')$$

يمكن كتابة خارج قسمة هاتين الكميتين مباشرة وهو

$$\frac{\text{ل}}{\text{ل}'}\left\{\text{جتا}(\text{ز} - \text{ز}') + \text{ء جا}(\text{ز} - \text{ز}')\right\}$$

لانه اذا ضرب هذا الخارج في المقسوم عليه يوجد المقسوم ويعلم من ذلك ان مقياس خارج قسمة كميتين تخيليتين على بعضهما يساوي خارج قسمة مقياسي هاتين الكميتين على بعضهما وان دليله يساوي الفرق بين دليليهما

(القوى)

(القوى)

لنبتدئ بتكوين القوى المتتالية للكمية ع التخيلية ولذلك نعلم ان $\text{ع}^{\text{٢}} = -\text{١}$ وحيث ان القوة الثالثة تساوى حاصل ضرب القوة الثانية وهى $\text{ع}^{\text{٢}}$ فى ع فيكون

$$\text{ع}^{\text{٣}} = \text{ع}^{\text{٢}} \times \text{ع} = -\text{١} \times \text{ع} = -\text{ع}$$

وحيث ان $\text{ع}^{\text{٤}} = \text{ع}^{\text{٣}} \times \text{ع}$ فيوجد كذلك أن

$$\text{ع}^{\text{٤}} = \text{ع}^{\text{٣}} \times \text{ع} = -\text{ع} \times \text{ع} = -\text{ع}^{\text{٢}} = -(-\text{١}) = +\text{١}$$

وهلم جرا بحيث يكون

$$\text{ع}^{\text{٥}} = \text{ع}^{\text{٤}} \times \text{ع} = \text{ع} \quad \text{و}$$

$$\text{ع}^{\text{٦}} = \text{ع}^{\text{٥}} \times \text{ع} = \text{ع} \times \text{ع} = \text{ع}^{\text{٢}} = -\text{١}$$

ويعلم من ذلك أن

$$\text{ع}^{\text{٠}} = +\text{١} \;,\; \text{ع}^{\text{١}} = +\text{ع} \;,\; \text{ع}^{\text{٢}} = -\text{١} \;,\; \text{ع}^{\text{٣}} = -\text{ع} \quad \text{و}$$

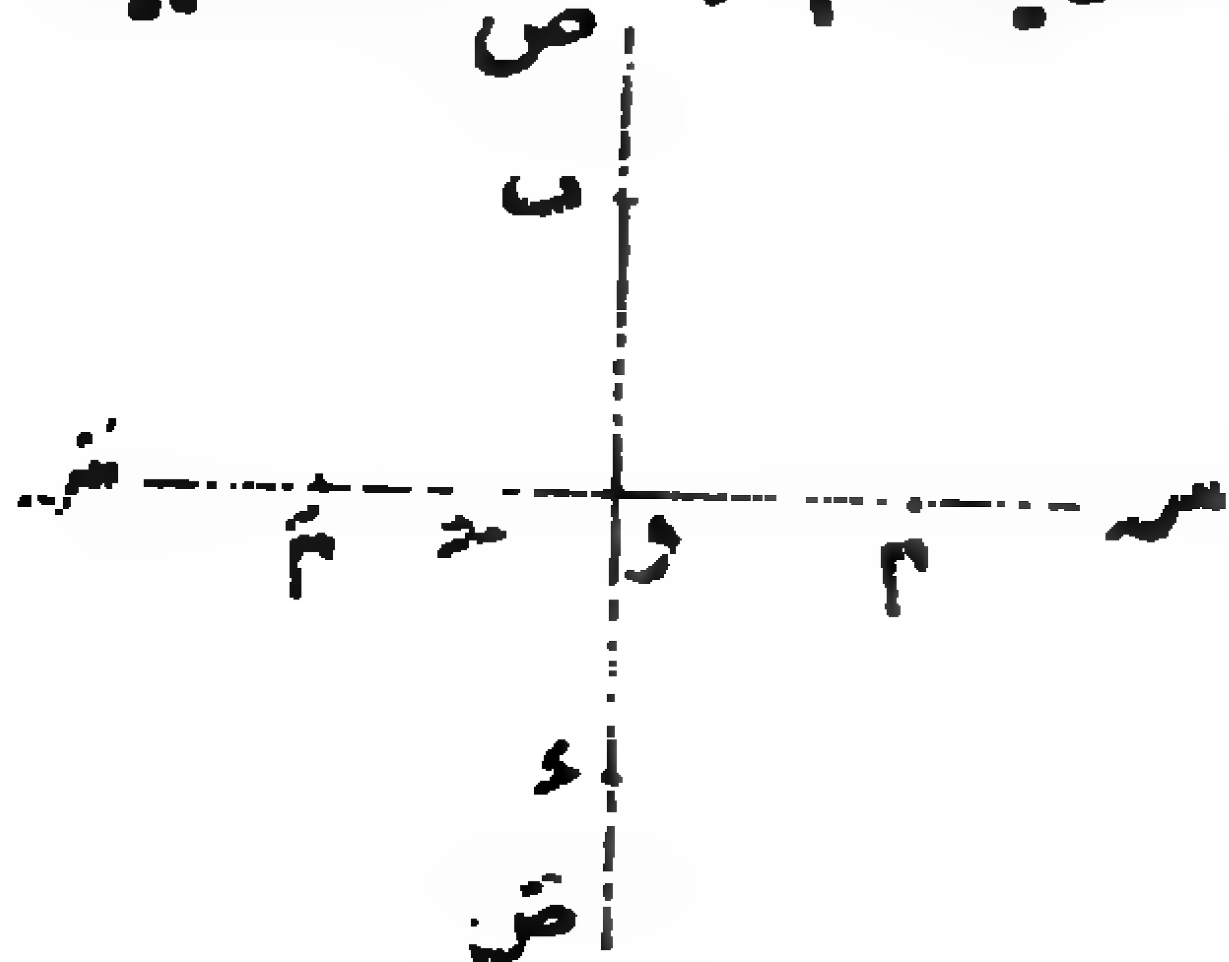
$$\text{ع}^{\text{٤}} = +\text{١} \;,\; \text{ع}^{\text{٥}} = +\text{ع} \;,\; \text{ع}^{\text{٦}} = -\text{١} \;,\; \text{ع}^{\text{٧}} = -\text{ع}$$

. . . .

وحيث ان القوة الرابعة $\text{ع}^{\text{٤}}$ تساوى ١ فمن الواضح ان نفس النواتج تدور بالترتيب من أربعة الى أربعة ويوجد على العموم أن

$$\text{ع}^{\text{٤م}} = \text{١} \;,\; \text{ع}^{\text{٤م}+\text{١}} = \text{ع} \;,\; \text{ع}^{\text{٤م}+\text{٢}} = -\text{١} \;,\; \text{ع}^{\text{٤م}+\text{٣}} = -\text{ع}$$

وتكون القوى الزوجية الدرجة حقيقية وتكون القوى الفردية الدرجة تخيلية ويمكن ايضاح هذه النتائج بواسطة أدلة هندسية لان الطولين وم , وب المساويين للواحد المأخوذين على وس , وص يدلان أولهما على +١ وثانيهما على +ع فضرب طول هندسى فى ع عبارة عن تدويره بزاوية قائمة حول نقطة و وحينئذ اذا ضربت الكمية وم جملة مرار متتالية فى ع توجد الكميات الاربعة وهى وب , وح , وء , وم



او $+ء$, -١ , $-ء$, $+١$ التي تحدث بالدور

بـ٢١٤د اذا طبق قانون ذات الحدين المنسوب الى نوتون على تحليل $(ح+ىء)^م$ ولوحظ الاتفاق العمومي المؤسس عليه حساب الكميات التخيلية يوجد أن

$$(ح+ىء)^م=ح^م+\frac{م}{١}ح^{م-١}ىء+\frac{م(م-١)}{١×٢}ح^{م-٢}ى^٢ء^٢+\cdots$$

وبتعويض القوى المتتالية للكمية ء بالمقادير التي وجدت سابقا يحدث

$$(ح+ىء)^م=ح^م+\frac{م}{١}ح^{م-١}ىء-\frac{م(م-١)}{١×٢}ح^{م-٢}ى^٢$$
$$-\frac{م(م-١)(م-٢)}{١×٢×٣}ح^{م-٣}ى^٣ء+\cdots$$

وتكون الحدود حقيقية وتخيلية على التعاقب ولو اعتبرنا الكميات الحقيقية حدا واحدا والكميات التخيلية حدا واحدا لحدث

$$(ح+ىء)^م=\left\{ح^م-\frac{م(م-١)}{١×٢}ح^{م-٢}ى^٢+\frac{م(م-١)(م-٢)(م-٣)}{١×٢×٣×٤}ح^{م-٤}ى^٤-\cdots\right\}$$
$$+\left\{م ح^{م-١}ى-\frac{م(م-١)(م-٢)}{١×٢×٣}ح^{م-٣}ى^٣+\cdots\right\}ء$$

وينتج من ذلك أن تحليل $(ح+ىء)^م$ يكون كمية تخيلية بالصورة الاعتيادية وهي $ط+رء$ وان الحدود التي يتركب منها كل من الجزئين الحقيقي والتخيلي تكون موجبة وسالبة على التعاقب

ومن الواضح ان تحليل $(ح-ىء)^م$ لايختلف عن تحليل $(ح+ىء)^م$ الا بتغيير ء الى $-ء$ وحيث اننا قد وجدنا أن

$$(ح+ىء)^م=ط+رء$$

فاذن يكون

$$(ح-ىء)^م=ط-رء$$

(تطبيقات)

الاول

الاول $(1+\text{ء})^{5} = 1 + 5\text{ء} - 10 - 10\text{ء} + 5 + \text{ء} = -4 - 4\text{ء}$

الثانى $(1-\text{ء})^{5} = -4 + 4\text{ء}$

الثالث $(3+2\text{ء})^{6} = 3^{6} + 6\times 3^{5}\times 2\text{ء} - 15\times 3^{4}\times 2^{2} - 20\times 3^{3}\times 2^{3}\text{ء}$

$+ 15\times 3^{2}\times 2^{4} + 6\times 3\times 2^{5}\text{ء} - 2^{6}$

$= -2035 - 828\text{ء}$

الرابع $(3-2\text{ء})^{6} = -2035 + 828\text{ء}$

نمرة ١١٥ متى وضعت الكمية حـ+دء بالصورة ل (جتا ز + ء جاز) يمكن ان يكتب مباشرة

$$(\text{حـ}+\text{د}\text{ء})^{\text{م}} = \text{ل}^{\text{م}}\,(\text{جتا م ز} + \text{ء جا م ز})$$

لان القوة الميمية لكمية تساوى حاصل ضرب عوامل عددها م كل منها يساوى هذه الكمية وقد علم ان مقياس حاصل الضرب يساوى حاصل ضرب مقاييس عوامله وان دليله يساوى مجموع ادلة هذه العوامل

ولنفرض كمية كثيرة الحدود صحيحة مثل

$$\text{جـ}\,\text{سـ}^{\text{م}} + \text{جـ}_{1}\,\text{سـ}^{\text{م}-1} + \text{جـ}_{2}\,\text{سـ}^{\text{م}-2} + \ldots + \text{جـ}_{\text{م}}$$

ذات معاملات حقيقية أو تخيلية ولنعط للمتغير سـ مقدارا تخيليا وليكن حـ+دء فحيث ان كل قوة مثل $(\text{حـ}+\text{د}\text{ء})^{\text{م}}$ تأخذ كما تقدم مقدارا بالصورة ق+رء فيأخذ أى حد من حدود الكمية الكثيرة الحدود مقدارا بهذه الصورة لان حاصل ضرب قوة ما للمتغير سـ فى معامل حقيقى أو تخيلى فاذا اعتبرت الاجزاء الحقيقية من كثيرة الحدود المتصلة حدا واحدا واعتبرت اجزاؤها التخيلية حدا واحدا وجدنا نتج بالصورة ق+رء

(الجذور)

نمرة ١١٦ لنفرض اولا ان المطلوب استخراج الجذر التربيعى للكمية حـ+دء فيقتضى ايجاد كمية بالصورة سـ+صـء اذا ربعت تنتج الكمية المفروضة واذن يجب ان يكون

$$(\text{س} + \text{ص}\,\text{ء})^{2} = \text{ح} + \text{د}\,\text{ء}$$

وباجراء عملية التربيع يحدث

$$(\text{س}^{2} - \text{ص}^{2}) + 2\,\text{س}\,\text{ص}\,\text{ء} = \text{ح} + \text{د}\,\text{ء}$$

واذن يكون

$$\text{س}^{2} - \text{ص}^{2} = \text{ح} \quad \text{و} \quad 2\,\text{س}\,\text{ص} = \text{د}$$

وهذه المجموعة يمكن تعويضها بالمجموعة المكافئة لها وهي

$$\text{ص} = \frac{\text{د}}{2\,\text{س}} \quad \text{و} \quad \text{س}^{4} - \text{ح}\,\text{س}^{2} - \frac{\text{د}^{2}}{4} = 0$$

وحيث انه يجب ان يكون للمجهولين س , ص مقداران حقيقيان فيستنتج من ذلك أن

$$\text{س} = \pm\sqrt{\frac{\text{ح} + \sqrt{\text{ح}^{2} + \text{د}^{2}}}{2}}$$

و

$$\text{ص} = \pm\frac{\text{د}}{2\sqrt{\frac{\text{ح} + \sqrt{\text{ح}^{2} + \text{د}^{2}}}{2}}} = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{\text{ح}^{2} + \text{د}^{2}} - \text{ح}}{2}}$$

وحينئذ يكون

$$\sqrt{\text{ح} + \text{د}\,\text{ء}} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{\text{ح}^{2} + \text{د}^{2}} + \text{ح}}{2}} + \text{ء}\sqrt{\frac{\sqrt{\text{ح}^{2} + \text{د}^{2}} - \text{ح}}{2}}\right)$$

مثلا

$$\sqrt{\text{ء}} = \pm\frac{1 + \text{ء}}{\sqrt{2}}$$

بند ٢١٧ ولنفرض الآن ان المطلوب استخراج الجذر الميمي للكمية ح + و ء أعني ان المطلوب ايجاد كمية تخيلية اذا رفعت الى القوة الميمية تحدث الكمية المفروضة ولذلك نضع

$$\text{ح} + \text{د}\,\text{ء} = \text{د}\,(\text{جتا}\,\text{ز} + \text{ء}\,\text{جا}\,\text{ز})$$

ثم نفرض ان الكمية المجهولة هي ه (جتا و + ء جا و) فيجب أن يكون

$$\text{ه}^{\text{م}}(\text{جتا}\,\text{م}\,\text{و} + \text{ء}\,\text{جا}\,\text{م}\,\text{و}) = \text{د}\,(\text{جتا}\,\text{ز} + \text{ء}\,\text{جا}\,\text{ز})$$

ولاجل

ولاجل أن تكون هاتان الكميتان التخيليتان متساويتين يلزم أن يكون مقياساهما متساويين وأن يكون دليلاهما متساويين أو مختلفين عن بعضهما بمضاعف حيثما اتفق للكمية ٢ط واذن يكون

$$\text{ه}^{\text{م}} = \text{ل} \quad ، \quad \text{م}\,\text{و} = \text{ز} + ٢\,\text{ك}\,\text{ط}$$

ومن هنا يكون

$$\text{ه} = \text{ل}^{\frac{1}{\text{م}}} \quad ، \quad \text{و} = \frac{\text{ز} + ٢\,\text{ك}\,\text{ط}}{\text{م}}$$

وتكون المقادير المختلفة للمجهول معلومة بواسطة القانون

$$\text{ل}^{\frac{1}{\text{م}}} \left(\text{جتا}\,\frac{\text{ز} + ٢\,\text{ك}\,\text{ط}}{\text{م}} + \text{ء}\,\text{جا}\,\frac{\text{ز} + ٢\,\text{ك}\,\text{ط}}{\text{م}} \right)$$

الذي فيه حرف ك رمز لعدد صحيح حيثما اتفق موجب أو سالب

بـ ٢١٨ د وبموجب هذا القانون يسهل مشاهدة أن المجهول يكون له جذور ممتازة عددها م لانه اذا أعطيت المقادير المتتالية التي عددها م وهي

$$٠ \;،\; ١ \;،\; ٢ \;،\; ٣ \;،\; \ldots\ldots \;،\; \text{م} - ١$$

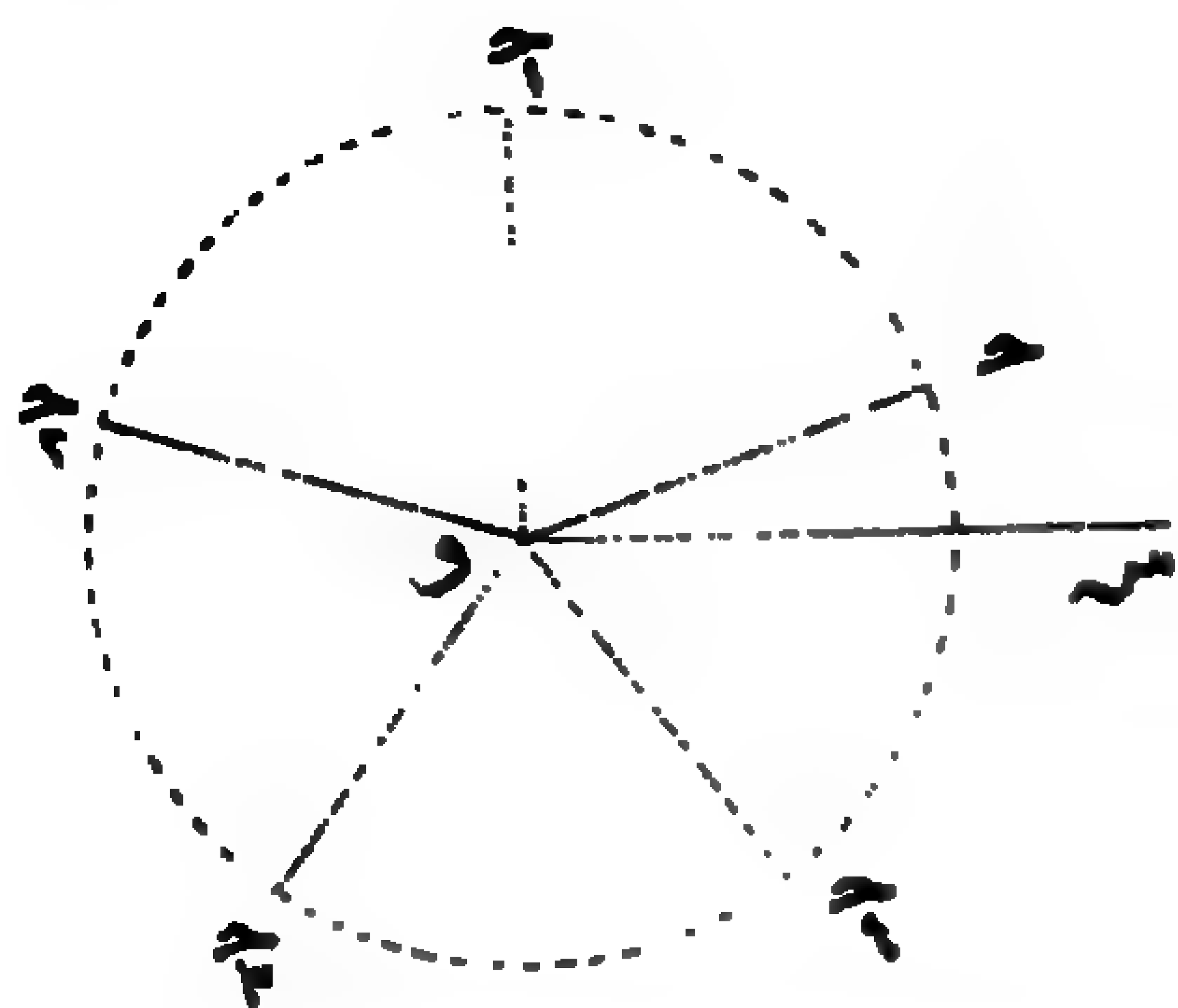
لحرف ك تحصل مقادير عددها م متحدة المقياس وهو $\text{ل}^{\frac{1}{\text{م}}}$ وأدلتها الاقواس

$$\frac{\text{ز}}{\text{م}} \;،\; \frac{\text{ز}}{\text{م}} + \frac{٢\text{ط}}{\text{م}} \;،\; \frac{\text{ز}}{\text{م}} + ٢\,\frac{٢\text{ط}}{\text{م}} \;،\; \frac{\text{ز}}{\text{م}} + ٣\,\frac{٢\text{ط}}{\text{م}} \;،\; \ldots \;،$$

$$\frac{\text{ز}}{\text{م}} + (\text{م} - ١)\,\frac{٢\text{ط}}{\text{م}}$$

وحيث ان هذه الادلة أصغر من ٢ط ومختلفة عن بعضها فتكون الكميات المطابقة لها التي عددها م متميزة فاذا أعطيت المقادير م ، م+١ ، م+٢ ، ... الخ للكمية ك وأهمل مضاعف ٢ط توجد الادلة السابق الحصول عليها وتحصل نفس الجذور على حسب ترتيبها ولو اعطيت المقادير السالبة وهي -١ ، -٢ ، -٣ ، ... الخ توجد كذلك نفس الجذور المذكورة ويعلم من ذلك ان الجذر الميمي لكمية معلومة يكون له مقادير ممتازة عددها م ولا يكون له سوى جذور عددها أزيد من م

ولنجعل النقطة و مركزا ونرسم دائرة نصف قطرها يساوي $ل^{\frac{١}{م}}$ ولنأخذ الزاوية سـ و ﺣ تساوي $\frac{ﻫ}{م}$ ثم نقسم المحيط بالابتداء من نقطة ﺣ الى أقسام متساوية عددها م فتكون المقادير التي عددها م وهي مقادير الجذر مبينة بانصاف الاقطار و ﺣ ، و $ﺣ_١$ ، و $ﺣ_٢$ ، ... الخ الواصلة من المركز الى نقط التقاسيم المختلفة وهذه الكميات التي عددها م تكون نجمة منتظمة لها انصاف أقطار عددها م



واستخراج الجذور يرجع الى حل المعادلة $سـ^م = ه$ وخواص جذور هذه المعادلة تدرس في حساب المثلثات بغاية التفصيل

(الفصل الثاني)

(في الخواص العمومية للمعادلات الجبرية)

(في تغير الدوال الصحيحة)

قد اشتغلنا سابقا بالدوال الصحيحة في فصل المشتقات وقد قلنا ان أي دالة صحيحة لمتغير مثل سـ تتغير بكيفية مستمرة عندما يتغير سـ (بند ١٤٠ و بند ١٤٤) وبسبب أهمية هذا المعرض نتصدى بالثاني لمعرفة تغير الدوال الصحيحة بالتفصيل ونفرض موقتا ان جميع المعاملات تكون حقيقية وانه لا يعطى للمتغير سـ الا مقادير حقيقية

بند ٢١٩ (النظرية الاولى) اذا لم تشتمل كمية كثيرة الحدود صحيحة معاملاتها حقيقية على حد ثابت يمكن ان يعين عدد مثل ل بحيث انه بجميع مقادير سـ الحقيقية والمحصورة بين ـ ل و + ل يكون مقدار كثيرة الحدود محصورا بين ـ ك و + ك (ك عدد معلوم مهما كان صغره)

ولاثبات ذلك نفرض كثيرة الحدود

$$ص = ﺣ سـ + ء سـ^٢ + ﻫ سـ^٣ + \cdots + ى سـ^م$$

الصحيحة بالنسبة الى سـ والتي معاملاتها حقيقية والتي لا تشتمل على حد ثابت والمرتبة على

على حسب القوى التصاعدية للمتغير سه ولنرمز بحرف سَه للمقدار المطلق للمتغير الحقيقي وهو سه وبحرف صَه لمقدار كثيرة الحدود وليكن $م_١$ أكبر المعاملات في المقدار المطلق فمن الواضح أن

$$\text{صَه} < م_١(\text{سَه} + \text{سَه}^٢ + \ldots + \text{سَه}^م) = \frac{م_١\,\text{سَه}(١ - \text{سَه}^م)}{١ - \text{سَه}}$$

ولنفرض ان عدد سَه أقل من الواحد فيكون الطرف الثاني أصغر من $\frac{م_١\,\text{سَه}}{١-\text{سَه}}$ وبالاولوية يكون

$$\text{صَه} < \frac{م_١\,\text{سَه}}{١-\text{سَه}}$$

ويعلم من ذلك ان مقدار صَه يكون أصغر من الكمية الموجبة المعلومة وهي ك اذا كانت الكمية $\frac{م_١\,\text{سَه}}{١-\text{سَه}}$ أصغر من ك وبحل المتباينة

$$\frac{م_١\,\text{سَه}}{١-\text{سَه}} < ك$$

يوجد أن

$$\text{سَه} < \frac{ك}{م_١ + ك}$$

ولنرمز بحرف د لهذه الكمية وهي $\frac{ك}{م_١+ك}$ فيستنتج من ذلك انه بجميع المقادير الحقيقية للمتغير سه والمحصورة بين − د و + د يكون مقدار كثيرة الحدود وهي صه محصورا بين − ك و + ك

مثلا نكون متحققين من ان مقدار كثيرة الحدود

$$٢\text{سه} - ٣\text{سه}^٢ + ٧\text{سه}^٣ + ٩\text{سه}^٤ - ٤\text{سه}^٥$$

يكون محصورا بين −٠و١ و +٠و١ متى كان المتغير سه محصورا بين $-\frac{١}{٩١}$ و $+\frac{١}{٩١}$ أي متى كان محصورا بين −٠و٠١ و +٠و٠١

بند ٢٢٠ (النظرية الثانية) متى كانت كمية كثيرة الحدود صحيحة ذات معاملات حقيقية

مرتبة على حسب القوى التصاعدية لمتغير سـ فانه يمكن ان يعين عدد مثل ل بحيث انه بجميع المقادير الحقيقية للمتغير سـ والمحصورة بين ـ ل و + ل تكون اشارة الكمية الكثيرة الحدود المذكورة عين اشارة حدها الاول

مثلا لتكن

$$\text{ح}\,\text{سـ}^{\text{ن}}+\text{ء}\,\text{سـ}^{\text{ن}+1}+\text{ه}\,\text{سـ}^{\text{ن}+2}+\cdots+\text{ى}\,\text{سـ}^{\text{م}}$$

كثيرة الحدود المفروضة فيمكن وضعها هكذا

$$\text{سـ}^{\text{ن}}\left(\text{ح}+\text{ء}\,\text{سـ}+\text{ه}\,\text{سـ}^{2}+\cdots+\text{ى}\,\text{سـ}^{\text{م}-\text{ن}}\right)$$

وبموجب النظرية السابقة يمكن ان يعين عدد مثل ل بحيث انه بجميع المقادير الحقيقية للمتغير سـ والمحصورة بين ـ ل و + ل يكون مقدار كثيرة الحدود

$$\text{ء}\,\text{سـ}+\text{ه}\,\text{سـ}^{2}+\cdots+\text{ى}\,\text{سـ}^{\text{م}-\text{ن}}$$

محصورا بين ـ ح و + ح وبمقادير سـ هذه تكون اشارة الكمية الموضوعة بين القوسين عين اشارة ح وبناء على ذلك تكون اشارة كثيرة الحدود المفروضة عين اشارة حدها الاول وهو ح $\text{سـ}^{\text{ن}}$ فمتى كان الاس الاول وهو ن زوجيا تكون هذه الاشارة متحدة بجميع مقادير سـ المحصورة بين ـ ل و + ل واما اذا كان العدد ن فرديا فان مقدار كثيرة الحدود تكون اشارته عين اشارة العامل ح بمقادير سـ المحصورة بين ٠ و + ل وتكون اشارته مخالفة لاشارة العامل ح بمقادير سـ المحصورة بين ٠ و ـ ل

مثلا لنأخذ كثيرة الحدود

$$٢\,\text{سـ}-٣\,\text{سـ}^{٢}+٧\,\text{سـ}^{٣}+٩\,\text{سـ}^{٤}-٤\,\text{سـ}^{٥}$$

فتكون اشارة كثيرة الحدود عين اشارة حدها الاول بمقادير سـ المحصورة بين $-\frac{٢}{١١}$ و $+\frac{٢}{١١}$ فاذا غير سـ من $-\frac{٢}{١١}$ الى ٠ يكون مقدار كثيرة الحدود سالبا واذا غير سـ من ٠ الى $+\frac{٢}{١١}$ يكون مقدارها موجبا

بند ٢٤١ (النظرية الثالثة) متى كانت كمية كثيرة الحدود صحيحة ذات معاملات حقيقية مرتبة على حسب القوى التنازلية لحرف سـ فانه يمكن ان يعين عدد مثل ر بحيث انه بجميع المقادير الحقيقية للمتغير سـ واتى مقدارها المطلق أكبر من ر تكون اشارة كثيرة الحدود المذكورة عين اشارة حدها الاول

ولاثبات

ولاثبات ذلك نفرض كثيرة الحدود

$$ج_{.}س^{م}+ج_{١}س^{م-١}+ج_{٢}س^{م-٢}+\cdots+ج_{م}$$

فبأخذ $س^{م}$ مضروبا مشتركا يمكن وضعها هكذا

$$س^{م}\left(ج_{.}+ج_{١}\frac{١}{س}+ج_{٢}\frac{١}{س^{٢}}+\cdots+ج_{م}\frac{١}{س^{م}}\right)$$

وحيث ان الكمية الموضوعة بين القوسين مرتبة على حسب القوى التصاعدية للمتغير $\frac{١}{س}$ فبموجب النظرية المتقدمة يمكن ان يعين عدد مثل ل بحيث انه بمقادير $\frac{١}{س}$ التي تكون محصورة بين $-ل$ و $+ل$ تكون اشارة هذه الكمية الكثيرة الحدود عين اشارة حدها الاول وهو $ج_{.}$ وليكن $ر=\frac{١}{ل}$ فاذا أعطيت مقادير حقيقية للمتغير $\frac{١}{س}$ مقدارها المطلق أصغر من ل تنتج المقادير الحقيقية للمتغير س التي مقدارها المطلق أكبر من ر وبجميع مقادير س هذه تكون اشارة كثيرة الحدود المفروضة عين اشارة حدها الاول وهو $ج_{.}س^{م}$ ويعلم من ذلك انه متى تزايد س من $+ر$ الى $+\infty$ أو متى تناقص من $-ر$ الى $-\infty$ تكون اشارة كثيرة الحدود عين اشارة حدها الاول فمتى كانت درجة كثيرة الحدود وهي م زوجية تكون اشارة كثيرة الحدود متحدة متى أعطيت سلسلتا المقادير هذه للمتغير س وأما اذا كان م فرديا فتكون اشارتها عين اشارة المعامل $ج_{.}$ بالمقادير الموجبة للمتغير س وباشارة مخالفة بالمقادير السالبة

مثلا لنأخذ كثيرة الحدود

$$٢س^{٥}-١٣س^{٤}-١٨س^{٣}+٩س^{٢}-١٢س+٧$$

ولنضعها بالصورة

$$س^{٥}\left(٢-١٣\frac{١}{س}-١٨\frac{١}{س^{٢}}+٩\frac{١}{س^{٣}}-١٢\frac{١}{س^{٤}}+٧\frac{١}{س^{٥}}\right)$$

فهنا يؤخذ $ل=\frac{٢}{١٨+٢}=\frac{١}{١٠}$ واذن يكون $ر=١٠$ فمتى تزايد س من $+١٠$ الى $+\infty$ تكون كثيرة الحدود موجبة وتكون سالبة اذا تناقص س من -١٠ الى $-\infty$

بند ٢٢٢ (النظرية الرابعة) اذا علمت كمية كثيرة الحدود صحيحة بالنسبة للمتغير س وذات معاملات حقيقية فانه يمكن ان يعين عدد مثل ر بحيث انه بجميع المقادير

الحقيقية للمتغير س والتي مقدارها المطلق أكبر من ر يكون المقدار المطلق للكمية الكثيرة الحدود المعلومة أكبر من أي عدد معلوم مثل ق
ولاثبات ذلك نفرض كثيرة الحدود

$$ص = ج_{.} س^{م} + ج_{١} س^{م-١} + \cdots + ج_{م}$$

المرتبة على حسب القوى التنازلية للمتغير س ولنفرض ان المعامل الاول ج موجبا ولنعط أولا للمتغير س مقادير موجبة فبموجب النظرية المتقدمة يمكن ان يعين عدد مثل ر بحيث انه بجميع المقادير الحقيقية للمتغير س والاكبر من ر تكون اشارة كثيرة الحدود

$$ص - ق = ج_{.} س^{م} + ج_{١} س^{م-١} + \cdots + (ج_{م} - ق)$$

عين اشارة حدها الاول أعني تكون هذه الكمية الكثيرة الحدود موجبة وبجميع مقادير س هذه يكون مقدار كثيرة الحدود المفروضة وهي ص أكبر من ق وهذا الاثبات ينطبق على المقادير السالبة للمتغير س متى كانت كثيرة الحدود بدرجة زوجية واما اذا كانت درجتها فردية فيوضع س = − سَ ثم تعتبر كثيرة الحدود

$$صَ = - ص = ج_{.} سَ^{م} - ج_{١} سَ^{م-١} + \cdots - ج_{م}$$

بـ ٢٢٣ د (النظرية الخامسة) أي دالة صحيحة ذات معاملات حقيقية تكون مستمرة بجميع مقادير المتغير (والدالة الحقيقية د(س) يقال لها مستمرة بين النهايتين س و سَ متى اعطى للمتغير س مقدار حيثما اتفق محصور بين هاتين النهايتين وامكن ان يعين عدد مثل ل بحيث انه بجميع مقادير ح المحصورة بين − ل و + ل يكون مقدار الفرق د(س+ح) − د(س) محصورا بين − ف و + ف) وحرف ف رمز لعدد معلوم مهما كان صغره

ولاثبات ذلك نفرض الدالة الصحيحة التي بدرجة م وهي

$$د(س) = ج_{.} س^{م} + ج_{١} س^{م-١} + \cdots + ج_{م}$$

∴ فاذا حلل الفرق ك = د(س+ح) − د(س) الى كمية كثيرة الحدود صحيحة وبدرجة م بالنسبة

بالنسبة الى ح (بند ١٤٥) يوجد أن

$$ك = \frac{ءَ(س)}{١} ح + \frac{ءً(س)}{١×٢} ح^{٢} + \ldots + \frac{ء^{م}(س)}{١×٢\ldots×م} ح^{م}$$

ومهما كان المقدار الذى يعطى للمتغير س يمكن بموجب النظرية الاولى ان يعين عدد مثل ل بحيث انه بجميع مقادير ح المحصورة بين ـ ل و + ل يكون مقدار هذه الكمية الكثيرة الحدود التى لا تحتوى على حد لا يتعلق بالمتغير ح محصورا بين ـ ف و + ف (ف عدد معلوم يمكن أخذه صغيرا بقدر ما يراد) ويستنتج من ذلك أن الدالة تكون مستمرة بجميع المقادير الحقيقية للمتغير س

بند ٢٢٤ بموجب النظرية الرابعة يعلم انه متى زاد المقدار المطلق للمتغير س الى مالانهاية يزيد مقدار الدالة كذلك الى مالانهاية فلنفرض لاجل عدم تشتت الافكار ان المعامل الاول ح موجب ولنزد س بكيفية مستمرة من ـ ∞ الى + ∞ فمتى كانت الدرجة م فردية تتغير الدالة بكيفية مستمرة من ـ ∞ الى + ∞ الا انها لا تتزايد بدون انقطاع بل انها تكون على العموم متزايدة ومتناقصة على التعاقب ومتى كان م زوجيا تبتدئ الدالة من + ∞ وتتناقص أولا ثم تؤل الى + ∞ بعد ان تتزايد عدة مرات وتتناقص عدة مرات

وبواسطة أشارة المشتقة برتبة أولى وهى ءَ(س) يعلم ان كانت الدالة ء(س) تتزايد أو تتناقص متى تزايد المتغير س وحيث ان هذه المشتقة كمية كثيرة الحدود صحيحة بالنسبة الى س فتكون دائما اشارتها عين أشارة حدها الاول متى زاد المقدار المطلق للمتغير س عن نهاية ما تَر (بند ٢٢١) واذا زاد المتغير س من ـ ∞ الى ـ تَر أو من + تَر الى + ∞ تتزايد الدالة أو تتناقص بدون انقطاع

(فى خواص المعادلات)

بند ٢٢٥ (النظرية السادسة) اذا وضع عددان حقيقيان فى أى دالة صحيحة ذات معاملات حقيقية مثل ء(س) عوضا عن المتغير س وكان الناتجان مختلفين فى الاشارة فانه يكون للدالة جذر واحد حقيقى بالاقل محصور بين هذين العددين

ولاثبات ذلك نفرض أن $س_{٠}$ اصغر من $س_{١}$ ولنفرض مثلا ان كثيرة الحدود ء(س) يكون لها مقدار سالب عندما يكون س = $س_{٠}$ ويكون لها مقدار موجب

عندما يكون سـ = سـ١ فاذا تصورنا ان سـ يتزايد بكيفية مستمرة من سـ٠ الى سـ١ تتغير الدالة بكيفية مستمرة مبتدئة بمقدار سالب ومنتهية بمقدار موجب وحيث انها تبقى محدودة فيلزم ان تمر بالمقـدار المتوسط وهو صفر ويعلم من ذلك ان الدالة د(سـ) تنعدم بمقـدار للمتغير سـ محصور بين سـ٠ و سـ١ ومقدار سـ هذا جذر للمعادلة د(سـ)=٠

ومن الممكن ان الدالة تمر بالصفر عدة مرات حينما يعطى للمتغير سـ مقـادير محصورة بين سـ٠ و سـ١ ففى هـذه الحالة يكون للمعادلة د(سـ)=٠ عدة جذور حقيقية محصورة بين سـ٠ و سـ١

ومن الواضح ان كل دالة محدودة ومستمرة بمقادير سـ التى تكون محصورة بين نهايتين معلومتين يكون لها هذه الخاصية

بند ٢٢٦ (النظرية السابعة) كل معادلة جبرية بدرجة مفردة ذات معاملات حقيقية يكون لها بالاقل جذر حقيقى اشارته مخالفة لاشارة حدها الاخير

(والمعادلة الجبرية هى المعادلة التى يتحصل عليها بمساواة دالة صحيحة مثل د(سـ) بصفر)

ولاجل اثبات هذه الخاصية نفرض أن الطرف الاول مرتب على حسب القوى التنازلية للمجهول سـ ونفرض كذلك ان معامل الحـد الاول موجب فاذا لم يكن موجبا تغير اشارات الطرفين فاذا أعطى للمجهول سـ مقدار سالب مقـداره المطلق كبير جدا يكون للطرف الاول مقـدار اشارته كاشارة الحـد الاول أعنى يكون للطرف الاول مقدار سالب حيث ان هـذا الحد بدرجة فردية وبالعكس اى اذا أعطى للمجهول سـ مقدار موجب كبير جدا يأخذ الطرف الاول مقدارا موجبا ويعلم من ذلك انه متى غير سـ من -∞ الى +∞ تتغير اشارة الطرف الاول وهو د(سـ) وينعدم هذا الطرف الاول مرة واحدة بالاقل ويعلم من ذلك ان المعادلة د(سـ)=٠ يكون لها بالاقل جذر حقيقى

وهذا الجذر الحقيقى تكون اشارته مخالفة لاشارة الحد الاخير من المعادلة ولبيان ذلك نفرض أولا ان الحد الاخير أعنى الحد الغير المتعلق بالمجهول سـ سالب فاذا جعل سـ=٠ يؤول الطرف الاول الى الحد الاخير وحينئذ يكون مقداره سالبا واذا أعطى للمجهول سـ مقدار موجب كبير جدا يصير الطرف الاول موجبا وحينئذ تتغير اشارة

الطرف

الطرف الاول متى غير سه من ٠ الى $+\infty$ وبناء على ذلك يكون للمعادلة جذر موجب ولنفرض الآن ان الحد الاخير موجب فاذا جعل سه $= -\infty$ يصير الطرف الاول سالبا واذا جعل سه $=$ ٠ يصير هذا الطرف الاول موجبا وحينئذ متى غير سه من $-\infty$ الى ٠ تتغير اشارة الطرف الاول بمقدار للمجهول سه محصور بين $-\infty$ و ٠ وبناء على ذلك يكون للمعادلة جذر سالب

مثلا يمكن ان يتحقق من ان المعادلة

$$س^{٣} - ٥ س^{٢} + ٤ س - ٧ = ٠$$

يكون لها بالاقل جذر واحد حقيقي موجب وان المعادلة

$$س^{٣} - ٥ س^{٢} - ٤ س + ٧ = ٠$$

يكون لها بالاقل جذر حقيقي سالب

بند ٢٢٧ (النظرية الثامنة) كل معادلة جبرية بدرجة زوجية ذات معاملات حقيقية وحدها الاخير سالب يكون لها بالاقل جذران حقيقيان

ولاثبات ذلك نفرض المعادلة

$$د(س) = س^{٢م} + ح_{١} س^{٢م-١} + ح_{٢} س^{٢م-٢} + \cdots + ح_{٢م-١} س + ح_{٢م} = ٠$$

التي حدها الاخير سالب فاذا جعل سه $=$ ٠ يؤل الطرف الاول الى الحد الاخير ويكون مقداره سالبا واذا عوض المجهول سه بعدد موجب أو سالب مقداره المطلق كبير جدا يصير الطرف الاول موجبا حيث ان الحد الاول الذى هو بدرجة زوجية يبقى ثابتا على الدوام ويعلم من ذلك أن الطرف الاول تتغير اشارته متى غير سه من ٠ الى $+\infty$ وكذلك تتغير اشارته اذا غير سه من ٠ الى $-\infty$ وحينئذ يكون للمعادلة جذران حقيقيان أحدهما موجب وآخرهما سالب

مثلا المعادلة

$$س^{٤} - ٨ س^{٣} + ٣ س^{٢} - ٥ س - ٢ = ٠$$

لها بالاقل جذران حقيقيان أحدهما موجب والآخر سالب

وهناك حالة لا يعلم فيها ان كانت المعادلة لها جذور حقيقية أم لا وهى الحالة التى تكون فيها المعادلة بدرجة زوجية ويكون حدها الاخير موجبا لانه فى هذه الحالة يكون للطرف الاول مقادير موجبة حينما يجعل سه $=$ ٠ وحينما يعطى للمجهول سه مقادير

كبيرة جدا موجبة كانت أو سالبة مثلا لا يعلم ان كانت المعادلة

$$س^٤ - ٨س^٣ + ٥س^٢ - ٣س + ٩ = ٠$$

لها جذور حقيقية أم لا

بند ٢٢٨ (النظرية التاسعة) اذا كانت الكمية ح جذر المعادلة جبرية مثل $ء(س) = ٠$ يكون الطرف الاول من هذه المعادلة قابلا للقسمة على $س - ح$

لانه حيث كان العدد ح جذر المعادلة $ء(س) = ٠$ يكون $ء(ح) = ٠$ وحيث ان $ء(ح)$ هو باقي قسمة الطرف الاول وهو $ء(س)$ للمعادلة المفروضة على $س - ح$ (بند ٦٧ جزء أول) فيعلم من ذلك ان الطرف الاول $ء(س)$ يكون قابلا للقسمة على $س - ح$ بحيث يكون

$$ء(س) = (س - ح)\, ء_١(س)$$

$ء_١(س)$ خارج قسمة $ء(س)$ على $س - ح$ ويعلم من ذلك انه متى كان ح جذرا للمعادلة يكون الطرف الاول لها قابلا للقسمة على $س - ح$

وبالعكس اذا كان الطرف الاول من معادلة جبرية مثل $ء(س) = ٠$ يقبل القسمة على كمية ذات حدين بالصورة $س - ح$ تكون الكمية ح جذر للمعادلة المذكورة لانه حيث كان $ء(س)$ قابلا للقسمة على $س - ح$ فيجب ان يكون $ء(ح) = ٠$ واذن يجب ان يكون ح جذر المعادلة $ء(س) = ٠$

بند ٢٢٩ (فائدة) اذا علمت دالة صحيحة بالنسبة لمتغير مثل س معاملاتها حقيقية أو تخيلية فانه يمكن ان يعين عدد مثل ر بحيث انه بجميع مقادير س التي مقياسها مساو أو أكبر من ر يكون مقياس الدالة أكبر من أي عدد معلوم مثل ع مهما كان كبر هذا العدد

ولاثبات ذلك نفرض الدالة

$$ء(س) = ج_٠ س^م + ج_١ س^{م-١} + ج_٢ س^{م-٢} + \cdots + ج_م$$

ونرمز لمقاييس المعاملات بالرموز $\bar{ج}_٠$ و $\bar{ج}_١$ و $\bar{ج}_٢$ و ... و $\bar{ج}_م$ ونرمز بحرف ل لمقياس س فيعلم (بند ٢٠٩) ان مقياس مجموع كميتين تخيليتين أكبر من الفرق بين مقياسى هاتين الكميتين وحيث انه يمكن اعتبار الدالة المفروضة مجموع الكميتين

$$ج_٠ س^م \quad و \quad ج_١ س^{م-١} + ج_٢ س^{م-٢} + \cdots + ج_م$$

فيكون

فيكون مقياسها أكبر من مقياس الكمية الاولى مطروحا منه مقياس الكمية الثانية وحيث ان مقياس الكمية الثانية أصغر من مجموع مقاييس حدودها فيكون مقياس الدالة المفروضة أكبر من الفرق

$$\text{ح}_{0}\,\text{ل}^{\text{م}} - \left(\text{ح}_{1}\,\text{ل}^{\text{م}-1} + \text{ح}_{2}\,\text{ل}^{\text{م}-2} + \cdots + \text{ح}_{\text{م}}\right)$$

وتقدم (بند ٢٢٢ د) انه يمكن ان يعين عدد مثل ر بحيث انه بجميع مقادير ل الاكبر من ر يكون مقدار هذه الدالة الاخيرة أكبر من ه

بند ٢٣٠ د (النظرية العاشرة) كل معادلة جبرية وصحيحة يكون لها بالاقل جذر حقيقي أو تخيلي

ولاثبات ذلك نفرض انه اذا جعل س = ب يكون مقياس الدالة الصحيحة د (س) وليكن ه مخالفا للصفر ثم نثبت انه يوجد مقدار آخر للمتغير س به يكون للدالة مقياس أصغر من ه ولذلك نقول اذا وضع س = ب + ح يكون

$$\text{د}(\text{ب}+\text{ح}) = \text{د}(\text{ب}) + \frac{\text{د}'(\text{ب})}{1}\text{ح} + \frac{\text{د}''(\text{ب})}{1\times 2}\text{ح}^{2} + \cdots + \frac{\text{د}^{\text{م}}(\text{ب})}{1\times 2\cdots\times \text{م}}\text{ح}^{\text{م}}$$

ولنضع

$$\text{د}(\text{ب}) = \text{ه}(\text{جتا ز} + \text{ع جا ز}) \quad \text{و}$$

$$\frac{\text{د}'(\text{ب})}{1} = \text{ب}_{1}(\text{جتا ز}_{1} + \text{ع جا ز}_{1}) \quad \text{و}$$

$$\frac{\text{د}''(\text{ب})}{1\times 2} = \text{ب}_{2}(\text{جتا ز}_{2} + \text{ع جا ز}_{2})$$

. . . .

$$\frac{\text{د}^{\text{م}}(\text{ب})}{1\times 2\cdots\times \text{م}} = \text{ح}_{0} = \text{ب}_{\text{م}}(\text{جتا ز}_{\text{م}} + \text{ع جا ز}_{\text{م}})$$

ويمكن ان تكون عدة معاملات من معاملات القوى المتتالية للكمية ح معدومة الا انه لا يمكن ان تكون كلها معدومة لان المعامل الاخير اوى المعامل ح_{0} الذى هو معامل أعلا قوة للمتغير س فى الدالة المفروضة ولتكن $\text{د}^{(\text{ن})}(\text{ب})$ أول مشتقة مقدارها مخالف للصفر فاذا عين المتغير ح بالمقدار ل (جتا ز + ع جا ز) يحدث

$$ء(ب+ح) = ن(\text{جتاز} + ع\,\text{جاز}) + ب_{ه} ل^{ه} \left\{ \text{جتا}(ه و + ل_{ه}) + ع\,\text{جا}(ه و + ل_{ه}) \right\} + \dots$$

$$+ ب_{م} ل^{م} \left\{ \text{جتا}(م و + ل_{م}) + ع\,\text{جا}(م و + ل_{م}) \right\}$$

ومربع مقياس هذه الكمية مرموزا له بحرف ق هو

$$ق^{٢} = \left\{ ن\,\text{جتاز} + ب_{ه} ل^{ه}\,\text{جتا}(ه و + ز_{ه}) + \dots + ب_{م} ل^{م}\,\text{جتا}(م و + ز_{م}) \right\}^{٢}$$

$$+ \left\{ ن\,\text{جاز} + ب_{ه} ل^{ه}\,\text{جا}(ه و + ز_{ه}) + \dots + ب_{م} ل^{م}\,\text{جا}(م و + ز_{م}) \right\}^{٢}$$

وبتحليل المربعين وترتيب الناتج على حسب القوى التصاعدية للكمية ل يحدث

$$ق^{٢} = ن^{٢} + ٢\,ن\,ب_{ه} ل^{ه}\,\text{جتا}(ه و + ز_{ه} - ز) + \dots + ب_{م}^{٢} ل^{٢م}$$

او

$$ق^{٢} - ن^{٢} = ٢\,ن\,ب_{ه} ل^{ه}\,\text{جتا}(ه و + ز_{ه} - ز) + \dots + ب_{م}^{٢} ل^{٢م}$$

فاذا أعطى للكمية و مقدار بحيث ان الزاوية $ه و + ز_{ه} - ز$ تكون محصورة بين $٢ ك ط + \frac{ط}{٢}$ و $٢ ك ط + \frac{٣ط}{٢}$ (ك عدد صحيح حيثما اتفق) ولاجل الدقة يمكن ان يفرض ان هذه الزاوية تساوى ط لانه يكفى لاجل ذلك ان يجعل $و = \frac{ط + ز - ز_{ه}}{ه}$ وبذلك يكون لعامل الحد الاول فى الطرف الثانى من المتساوية السابقة مقدار سالب ومن جهة أخرى يمكن ان يعطى للكمية ل مقدار صغير صغرا كافيا بحيث تكون اشارة المقدار الجبرى عين اشارة هذا الحد الاول (بند ٢٢٢) واذ ذاك يكون $ق < ن$

وليكن ع مقياس الدالة ء(س) حيثما يعطى للمتغير س مقدار مخصوص منتخب بالاختيار وليكن س = س ولنعين كما أوضحنا فى البند السابق عددا ر بحيث انه بجميع مقادير س التى مقياسها مساو او أكبر من ر يكون مقياس ء(س) أكبر

من

من عدد معلوم ع أكبر من ع ولنتصور اننا أعطينا للمتغير سه جميع المقادير التى مقياسها أصغر من ر ولنعتبر مقاييس المقادير المناظرة لها للدالة فأقول ان احد هذه المقاييس يكون بالاقل مساويا للاصغر لاننا لو فرضنا انه لم يكن أى مقياس من هذه المقاييس معدوما ورمزنا بحرف ع لاصغر مقدار هذه المقاييس وفرضنا ان ب مقدار سه المناظر او احد مقادير سه المناظرة بحيث ان مقياس المقدار سه أقل من ر حيث ان مقياس ى (سه) وهو ع أصغر من ع فيكون ع أحد مقاييس ى(سه) وينتج من ذلك ان النهاية الصغرى ع تكون مساوية للكمية ع او أقل منها وبناء على ذلك تكون أصغر من ع لكن قد شاهدنا انه يوجد للمتغير سه مقدار ت = ب + ح بحيث انه يكون مقياس ى(ت) وهو ق أقل من ع وحينئذ يكون مقياس ت أقل كذلك من ر وبموجب ذلك لا يكون ع أصغر مقدار لمقياس الدالة ى (سه) حينما تأخذ المقادير المعتبرة وهذا مخالف للفرض ويعلم من ذلك انه لا يمكن ان يفرض ان أصغر مقدار لمقياس ى(سه) يكون مخالفا للصفر وينتج من ذلك انه لابد ان يكون بالاقل أحد مقادير سه التى مقياسها أصغر من ر عادما للدالة ى(سه) وبناء على ذلك يكون جذر المعادلة ى(سه)=٠

بند ٢٣١ (النظرية الحادية عشر) كل معادلة جبرية وصحيحة بدرجة م يكون لها جذور حقيقية وتخيلية عددها م

ولاثبات ذلك نرمز بالرمز ى(سه) لكمية كثيرة الحدود صحيحة بدرجة م فقد شاهدنا ان هذه الكمية الكثيرة الحدود يكون لها بالاقل جذر حقيقى أو تخيلى فلنرمز لهذا الجذر بحرف ح فتكون الكمية الكثيرة الحدود قابلة للقسمة على سه − ح وحينئذ اذا رمزنا بالرمز ى١(سه) للخارج الذى يكون كمية كثيرة الحدود صحيحة وبدرجة م − ١ يحدث

$$ى(سه)=(سه-ح)\ ى_1(سه)$$

وكذلك يكون لكثيرة الحدود ى١(سه) جذر بالاقل وليكن ء وتكون قابلة للقسمة على سه−ء ويكون

$$ى_1(سه)=(سه-ء)\ ى_2(سه)$$

(والخارج ء‌$_٢$ (س) كمية كثيرة الحدود صحيحة وبدرجة م-٢)

وكذلك يكون لكثيرة الحدود ء‌$_٢$(س) جذر بالاقل وليكن هـ وتكون قابلة للقسمة على س-هـ ويكون

$$ء_٢(س)=(س-هـ)ء_٣(س)$$

(والخارج ء‌$_٣$(س) كمية كثيرة الحدود صحيحة وبدرجة م-٣) وبالاستمرار بهذه الكيفية يتوصل الى كمية مثل ء‌$_{م-١}$(س) بدرجة أولى يكون لها جذر وليكن ل ويكون

$$ء_{م-١}(س)=(س-ل)ع$$

والخارج الاخير ع غير متعلق بالمتغير س فاذا ضربت جميع هذه المتساويات فى بعضها انمحى الكميات الكثيرة الحدود المتوسطة ويكون

$$ء(س)=ع(س-ح)(س-ء)(س-هـ)\ldots(س-ل)$$

ويعلم من ذلك ان أى كمية كثيرة الحدود صحيحة وبدرجة م يمكن تحليلها الى حاصل ضرب عوامل بدرجة أولى عددها م

فاذا عوض س فى كثيرة الحدود المفروضة باحد المقادير ح ,ء , هـ,...ل فحيث ان احد عوامل حاصل الضرب يكون معدوما فينعدم حاصل الضرب وحينئذ تكون الجذور التى عددها م وهى ح ,ء , هـ ,... ,ل محققة للمعادلة ء(س)=٠ ولا يمكن ان يكون لهذه المعادلة جذور أخر لانه اذا أعطى للمجهول س مقدار مخالف لكل من الكميات ح ,ء ,هـ ,... ,ل فحيث ان كلا من عوامل حاصل الضرب يكون مخالفا للصفر فيكون حاصل الضرب نفسه مخالفا للصفر

بند ٢٣٢ (تنبيه) يمكن ان يتأتى ان عدة كميات من الكميات ح ,ء , هـ ,... ,ل تكون متساوية ففى هذه الحالة يقال ان المعادلة لها جذور متساوية مثلا لنفرض ان الكميتين ح , ء تكونان متساويتين ففى هذه الحالة تكون كثيرة الحدود المركبة للطرف الاول للمعادلة المفروضة مشتملة على العامل $(س-ح)^٢$ ويقال ان الجذر ح جذر امزدوجا وكذا اذا كانت الثلاث كميات ح , ء , هـ متساوية تكون كثيرة الحدود المذكورة مشتملة على العامل $(س-ح)^٣$ ويكون الجذر ح جذرا ثلاثيا وعلى

العموم

العموم اذا تساوت كميات عددها ن من الكميات ح ، ى ، ه ، ... ، ل تكون كثيرة الحدود المذكورة مشتملة على العامل (س−ح)^ن ويقال ان الجذر ح مضاعف بدرجة ن

ويمكن ان يكون للمعادلة عدة جذور مضاعفة مثلا جذر ح مضاعف بدرجة ن وجذر مضاعف ى بدرجة ع وجذر مضاعف ه بدرجة ك وهكذا بحيث يكون

ى(س) = ق (س−ح)^ن (س−ى)^ع (س−ه)^ك ....

وتكون العوامل س−ح ، س−ى ، س−ى ، ... الخ المركبة لكثيرة الحدود المفروضة هي العوامل الاولية لهذه الكمية الكثيرة الحدود ويكون المجموع ن + ع + ك + ... الخ الذي هو مجموع اسس العوامل الاولية مساويا للدرجة م التي هي درجة كثيرة الحدود المفروضة

٢٣٣ (النظرية الثانية عشر) اى كمية كثيرة الحدود صحيحة لا يمكن تحليلها الى عوامل أولية الا بكيفية واحدة

ولاثبات ذلك نفرض انه بجميع مقادير س يكون

ى(س) = ق (س−ح)^ن (س−ى)^ع (س−ه)^ك .... ،

ى(س) = قَ (س−حَ)^نَ (س−ىَ)^عَ (س−هَ)^كَ ....

ولنعط للمتغير س المقدار المخصوصي وهو ح بحيث ان حاصل الضرب الاول مشتمل على العامل (س−ح) فينعدم وحينئذ يجب ان ينعدم الثاني الذي يساويه ولذلك يلزم ان يكون احد العوامل معدوما وبناء على ذلك يلزم ان يكون مساويا للعامل (س−ح) ويعلم من ذلك ان العوامل الاولية تكون متحدة في حاصلي الضرب فاقول الآن ان الاسس تكون متساوية على التناظر لاننا اذا فرضنا ان الاسين ن ، نَ مثلا لا يكونان متساويين وان ن يكون اكبر من نَ وقسمنا حاصلي الضرب المتساويين على (س−ح)^نَ نجد خارجين متساويين وهما

ق (س−ح)^(ن−نَ) (س−ى)^ع (س−ه)^ك .... ،

ق(سه ـ ء)^ع (سه ـ هـ)^ك

ويكون الخارج الاول مشتملا على العامل سه ـ ح ولا يكون الثانى مشتملا عليه وهذا مستحيل ثم اذا أعطى للمتغير سه مقدار مخالف للجذور فحيث انه يجب ان يكون الحاصلان متساويين فيلزم ان يكون المعاملان ق و قَ متساويين

بند ٢٣٤ (النظرية الثالثة عشر) اذا وضع عددان حقيقيان مثل سه ب و سه ا عوضا عن سه فى كمية كثيرة الحدود صحيحة مثل ء(سه) ذات معاملات حقيقية فان الناتجين يكونان متحدين فى الاشارة أو مختلفين فيها على حسب ما يكون هذان العددان حاصرين بينهما جذورا حقيقية زوجية العدد أو فردية العدد

ولاثبات ذلك نرمز بحروف ح و ء و هـ و . . . ط للجذور الحقيقية المحصورة بين سه ب و سه ا فتكون الكمية الكثيرة الحدود ء(سه) قابلة للقسمة على الحاصل (سه ـ ح)(سه ـ ء) . . . (سه ـ ط) الذى هو حاصل ضرب العوامل ذات الحدين المطابقة لهذه الجذور ولو فرضنا ان ءا(سه) هو خارج قسمة ء(سه) على الحاصل المذكور يحدث

ء(سه) = (سه ـ ح)(سه ـ ء) . . . (سه ـ ط) × ءا(سه)

وحيث ان معاملات المقسوم والمقسوم عليه حقيقية فمن الواضح ان معاملات خارج القسمة تكون حقيقية كذلك فاذا عوض سه على التوالى بالعددين سه ب و سه ا يحدث

ء(سه ب) = (سه ب ـ ح) (سه ب ـ ء) . . . (سه ب ـ ط) ءا(سه ب) و

ء(سه ا) = (سه ا ـ ح) (سه ا ـ ء) . . . (سه ا ـ ط) ءا(سه ا)

ولننبه فى أول الامر على ان ءا(سه ب) و ءا(سه ا) تكونان كميتين متحدتين فى الاشارة لانهما لو كانتا مختلفتين فيها لكان العددان سه ب و سه ا حاصرين بينهما جذرا آخر أيضا لكثيرة الحدود ءا(سه) وبناء على ذلك يكونان حاصرين بينهما جذرا لكثيرة الحدود ء(سه) وهذا مخالف للفرض ولنفرض ان سه ب اصغر من سه ا فحيث ان العدد سه ا أكبر من الجذور ح و ء و . . . و ط فيكون كل من العوامل سه ا ـ ح و سه ا ـ ء و . . . و سه ا ـ ط

و س ـ ط موجبا وحينئذ تكون اشارة د(س) عين اشارة د(س) وحيث كان العدد س أصغر من الجذور ح و د و ... و ط فيكون كل من العوامل س ـ ح و س ـ د و ... و س ـ ط سالبا فاذا كان عدد هذه العوامل زوجيا تكون اشارة د(س) عين اشارة د(س) وبناء على ذلك تكون عين اشارة د(س) واذا كان عدد هذه العوامل فرديا تكون اشارة د(س) مخالفة لاشارة د(س) وبناء على ذلك تكون مخالفة لاشارة د(س) ويعلم من ذلك ان الناتجين د(س) , د(س) يكونان متحدين في الاشارة أو مختلفين فيها على حسب ما يكون عدد الجذور الحقيقية المحصورة بين س و س زوجيا أو فرديا

ولا مانع يمنع من ان يفرض ان عدة عوامل من العوامل ذات الحدين س ـ ح و س ـ د و س ـ د و ... الخ تكون متساوية واذذاك يكون للدالة د(س) جذور مضاعفة وتكون النظرية حقيقية دائما بشرط ان تعتبر درجة تضعيف كل جذر عند تقدير عدد الجذور المحصورة بين س و س

والعكس ان صحيحان أعني أولا متى وضع عددان س و س عوضا عن س في كثيرة الحدود د(س) وكان الناتجان متحدين في الاشارة لا يكون هذان العددان حاصرين بينهما أدنى جذر حقيقي أو يكونان حاصرين بينهما جذورا زوجية العدد لانهما لو حصرا بينهما جذورا حقيقية فردية العدد لكان الناتجان مختلفين في الاشارة وثانيا اذا كان الناتجان مختلفين في الاشارة يكون العددان حاصرين بينهما جذورا حقيقية فردية العدد لانهما اذا لم يحصرا بينهما أدنى جذر أو حصرا بينهما جذورا زوجية العدد لكان الناتجان متحدين في الاشارة وهذه تتمة للنظرية السادسة

٢٣٥ (نتيجه) متى غير س بكيفية مستمرة فانه يمر بجذر حقيقي مثل ح وتنعدم الدالة الا ان اشارتها لا تتغير دائما ويمكننا ان نفرض ان الكمية ف صغيرة صغرا كافيا بحيث ان الكميتين ح ـ ف , ح + ف لا يحصران بينهما أدنى جذر آخر خلاف ح وبموجب النظرية المتقدمة يكون الناتجان د(ح ـ ف) , د(ح + ف) متحدين في الاشارة اذا كان الجذر ح جذرا مضاعفا بدرجة زوجية ومختلفين في الاشارة اذا كان الجذر ح جذرا مضاعفا بدرجة فردية ويعلم من ذلك ان كثيرة الحدود تتغير

اشارتها متى مر سه بجذر بسيط أو مضاعف بدرجة فردية ولا تتغير اشارتها متى مر سه بجذر مضاعف بدرجة زوجية

ويمكن اثبات هذه القضية مباشرة فليكن ه درجة تضعيف الجذر ح فيحدث

$$ء(سه)=(سه-ح)^{ه} ء_{١}(سه)$$

واذا عوضنا سه بالكميتين ح-ف ، ح+ف على التوالى يحدث

$$ء(ح-ف)=(-ف)^{ه} ء_{١}(ح-ف)$$

و

$$ء(ح+ف)=ف^{ه} ء_{١}(ح+ف)$$

وحيث ان الكميتين $ء_{١}(ح-ف)$ و $ء_{١}(ح+ف)$ متحدتان فى الاشارة فتكون الكميتان ء(ح-ف) و ء(ح+ف) متحدتين فى الاشارة اذا كان العدد ه زوجيا ومختلفتين فى الاشارة اذا كان العدد ه فرديا

(فى الارتباطات الواقعة بين معاملات أى معادلة جبرية وجذورها)

بند ٢٣٦ لنفرض اننا قسمنا طرفى المعادلة على المعامل الاول كى تتحول الى الصورة

$$سه^{م}+ح_{١}سه^{م-١}+ح_{٢}سه^{م-٢}+\cdots\cdots+ح_{م}=٠$$

فهذه المعادلة لها جذور عددها م مثل ح و ء و ه و ٠٠٠٠ ل وقد أثبتنا (بند ٢٣١) على أن الطرف الاول يمكن تحليله الى حاصل ضرب عوامل أوليه عددها م وهو

$$(سه-ح)(سه-ء)(سه-ه)\cdots\cdots(سه-ل)$$

ومن الواضح انه اذا أجرينا عملية الضرب يتحصل على نفس كثيرة الحدود المفروضة فاذ رمزنا بالرمز $ع_{١}$ لمجموع الجذور وبالرمز $ع_{٢}$ لمجموع حواصل ضرب الجذور مثنى مثنى وبالرمز $ع_{٣}$ لمجموع حواصل ضرب الجذور ثلاثة ثلاثة وهلم جرا فبموجب القانون المثبت فى بند ٢١٠ يصلح حاصل ضرب العوامل الاولية التى عددها م بهذه الكيفية وهى

$$س^{م} - ع_{١} س^{م-١} + ع_{٢} س^{م-٢} - ع_{٣} س^{م-٣} + \dots \pm ع_{م}$$

وحينئذ اذا سويت معاملات كثيرتى الحدود يحدث

$$ع_{١} = -ح_{١} \quad و \quad ع_{٢} = ح_{٢} \quad و \quad ع_{٣} = -ح_{٣} \quad و \quad \dots \quad و \quad ع_{م} = \pm ح_{م}$$

ومن هنا تنتج هذه النظرية وهي

(بند ٢٣٧ النظرية الرابعة عشر) اذا كان معامل الحد الاول هو الواحد يكون أولا مجموع الجذور مساويا لمعامل الحد الثاني مأخوذا باشارة مخالفة لاشارته ثانيا يكون مجموع حواصل الضرب مثنى مثنى للجذور مساويا لمعامل الحد الثالث ثالثا يكون مجموع حواصل الضرب ثلاثة ثلاثة مساويا لمعامل الحد الرابع مأخوذا باشارة مخالفة لاشارته وهلم جرا ثم ان حاصل ضرب الجذور يكون مساويا للحد الاخير مأخوذا باشارته أو باشارة مخالفة لاشارته على حسب ما تكون درجة المعادلة زوجية أو فردية

(أمثلة)

(الاول) قد عرفنا هذه الارتباطات في المعادلة ذات الدرجة الثانية (بند ٢٣٨ جزء أول) واذا رمزنا بحروف $ح$ و $ء$ و $ه$ للجذور الثلاثة لمعادلة ذات درجة ثالثة مثل

$$س^{٣} + ح_{١} س^{٢} + ح_{٢} س + ح_{٣} = ٠$$

يكون

$$ح + ء + ه = -ح_{١} \quad و \quad حء + حه + ءه = ح_{٢} \quad و \quad حءه = -ح_{٣}$$

(الثاني) المطلوب حل معادلة ذات درجة ثالثة من بعد معرفة ان أحد جذورها يساوي مجموع الجذرين الآخرين

لذلك نفرض ان الجذر $ح$ يكون مساويا للمجموع $ء + ه$ الذي هو مجموع الجذرين الآخرين فمن الارتباط الاول وهو $ح + ء + ه = -ح_{١}$ يستخرج $٢ح = -ح_{١}$

واذن يكون $ح = -\frac{ح_{١}}{٢}$ ومن الارتباط الثاني وهو $ح (ء + ه) + ءه = ح_{٢}$ ينتج أن

$ءه = ح_{٢} - ح^{٢} = ح_{٢} - \frac{ح_{١}^{٢}}{٤}$ واذن يعلم الجذران الآخران بواسطة المعادلة ذات الدرجة الثانية وهي

$$\text{س}^{٢} + \frac{\text{ح}}{٢}\,\text{س} + \left(\frac{\text{ح}}{٢} - \frac{\text{ح}^{٢}}{٤}\right) = ٠$$

ومن الارتباط الثالث يستخرج ء ه = $-\frac{\text{ح}_{٣}}{\text{ح}} = \frac{\text{ح}_{٣}^{٢}}{\text{ح}_{١}}$ وحينئذ لاجل أن يكون لجذور المعادلة ذات الدرجة الثالثة الخاصية المنطوق بها يلزم ان تكون معاملات هذه المعادلة محققة للارتباط

$$\frac{\text{ح}_{٣}^{٢}}{\text{ح}_{١}} = \frac{\text{ح}}{٢} - \frac{\text{ح}^{٢}}{٤}$$

بند ٢٣٨ (النظرية الخامسة عشر) كل معادلة جبرية ذات معاملات حقيقية تكون جذورها التخيلية مقترنة مثنى مثنى

لانا قد ذكرنا في بند ٢١٥ انه اذا عوض س في دالة مثل ء(س) بالكمية التخيلية ح+وء تاخذ هذه الدالة مقدارا بالصورة ع+ر ء فلنعوض الآن س بالكمية التخيلية المقارنة للكمية التخيلية ح+وء وهي ح-وء فاذا كانت جميع المعاملات حقيقية فمن الواضح ان مقدار الدالة لا يخالف المقدار المتقدم وهو ع+ر ء الا بكون ان ء يصير متغيرا الى -ء واذن تحصل الكمية التخيلية وهي ع-ر ء

فاذا كانت الكمية التخيلية ح+وء جذر المعادلة ء(س) =٠ يكون الناتج الاول معدوما او يكون ع=٠ و ر=٠ واذن يكون الناتج الثاني معدوما كذلك وتكون الكمية التخيلية ح-وء جذرا للمعادلة كذلك

وهذه القضية ليست حقيقية الا اذا كانت جميع معاملات المعادلة حقيقية لانه ان وجد فيها معاملات تخيلية فانه متى عوضت الكمية التخيلية ح+وء بالكمية التخيلية ح-وء تتغير اشارة ء في مقدار س الا انها لا تتغير في المعاملات التي تبقى ثابتة وحينئذ لا يمكن ان يقال ان الناتج الثاني يكون مقارنا للناتج الاول

بند ٢٣٩ (نتيجة) الجذور التخيلية المقترنة لمعادلة جبرية ذات معاملات حقيقية تكون بدرجة تضعيف واحدة

لان الحاصل (س-ح-وء)(س-ح+وء)

الذي هو حاصل ضرب العاملين المطابقين لجذرين تخيليين مقترنين كمية كثيرة الحدود بدرجة ثانية وهي

(س

$$(س-ح)^{٢}+ء^{٢}$$

ومعاملاتها حقيقية وكثيرة الحدود المفروضة وهى ء(س) قابلة للقسمة على هذه الكمية الكثيرة الحدود ذات الدرجة الثانية والخارج $ء_{١}(س)$ كمية كثيرة الحدود بدرجة م - ٢ ومعاملاتها حقيقية فاذا كان الجذر التخيلى ح + ء ع جذرا كذلك للمعادلة $ء_{١}(س)=٠$ فان الجذر المقارن له وهو ح - ء ع يكون كذلك جذرا لها وتكون كثيرة الحدود $ء_{١}(س)$ قابلة للقسمة على $(س-ح)^{٢}+ء^{٢}$ ويكون الخارج الجديد $ء_{٢}(س)$ كمية كثيرة الحدود بدرجة م - ٤ ومعاملاتها حقيقية وهلم جرا وينتج من ذلك ان ح + ء ع , ح - ء ع يكونان جذرين للمعادلة ء(س)=٠ بدرجة تضعيف واحدة فاذا كانت درجة التضعيف ه تكون كثيرة الحدود ء(س) قابلة للقسمة على

$$\left[(س-ح)^{٢}+ء^{٢}\right]^{ه}$$

(فى قواسم الكمية الكثيرة الحدود)

بند ٢٤٠ لنعتبر كمية كثيرة الحدود صحيحة ونفرض انها محللة الى عواملها الاولية ولتكن

$$ء(س)=ب(س-ح)^{ه}(س-ء)^{ع}(س-هـ)^{ك}\ldots$$

فلاجل ان تقسمها كمية كثيرة الحدود صحيحة قسمة صحيحة يلزم ويكفى ان تكون هذه الكمية الكثيرة الحدود الثانية مكونة من نفس العوامل الاولية مأخوذة بأسس مساوية فى الغاية لاسس هذه العوامل الاولية وحينئذ تكون كل كمية كثيرة الحدود قاسمة لكثيرة الحدود المفروضة بالصورة

$$ت(س-ح)^{ل}(س-ء)^{ى}(س-هـ)^{ط}\ldots$$

التى فيها الاسس ل , ى , ط , ... الخ تكون فى الغاية مساوية للاسس ه , ع , ك , ... الخ على التناظر ويتحصل على جميع قواسم الكمية الكثيرة الحدود المفروضة بان يعطى للاس ل مقادير ٠ , ١ , ٢ , ٣ , ... , ه ويعطى للاس ى مقادير ٠ , ١ , ٢ , ٣ , ... , ع الخ وهكذا بحيث يكون عدد القواسم الجبرية هو

$$(ه+١)(ع+١)(ك+١)\ldots-١$$

والكميات الكثيرة الحدود القاسمة لكمية الكثيرة الحدود المفروضة والتى لا تختلف عن بعضها الا بعامل ثابت تعتبر قاسما جبريا واحدا

(فى القاسم المشترك الاعظم الجبرى)

بند ٤٤١ القاسم المشترك الاعظم الجبرى لكميتين كثيرتى الحدود هو الكمية الكثيرة الحدود الصحيحة وذات الدرجة العليا التى تقسم الكميتين الكثيرتى الحدود المفروضتين فاذا فرض ان هاتين الكميتين الكثيرتى الحدود حللتا الى عوامل أولية يكون القاسم المشترك الاعظم الجبرى هو حاصل ضرب العوامل الاولية المشتركة مأخوذا كل منها بأصغر اس لكن يمكن ايجاد القاسم المشترك الاعظم بسلسلة عمليات قسمة كما فى علم الحساب

فلنفرض ان سه_1 و سه_2 هما الكميتان الكثيرتا الحدود المفروضتان مرتبتين بالنسبة للقوى التنازلية لحرف مثل سه ولنفرض ان كثيرة الحدود سه_1 بدرجة مساوية لدرجة سه_2 أو بدرجة اعلا من درجة سه_2 ولنقسم سه_1 على سه_2 ولنرمز بحرف ح للخارج وبالرمز سه_3 للباقى فيكون

$$\text{سه}_1 = \text{سه}_2\,\text{ح} + \text{سه}_3$$

فاقول ان القاسم المشترك الاعظم بين سه_1 و سه_2 عين القاسم المشترك الاعظم بين سه_2 و سه_3 لانه اذا فرض ان $(\text{سه} - \text{د})^{\text{ه}}$ عامل مشترك بين سه_1 و سه_2 ووضع

$$\text{سه}_1 = (\text{سه} - \text{د})^{\text{ه}}\,\text{سه}'_1 \quad \text{و} \quad \text{سه}_2 = (\text{سه} - \text{د})^{\text{ه}}\,\text{سه}'_2 \quad \text{يكون}$$

$$\text{سه}_3 = \text{سه}_1 - \text{سه}_2\,\text{ح} = (\text{سه} - \text{د})^{\text{ه}}(\text{سه}'_1 - \text{سه}'_2\,\text{ح})$$

وحيث كانت كثيرة الحدود سه_3 مساوية لحاصل ضرب $(\text{سه} - \text{د})^{\text{ه}}$ فى كمية كثيرة الحدود صحيحة فتكون محتوية على العامل $(\text{سه} - \text{د})^{\text{ه}}$ كذلك ويعلم من ذلك ان كل عامل ذى حدين مثل $(\text{سه} - \text{د})^{\text{ه}}$ مشترك بين سه_1 و سه_2 يكون مشتركا أيضا بين

سه_2

$س_{٢}$ و $س_{٣}$ وبمثل ذلك يثبت العكس وهو ان كل عامل ذى حدين مشترك بين $س_{٢}$ و $س_{٣}$ يكون مشتركا كذلك بين $س_{١}$ و $س_{٢}$ وحيث كانت العوامل المشتركة بين $س_{١}$ و $س_{٢}$ عين العوامل المشتركة بين $س_{٢}$ و $س_{٣}$ فيكون حاصل ضرب العوامل المشتركة بين $س_{١}$ و $س_{٢}$ عين حاصل ضرب العوامل المشتركة بين $س_{٢}$ و $س_{٣}$ واذن يكون القاسم المشترك الاعظم بين $س_{١}$ و $س_{٢}$ عين القاسم المشترك الاعظم بين $س_{٢}$ و $س_{٣}$ وحينئذ تؤول المسئلة الى البحث عن القاسم المشترك الاعظم بين $س_{٢}$ و $س_{٣}$ فاذا قسمنا $س_{٢}$ على $س_{٣}$ كما تقدم ورمزنا بحرف $ح_{١}$ للخارج الجديد وبحرف $س_{٤}$ للباقي الجديد يحدث

$$س_{٢} = س_{٣} ح_{١} + س_{٤}$$

ويكون القاسم المشترك الاعظم بين $س_{٢}$ و $س_{٣}$ عين القاسم المشترك الاعظم بين $س_{٣}$ و $س_{٤}$

واذا قسمنا $س_{٣}$ على $س_{٤}$ وفرضنا اننا وجدنا باقيا معدوما فحيث ان $س_{٤}$ قاسم لكثيرة الحدود $س_{٣}$ فيكون هو حاصل ضرب العوامل الاولية المشتركة بين $س_{٣}$ و $س_{٤}$ وحينئذ يكون هو القاسم المشترك الاعظم المطلوب

ويعلم من ذلك انه لاجل ايجاد القاسم المشترك الاعظم بين كميتين كثيرتى الحدود ترتب هاتان الكميتان الكثيرتا الحدود على حسب القوى التنازلية لحرف مثل س ثم تقسم كثيرة الحدود ذات الدرجة العليا على كثيرة الحدود الاخرى وهذه الاخرى على باقى القسمة ويستمر على ذلك الى أن يتوصل الى باق معدوم فيكون المقسوم عليه الاخير هو القاسم المشترك الاعظم المطلوب

وفى هذه القسم تكون درجات البواقى وبالتبعية درجات كثيرات الحدود المتتالية المقسوم عليها آخذة فى النقص وحينئذ لابد أن يتوصل الى باق معدوم أو الى باق غير متعلق بحرف س ففى الحالة الاولى يوجد بين كثيرتى الحدود المفروضتين قاسم مشترك أعظم جبرى بدرجة ما وفى الحالة الثانية لا يوجد بينهما قاسم مشترك اعظم جبرى ويقال انهما اوليتان مع بعضهما

بـ٢٤٤ـد (تنبيه) عندما من لاجل اجتناب المعاملات الكسرية يمكن ضرب جميع

حدود أي كمية من الكميات الكثيرة الحدود المستعملة باقيا في كمية غير متعلقة بحرف س بشرط أن تكون هذه الكمية محدودة بمخالفة للصفر وكذلك اذا وجد عامل مشترك بين معاملات جميع حدود أي باق يمكن حذفه مثلا لنفرض انه لاجل اجراء عملية القسمة الاولى قد ضرب المقسوم في عدد ثابت مثل ب وقسمت جميع حدود الباقي على عدد ثابت مثل ك فيكون

$$ب س_١ = س_٢ ج + ك س_٣$$

ويثبت كما سبق ان كل عامل ذي حدين مثل (س ـ ح) مشترك بين س١ و س٢ يكون مشتركا كذلك بين س٢ و س٣ وبالعكس وحينئذ يتغير القاسم المشترك الاعظم الجبري

(في الجذور المشتركة بين معادلتين)

بند ٢٤٣ اذا كان للمعادلتين

$$س_١ = ٠ \quad و \quad س_٢ = ٠$$

جذور مشتركة عددها ﻫ فانه يكون لكثيرتي الحدود س١ و س٢ عوامل مشتركة بدرجة اولى عددها ﻫ وبناء على ذلك يوجد بينهما قاسم مشترك أعظم بدرجة ﻫ وحينئذ لاجل ايجاد الجذور المشتركة بين معادلتين يبحث عن القاسم المشترك الاعظم بين الطرفين الاولين لهاتين المعادلتين وليكن ق هذا القاسم المشترك الاعظم فاذا حلت المعادلة

$$ق = ٠$$

تحصل الجذور المشتركة بين المعادلتين

واذا لم يوجد بين كثيرتي الحدود قاسم مشترك أعظم جبري لا يكون للمعادلتين جذور مشتركة واذا كان القاسم المشترك الاعظم بدرجة أولى يوجد جذر واحد مشترك واذا كان بدرجة ثانية يوجد جذران مشتركان وهلم جرا

(مثال) المطلوب ايجاد الجذور المشتركة بين المعادلتين

$$س^٤ - ٣س^٣ + ٣س^٢ - ٣س + ٢ = ٠ \quad و$$

$$٢س^٣ - ٥س^٢ + س + ٢ = ٠$$

فصورة

فصورة العمل هكذا

$س^4 - 3س^3 + 3س^2 - 3س + 2$	$2س^3 - 5س^2 + س + 2$	$س - 1$
$2س^4 - 6س^3 + 6س^2 - 6س + 4$	$-2س^3 + 6س^2 - 4س$	$2س + 1$
$-2س^4 + 5س^3 - س^2 - 2س$	$س^2 - 3س + 2$	$س^2 - 3س + 2$
$-س^3 + 5س^2 - 8س + 4$	0	
$-2س^3 + 10س^2 - 16س + 8$		
$+2س^3 - 5س^2 + س + 2$		
$5س^2 - 15س + 10$		
$س^2 - 3س + 2$		

فقد ضرب المقسوم الاول مرتين فى ٢ كى تجتنب الكسور واختصر الباقى بقسمة جميع حدوده على ٥ والقاسم المشترك الاعظم بين كثيرى الحدود المركب منهما الطرفين الاولين للمعادلتين المفروضتين هو $س^2 - 3س + 2$ وحينئذ يوجد جذران مشتركان يعلمان بواسطة المعادلة

$$س^2 - 3س + 2 = 0$$

وهذان الجذران المشتركان هما ١ و ٢

(مثال آخر) المطلوب معرفة الجذور المشتركة بين المعادلتين

$$س^7 - 3س^6 + س^5 - 4س^2 + 12س - 4 \quad و$$

$$2س^4 - 6س^3 + 3س^2 - 3س + 1$$

فبالبحث عن القاسم المشترك الاعظم الجبرى بينهما يوجد أن هذا القاسم هو $س^2 - 3س + 1$ وحينئذ يوجد جذران مشتركان يعلمان بواسطة المعادلة

$$س^2 - 3س + 1 = 0$$

وهذان الجذران المشتركان هما $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ ، $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$



(الفصل الثالث)

(فى الكلام على الجذور المتساوية)

للجذور المضاعفة خواص مخصوصة نشتغل بها فنقول

بند ٢٤٤ (نظرية اولى) كل عامل بدرجة ه لكمية كثيرة الحدود يكون عاملا بدرجة (ه−١) لمشتقتها

ولاثبات ذلك نفرض ان $د(س) = (س-ح)^{ه} \times د_{1}(س)$

بحيث ان $د_{1}(س)$ تكون كمية كثيرة الحدود صحيحة لاتحتوى على العامل (س−ح) فباخذ مشتقة الحاصل يوجد أن

$$د'(س) = ه(س-ح)^{ه-1} د_{1}(س) + (س-ح)^{ه} د'_{1}(س)$$

أو

$$د'(س) = (س-ح)^{ه-1} \{ ه د_{1}(س) + (س-ح) د'_{1}(س) \}$$

فيشاهد ان الكمية الموضوعة بين القوسين الكبيرين لاتقبل القسمة على (س−ح) لانه اذا جعل س=ح تؤل الى ه $د_{1}(ح)$ وهى كمية غير معدومة ويعلم من ذلك ان المشتقة تحتوى على العامل الاولى (س−ح) بدرجة ه−١

بند ٢٤٥ (نظرية ثانية) القاسم المشترك الاعظم بين كمية كثيرة الحدود ومشتقتها هو حاصل ضرب العوامل الاولية التى تركب الكمية الكثيرة الحدود المفروضة مأخوذا كل منها باسه منقوصا واحدا

ولاثبات ذلك نفرض ان الكمية الكثيرة الحدود المفروضة محللة الى عواملها الاولية

وليكن $د(س) = ب (س-ح)^{ه} (س-د)^{ع} (س-ه)^{ك} \ldots$

فبموجب النظرية المتقدمة تكون المشتقة $د'(س)$ محتوية على العوامل $(س-ح)^{ه-1}$ و $(س-د)^{ع-1}$ و $(س-ه)^{ك-1}$ ... الخ وحينئذ يكون حاصل ضرب العوامل الاولية المشتركة بين كثيرتى الحدود د(س) و د'(س) أى القاسم المشترك الاعظم الجبرى بينهما هو

$(س-ح)^{ه-1}$

$$(\text{س}-\text{ح})^{\text{ه}-1}\ (\text{س}-\text{ء})^{\text{ع}-1}\ (\text{س}-\text{هـ})^{\text{ك}-1}\ \ldots$$

فاذا فرضنا ان ے رمزا لعدد العوامل الاولية المختلفة التي تركب الكمية الكثيرة الحدود المفروضة بحيث أن اس كل منها منقوص واحدا فيكون القاسم المشترك الاعظم بين كثيرة الحدود ء (س) ومشتقتها ءَ (س) بدرجة م − ے

بند ٢٤٦ (نتيجة) ينتج من النظرية الاولى ان أي جذر بسيط للكمية الكثيرة الحدود ء (س) لا يعدم المشتقة وان أي جذر مزدوج للكمية الكثيرة الحدود يكون جذرا بسيطا للمشتقة برتبة اولى الا انه لا يعدم المشتقة برتبة ثانية وان أي جذر ثلاثي للكمية الكثيرة الحدود يكون جذرا مزدوجا للمشتقة برتبة اولى وبناء على ذلك يكون جذرا بسيطا للمشتقة برتبة ثانية الا انه لا يعدم المشتقة برتبة ثالثة وعلى العموم يكون كل جذر مضاعف بدرجة ه لكثيرة الحدود ء (س) عادما للمشتقات الاولى التي عددها (ه − ١) ولا يكون عادما للمشتقة برتبة ه

والعكس صحيح أعني اذا كانت الكمية ح تعدم كثيرة الحدود ء (س) هي ومشتقاتها الاولى التي عددها (ه − ١) ولا تعدم المشتقة برتبة ه فان هذه الكمية تكون جذرا مضاعفا بدرجة ه لكثيرة الحدود المفروضة لانه اذا كان الجذر مضاعفا بدرجة مثل هَ أقل من ه فانه لا يعدم المشتقة برتبة هَ واذا كان الجذر مضاعفا بدرجة أكبر من ه فانه يعدم المشتقة برتبة ه وهذا يخالف الفرض

بند ٢٤٧ غالبا يحتاج للبحث عن الارتباط الذي يجب وجوده بين معاملات معادلة جبرية صحيحة بحيث يكون لهذه المعادلة جذران متساويان ولذلك يلزم ويكفي أن يكون للمعادلتين ء(س) = ٠ و ءَ(س) = ٠ جذر مشترك وحينئذ يبحث عن القاسم المشترك الاعظم بين كثيرتي الحدود ء (س) و ءَ (س) حتى توصل الى مقسوم عليه بدرجة أولى يساوي الباقي بصفر فتكون المعادلة المتحصلة هي الارتباط المطلوب الا انه باستعمال الدوال المتجانسة تختصر العملية جدا فلتكن

$$\text{ء}(\text{س}) = \text{ح}_0\,\text{س}^{\text{م}} + \text{ح}_1\,\text{س}^{\text{م}-1} + \text{ح}_2\,\text{س}^{\text{م}-2} + \ldots + \text{ح}_{\text{م}}$$

كثيرة الحدود المفروضة فاذا عوض س بالكمية $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ يحدث

$$\text{ح}_0\frac{\text{س}^{\text{م}}}{\text{ص}^{\text{م}}} + \text{ح}_1\frac{\text{س}^{\text{م}-1}}{\text{ص}^{\text{م}-1}} + \text{ح}_2\frac{\text{س}^{\text{م}-2}}{\text{ص}^{\text{م}-2}} + \ldots + \text{ح}_{\text{م}}$$

واذا ضرب فى $\text{صه}^{\text{م}}$ توجد دالة صحيحة متجانسة وبدرجة م تشتمل على المتغيرين سه و صه فبالرمز اليها بالرمز د (سه و صه) يكون

$$\text{د}(\text{سه} ,\ \text{صه}) = \text{ج}\,\text{سه}^{\text{م}} + \text{ج}_{1}\,\text{سه}^{\text{م}-1}\,\text{صه} + \text{ج}_{2}\,\text{سه}^{\text{م}-2}\,\text{صه}^{2} + \cdots + \text{ج}_{\text{م}}\,\text{صه}^{\text{م}}$$

وبموجب نظرية الدوال المتجانسة (بند ١٨٠) توجد المتطابقة

$$\text{سه}\ \text{د}'_{\text{سه}}(\text{سه} ,\ \text{صه}) + \text{صه}\ \text{د}'_{\text{صه}}(\text{سه} ,\ \text{صه}) = \text{م}\,\text{د}(\text{سه} ,\ \text{صه})$$

ومن الواضح انه اذا جعل صه = ١ فى الدالة د(سه و صه) تحصل الدالة المفروضة وهى د(سه) وكذلك اذا جعل صه = ١ فى $\text{د}'_{\text{سه}}$ (سه و صه) تحدث المشتقة د' (سه) فالرمز بحرف ح للجذر المزدوج ولنتصور اننا عوضنا سه بالعدد ح , صه بالعدد ١ فى المتساوية السابقة فحيث ان كثيرتى الحدود د (سه , صه) و $\text{د}'_{\text{سه}}$ (سه و صه) تنعدمان فتنعدم كثيرة الحدود $\text{د}'_{\text{صه}}$ (سه و صه) كذلك وبالعكس أى اذا كانت الكميتان الكثيرتا الحدود $\text{د}'_{\text{سه}}$ (سه و صه) و $\text{د}'_{\text{صه}}$ (سه و صه) تنعدمان حينما يجعل سه = ح و صه = ١ فان كثيرة الحدود د(سه و صه) تنعدم كذلك ويعلم من ذلك ان الشرط الذى به يكون للمعادلة د(سه) = ٠ جذر مزدوج هو ان المعادلتين

$$\text{د}'_{\text{سه}}(\text{سه} ,\ \text{صه}) = 0 \quad \text{و} \quad \text{د}'_{\text{صه}}(\text{سه} ,\ \text{صه}) = 0$$

اللتين يعوض فيهما صه بالعدد ١ يكون لهما جذر مشترك

ولاجل تطبيق ذلك نبحث عن الشرط الذى به يكون للمعادلة ذات الدرجة الثالثة وهى

$$\text{سه}^{3} + \text{ح}\,\text{سه} + \text{ك} = 0$$

جذران متساويان فنقول

ان هنا

$$\text{د}(\text{سه} ,\ \text{صه}) = \text{سه}^{3} + \text{ح}\,\text{سه}\,\text{صه}^{2} + \text{ك}\,\text{صه}^{3} \qquad \text{و}$$

$$\text{د}'_{\text{سه}}(\text{سه} ,\ \text{صه}) = 3\,\text{سه}^{2} + \text{ح}\,\text{صه}^{2} \qquad \text{و}$$

$$\text{د}'_{\text{صه}}(\text{سه} ,\ \text{صه}) = 2\,\text{ح}\,\text{سه}\,\text{صه} + 3\,\text{ك}\,\text{صه}^{2}$$

وبمساواة المشتقتين الجزئيتين بصفر من بعد أن يوضع فيهما صه = ١ توجد المعادلتان

$3\,\text{سه}^{2}$

$$\text{٣}\text{س}^{\text{٢}}+\text{ح}=\text{٠} \quad \text{و} \quad \text{٢ح}\,\text{س}+\text{٣ك}=\text{٠}$$

اللتان يجب أن يكون لهما جذر مشترك فمن المعادلة الثانية يستخرج

$$\text{س}=-\frac{\text{٣ك}}{\text{٢ح}}$$

وبوضع هذا المقدار فى المعادلة الاولى يتحصل الشرط

$$\left(\frac{\text{ح}}{\text{٣}}\right)^{\text{٣}}+\left(\frac{\text{ك}}{\text{٢}}\right)^{\text{٢}}=\text{٠}$$

ويكون الجذر المزدوج هو $-\frac{\text{٣ك}}{\text{٢ح}}$ وحيث كان مجموع الجذور معدوما فيكون الجذر البسيط هو $\frac{\text{٣ك}}{\text{ح}}$ مثلا المعادلة

$$\text{س}^{\text{٣}}-\text{٣}\text{د}^{\text{٢}}\text{س}\pm\text{٢}\text{د}^{\text{٣}}=\text{٠}$$

التى معاملاتها موفية للشرط المتقدم لها جذر مزدوج وهو $\text{س}=\pm\text{د}$ وجذر بسيط وهو $\text{س}=\mp\text{٢د}$

والمعادلة $\text{س}^{\text{٣}}-\text{٤}\text{س}^{\text{٢}}+\text{٥}\text{س}-\text{٢}=\text{٠}$ لها جذر مزدوج وهو $\text{س}=\text{١}$

٢٤٨ بعد الطريقة المتقدمة يمكن تعميمها ولذلك نعلم انه لاجل أن يكون لمعادلة مثل $\text{ء}(\text{س})=\text{٠}$ ثلاثة جذور متساوية يلزم ويكفى أن يكون للمعادلات الثلاثة وهى

$$\text{ء}(\text{س})=\text{٠} \quad \text{و} \quad \text{ء}'(\text{س})=\text{٠} \quad \text{و} \quad \text{ء}''(\text{س})=\text{٠} \qquad (\text{١})$$

جذر مشترك فلنأخذ كما سبق الدالة المتجانسة $\text{ء}(\text{س}\ \text{و}\ \text{ص})$ التى تتكون بتعويض س فى الدالة المفروضة بكمية $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ والضرب فى $\text{ص}^{\text{م}}$ فتكون المشتقتان الجزئيتان برتبة أولى وهما $\text{ء}'_{\text{س}}(\text{س}\ \text{و}\ \text{ص})$ و $\text{ء}'_{\text{ص}}(\text{س}\ \text{و}\ \text{ص})$ دالتين متجانستين بدرجة $\text{م}-\text{١}$ فاذا طبقت نظرية الدوال المتجانسة على الدالة $\text{ء}(\text{س}\ \text{و}\ \text{ص})$ وعلى الدالتين $\text{ء}'_{\text{س}}(\text{س}\ \text{و}\ \text{ص})$ و $\text{ء}'_{\text{ص}}(\text{س}\ \text{و}\ \text{ص})$ توجد المتطابقات

$$\text{س}\,\text{ء}'_{\text{س}}+\text{ص}\,\text{ء}'_{\text{ص}}=\text{م}\,\text{ء}(\text{س}\ \text{و}\ \text{ص}) \quad \text{و}$$

$$\text{س}\,\text{ء}''_{\text{س}\text{س}}+\text{ص}\,\text{ء}''_{\text{س}\text{ص}}=(\text{م}-\text{١})\,\text{ء}'_{\text{س}}(\text{س}\ \text{و}\ \text{ص}) \quad \text{و}$$

$$\text{س}\,\text{ء}''_{\text{س}\text{ص}}+\text{ص}\,\text{ء}''_{\text{ص}\text{ص}}=(\text{م}-\text{١})\,\text{ء}'_{\text{ص}}(\text{س}\ \text{و}\ \text{ص})$$

ولنرمز بحرف د للجذر الثلاثى ولنجعل $\text{س}=\text{د}$ و $\text{ص}=\text{١}$ فحيث ان $\text{ء}(\text{س})=\text{٠}$ و

$\text{ء}'_{\text{سه}}=0$ و $\text{ء}''_{\text{سه سه}}=0$ فيستنتج من الارتباط الاول ان $\text{ء}'_{\text{صه}}=0$ ومن الارتباطين التاليين أن $\text{ء}''_{\text{سه صه}}=0$ و $\text{ء}''_{\text{صه صه}}=0$ وبالعكس أى انفرض انه اذا جعل $\text{سه}=\text{ح}$ و $\text{صه}=1$ يكون

$$\text{ء}''_{\text{سه سه}}=0 \quad \text{و} \quad \text{ء}''_{\text{سه صه}}=0 \quad \text{و} \quad \text{ء}''_{\text{صه صه}}=0 \qquad (٢)$$

فبواسطة الارتباطين الاخيرين يوجد أن $\text{ء}'_{\text{سه}}=0$ و $\text{ء}'_{\text{صه}}=0$ وبواسطة الارتباط الاول يكون $\text{ء}(\text{ح})=0$ ويعلم من ذلك أن كل مقدار للمجهول سه محقق للمعادلات (١) يحقق المعادلات (٢) وبالعكس وينتج من ذلك ان الشروط اللازمة والكافية لاجل ان يكون للمعادلة $\text{ء}(\text{سه})=0$ ثلاثة جذور متساوية هى ان يكون للمعادلات (٢) جذر مشترك وهذه الشروط اثنان الاول انه يجب ان يكون للمعادلتين $\text{ء}''_{\text{سه سه}}=0$ و $\text{ء}''_{\text{سه صه}}=0$ جذر مشترك والثانى انه يجب ان يكون هذا الجذر عادما للدالة $\text{ء}''_{\text{صه صه}}$

مثلا لنبحث عن الشروط التى بها يكون للمعادلة ذات الدرجة الرابعة وهى

$$\text{سه}^{4}+\text{ح}\,\text{سه}^{2}+\text{ك}\,\text{سه}+\text{ر}=0$$

ثلاثة جذور متساوية فهنا

$$\text{ء}(\text{سه، صه})=\text{سه}^{4}+\text{ح}\,\text{سه}^{2}\text{صه}^{2}+\text{ك}\,\text{سه}\,\text{صه}^{3}+\text{ر}\,\text{صه}^{4}=0 \quad \text{و}$$

$$\text{ء}'_{\text{سه}}=4\,\text{سه}^{3}+2\,\text{ح}\,\text{سه}\,\text{صه}^{2}+\text{ك}\,\text{صه}^{3} \quad \text{و}$$

$$\text{ء}'_{\text{صه}}=2\,\text{ح}\,\text{سه}^{2}\text{صه}+3\,\text{ك}\,\text{سه}\,\text{صه}^{2}+4\,\text{ر}\,\text{صه}^{3} \quad \text{و}$$

$$\text{ء}''_{\text{سه سه}}=12\,\text{سه}^{2}+2\,\text{ح}\,\text{صه}^{2} \quad \text{و}$$

$$\text{ء}''_{\text{سه صه}}=4\,\text{ح}\,\text{سه}\,\text{صه}+3\,\text{ك}\,\text{صه}^{2} \quad \text{و}$$

$$\text{ء}''_{\text{صه صه}}=2\,\text{ح}\,\text{سه}^{2}+6\,\text{ك}\,\text{سه}\,\text{صه}+12\,\text{ر}\,\text{صه}^{2}$$

وبمساواة المشتقات الثلاث الجزئية التى برتبة ثانية لصفر من بعد ان يجعل فيها $\text{صه}=1$ توجد الثلاث معادلات

$$12\,\text{سه}^{2}+2\,\text{ح}=0 \quad \text{و}$$

$$4\,\text{ح}\,\text{سه}+3\,\text{ك}=0 \quad \text{و}$$

$2\,\text{ح}\,\text{سه}^{2}$

$$٢\,\text{ع}\,\text{س}^{٢} + ٦\,\text{ل}^{٢}\,\text{س} + ١٢\,\text{ل ر} = ٠$$

فمن المعادلة الثانية يستنتج أن $\text{س} = -\frac{٣\,\text{ل}^{٢}}{٤\,\text{ع}}$ وبوضع هذا المقدار فى المعادلتين الاخريين يوجد الشرطان

$$\frac{٣}{٢}\,\text{ل}^{٢} = ١٢\,\text{ع ر} = -\,\text{ع}^{٢}$$

ب ٢٤٩ د تطبيق النظرية الثانية يمكن به معرفة ان كان للمعادلة جذور متساوية ام لا كما يمكن به أيضا تحليل كثيرة الحدود الى عدة كميات أخرى كثيرة الحدود كل منها مكون من حاصل ضرب العوامل الاوّلية المتحدة فى درجة التضعيف ولبيان ذلك نفرض أن س كثيرة الحدود المفروضة ونرمز بحرف $\text{س}_{١}$ لحاصل ضرب العوامل الاوّلية البسيطة وبحرف $\text{س}_{٢}$ لحاصل ضرب العوامل المزدوجة مأخوذا كل عامل منها بدرجة أولى فقط وبحرف $\text{س}_{٣}$ لحاصل ضرب العوامل الثلاثية وهلم جرّا فيكون

$$\text{س} = \text{س}_{١}\,\text{س}_{٢}^{٢}\,\text{س}_{٣}^{٣}\,\text{س}_{٤}^{٤}\ldots$$

ولنبحث عن القاسم المشترك الاعظم بين كثيرة الحدود س ومشتقتها فاذا لم يوجد قاسم مشترك أعظم جبرى استنتج من ذلك انه لا يكون لكثيرة الحدود سوى جذور بسيطة ويكون $\text{س} = \text{س}_{١}$ واذا وجد قاسم مشترك أعظم جبرى وليكن $\text{ر}_{١}$ بحيث كان هذا القاسم المشترك الاعظم مساويا لحاصل ضرب العوامل المضاعفة منقوصة اسسها بواحد فيكون بالصورة

$$\text{ر}_{١} = \text{س}_{٢}\,\text{س}_{٣}^{٢}\,\text{س}_{٤}^{٣}\ldots$$

ويستنتج من ذلك انه يكون لكثيرة الحدود وهى س جذور مضاعفة ولنبحث كذلك عن القاسم المشترك الاعظم بين كثيرة الحدود $\text{ر}_{١}$ ومشتقتها فاذا لم يوجد بينهما قاسم مشترك جبرى استنتج من ذلك انه لا يكون لكثيرة الحدود $\text{ر}_{١}$ سوى جذور بسيطة ويكون $\text{ر}_{١} = \text{س}_{٢}$ وفى هذه الحالة يكون لكثيرة الحدود المفروضة وهى س جذور مزدوجة الا انه لا يكون لها جذور بدرجة تضعيف أعلا من ٢ واذا وجد قاسم مشترك أعظم وليكن $\text{ر}_{٢}$ يكون هذا القاسم المشترك الاعظم بالصورة

$$ي_٢ = س_٣ س_٤^٢ \ldots$$

وينتج من ذلك انه يكون لكثيرة الحدود $ي_١$ جذور مضاعفة وبناء على ذلك يكون لكثيرة الحدود س جذور مضاعفة بدرجة تساوى ٣ أو أكبر من ٣
ثم يبحث عن القاسم المشترك الاعظم بين كثيرة الحدود $ي_٢$ ومشتقتها فاذا لم يوجد بينهما قاسم مشترك جبرى استنتج من ذلك انه لا يكون لكثيرة الحدود $ي_٢$ سوى جذور بسيطة ويكون $ي_٢ = س_٣$ ويكون لكثيرة الحدود المفروضة جذور ثلاثية الا انه لا يكون لها جذور مضاعفة بدرجة اعلا من الدرجة الثالثة واذا وجد بينهما قاسم مشترك اعظم وليكن $ي_٣$ يكون هذا القاسم المشترك الاعظم بالصورة

$$ي_٣ = س_٤ \ldots$$

ويستنتج من ذلك انه يكون لكثيرة الحدود $ي_٢$ جذور مضاعفة وبناء على ذلك يكون لكثيرة الحدود س جذور مضاعفة بدرجة تساوى ٤ أو اعلا من ٤
ويستمر بهذه الكيفية الى ان يتوصل الى كمية كثيرة الحدود أولية مع مشتقتها ولنفرض لاجل عدم تشتت الافكار ان كثيرة الحدود $ي_٣$ تكون اوّلية مع مشتقتها فيكون $ي_٣ = س_٤$ ويستنتج من ذلك انه لا يكون لكثيرة الحدود س جذور مضاعفة بدرجة اعلا من ٤ وفى هذه الحالة توجد سلسلة لكميات الكثيرة الحدود وهى

$$س = س_١ س_٢^٢ س_٣^٣ س_٤^٤ \quad ,$$

$$ي_١ = س_٢ س_٣^٢ س_٤^٣ \quad ,$$

$$ي_٢ = س_٣ س_٤^٢ \quad ,$$

$$ي_٣ = س_٤$$

وبقسمة كل من هذه الكميات الكثيرة الحدود على التالية لها تحصل سلسلة جديدة من الكميات الكثيرة الحدود الصحيحة التى نرمز لها بالرموز $ك_١$, $ك_٢$, $ك_٣$ وهى

$$ك_١ = \frac{س}{ي_١} = س_١ س_٢ س_٣ س_٤ \quad ,$$

$$ك_٢ =$$

$$ل_{٢} = \frac{ق_{١}}{ق_{٢}} = س_{٢}\ س_{٣}\ س_{٤} \quad و$$

$$ل_{٣} = \frac{ق_{٢}}{ق_{٣}} = س_{٣}\ س_{٤} \quad و$$

$$ق_{٣} = س_{٤} \quad و$$

وبقسمة كل من هذه الكميات الكثيرة الحدود الجديدة على التالية لها نجد اخيرا أن

$$\frac{ل_{١}}{ل_{٢}} = س_{١} \quad و$$

$$\frac{ل_{٢}}{ل_{٣}} = س_{٢}$$

$$\frac{ل_{٣}}{ق_{٣}} = س_{٣} \quad و$$

$$ق_{٣} = س_{٤}$$

ومتى وجدت الكميات الكثيرة الحدود $س_{١}$ و $س_{٢}$ و $س_{٣}$ و $س_{٤}$ يؤل حل المعادلة المفروضة وهى $س = ٠$ الى حل المعادلات

$$س_{١} = ٠ \quad و \quad س_{٢} = ٠ \quad و \quad س_{٣} = ٠ \quad و \quad س_{٤} = ٠$$

التى ليس لها جذور متساوية وجذور المعادلة الاولى هى الجذور البسيطة للمعادلة المفروضة وجذور الثانية هى الجذور المزدوجة لها وجذور الثالثة هى الجذور الثلاثية وهكذا

ويعلم من ذلك انه لاجل تحويل حل معادلة لها جذور متساوية الى حل معادلات بدرجة اقل و جذورها غير متساوية يبحث عن القاسم المشترك الاعظم بين الطرف الاول للمعادلة ومشتقته ثم عن القاسم المشترك الاعظم بين هذا القاسم المشترك الاعظم الاول ومشتقته وهلم جرّا الى ان يتوصل الى كمية كثيرة الحدود أولية مع مشتقتها ثم تقسم كثيرة الحدود المفروضة على القاسم المشترك الاعظم الاول والقاسم المشترك الاعظم الاول على الثانى والثانى على الثالث وهلم جرّا ثم يقسم كل من هذه الخوارج على الخارج التالى له وتساوى هذه الخوارج الجديدة بصفر فتوجد معادلات تكون جذور المعادلة

الاولى منها هى الجذور البسيطة للمعادلة المفروضة وتكون جذور الثانية هى الجذور المزدوجة لها وتكون جذور الثالثة هى الجذور الثلاثة لها وهلم جرا

(مثال)

لتكن المعادلة ذات الدرجة السابعة وهى

$$س = س^{٧} - ٢س^{٥} - س^{٤} + س^{٣} + ٢س^{٢} - ١ = ٠$$

فبالبحث عن القاسم المشترك الاعظم بين كثيرة الحدود س ومشتقتها يوجد أن

$$ق_{١} = س^{٣} - س^{٢} - س + ١$$

وبالبحث عن القاسم المشترك الاعظم بين كثيرة الحدود $ق_{١}$ ومشتقتها يوجد أن

$$ق_{٢} = س - ١$$

وحيث كانت هذه الكمية الاخيرة أولية مع مشتقتها فينتج من ذلك انه ليس للمعادلة المفروضة جذور مضاعفة بدرجة اعلا من الدرجة الثالثة ويمكن ان يوضع

$$س = س_{١}\, س_{٢}^{٢}\, س_{٣}^{٣}$$

وبقسمة كثيرة الحدود المركبة للطرف الاول من المعادلة المفروضة على $ق_{١}$ وقسمة $ق_{١}$ على $ق_{٢}$ يوجد أن

$$ك_{١} = \frac{س}{ق_{١}} = س^{٤} + س^{٣} - س - ١ \quad و$$

$$ك_{٢} = \frac{ق_{١}}{ق_{٢}} = س^{٢} - ١ \quad و$$

$$ق_{٢} = س - ١$$

وبواسطة عمليتى قسمة جديدة يوجد أن

$$\frac{ك_{١}}{ك_{٢}} = س_{١} = س^{٢} + س + ١ \quad و$$

$$\frac{ك_{٢}}{ق_{٢}} = س_{٢} = س + ١ \quad و$$

$$ق_{٢} = س_{٣} = س - ١$$

وبهذه

وبهذه الكيفية يؤول حل المعادلة المفروضة الى حل الثلاث معادلات وهى

$$\text{س}^{٢} + \text{س} + ١ = ٠ \quad \text{و} \quad \text{س} + ١ = ٠ \quad \text{و} \quad \text{س} - ١ = ٠$$

فبالمعادلة الاولى يوجد جذران بسيطان تخيليان وبالثانية يوجد جذر مزدوج وهو
−١ وبالثالثة يوجد جذر ثلاثى وهو +١

(تمرينات)

المطلوب تطبيق طريقة البحث عن الجذور المتساوية على المعادلات

$$\text{س}^{٨} - ٧\text{س}^{٧} - ٢\text{س}^{٦} + ١١٨\text{س}^{٥} - ٢٥٩\text{س}^{٤} - ٨٣\text{س}^{٣} + ٦١٢\text{س}^{٢} - ١٠٨\text{س} - ٤٣٢ = ٠ \quad \text{و}$$

$$\text{س}^{٩} + ٢\text{س}^{٨} + \text{س}^{٧} + ٦\text{س}^{٦} + ٧\text{س}^{٥} - ٢\text{س}^{٤} + ٣\text{س}^{٣} + ٢\text{س}^{٢} - ١٢\text{س} - ٨ = ٠ \quad \text{و}$$

$$\text{س}^{٤} - ٨\text{س}^{٣} + ٢٤\text{س}^{٢} - ٣٢\text{س} + ١٦ = ٠ \quad \text{و}$$

$$\text{س}^{٥} - ٢\text{س}^{٤} + ٣\text{س}^{٣} - ٧\text{س}^{٢} + ٨\text{س} - ٣ = ٠ \quad \text{و}$$

$$\text{س}^{٦} - ٦\text{س}^{٥} + ٩\text{س}^{٤} + ٨\text{س}^{٣} - ٢٤\text{س}^{٢} + ١٦ = ٠ \quad \text{و}$$

$$\text{س}^{٧} + ٢\text{س}^{٦} + ٣\text{س}^{٥} - \text{س}^{٤} - ٨\text{س}^{٣} - ١٣\text{س}^{٢} - ١٢\text{س} - ٤ = ٠ \quad \text{و}$$

$$\text{س}^{٧} - ١٢\text{س}^{٥} - ٢\text{س}^{٤} + ٣٩\text{س}^{٣} - ٦\text{س}^{٢} + ٤٤\text{س} + ٢٤ = ٠$$

(الفصل الرابع)

(فى عدد الجذور الحقيقية)

من المهم ايجاد عدد الجذور الحقيقية المحصورة بين عددين معلومين ولذلك نذكر النظريات المختلفة المتعلقة بهذا الغرض فنقول

(فى نظرية ديكارت)

بمقتضاها متى كانت كمية كثيرة الحدود ذات معاملات حقيقية مرتبة بالنسبة للقوى التنازلية لحرف س يقال ان كل حدين متواليين مختلفين فى الاشارة يكونان مغايرة وان كل حدين متواليين متحدين فى الاشارة يكونان مداومة مثلا كثيرة الحدود وهى

$$\text{س}^{٥} - ٣\text{س}^{٤} - ٢\text{س}^{٣} + ٢\text{س}^{٢} + ٧\text{س} - ٦$$

تحتوى على ثلاث مغايرات واحدة من الحد الاول الى الحد الثانى و واحدة من الحد الثالث الى الرابع وواحدة من الحد الخامس الى الحد السادس وعلى مداومتين

احداهما من الحد الثانى الى الحد الثالث وواحدة من الحد الرابع الى الحد الخامس وقبل ان نذكر نظرية ديكارت نثبت الفائدة الآتية وهى

(فائدة) اذا ضربت كمية كثيرة الحدود فى سـ ـ د (د عدد موجب) فانه يدخل فى هذه الكمية الكثيرة الحدود مغايرة واحدة بالاقل

لان اى كمية كثيرة الحدود مرتبة على حسب القوى التنازلية لحرف سـ يمكن كتابتها هكذا

$$\text{ح}_{\text{م}}\text{سـ}^{\text{م}}\cdots+\text{ح}_{\text{ﻫ}+1}\text{سـ}^{\text{ﻫ}+1}-\text{ح}_{\text{ﻫ}}\text{سـ}^{\text{ﻫ}}\cdots-\text{ح}_{\text{ع}+1}\text{سـ}^{\text{ع}+1}+\text{ح}_{\text{ع}}\text{سـ}^{\text{ع}}+\cdots$$
$$\cdots\pm\text{ح}_{\text{ط}+1}\text{سـ}^{\text{ط}+1}\mp\text{ح}_{\text{ط}}\text{سـ}^{\text{ط}}\cdots\mp\text{ح}_{.}$$

فالكمية الكثيرة الحدود تبتدئ بسلسلة حدود موجبة ثم يأتى بعدها سلسلة حدود سالبة ثم سلسلة حدود موجبة وهكذا الى السلسلة الاخيرة التى تبتدئ بالحد $\mp\text{ح}_{\text{ط}}\text{سـ}^{\text{ط}}$ الذى من ابتدائه تكون جميع الحدود الباقية متحدة الاشارة وكل سلسلة تحتوى على حدود عددها حيثما اتفق يمكن ان يكون هذا العدد واحدا أعنى يمكن ان لا تحتوى السلسلة الا على حد واحد وحينئذ توجد المغايرات متى مر من الحد الاخير من اى سلسلة الى الحد الاول من السلسلة التالية لها

فاذا ضربت هذه الكمية الكثيرة الحدود فى سـ ـ د يحدث

$$\text{ح}_{\text{م}}\text{سـ}^{\text{م}+1}\cdots\left.\begin{matrix}-\text{ح}_{\text{ﻫ}}\\-\text{ح}_{\text{ﻫ}+1}\text{د}\end{matrix}\right|\text{سـ}^{\text{ﻫ}+1}\cdots\left.\begin{matrix}+\text{ح}_{\text{ع}}\\+\text{ح}_{\text{ع}+1}\text{د}\end{matrix}\right|\text{سـ}^{\text{ع}+1}\cdots\left.\begin{matrix}\mp\text{ح}_{\text{ط}}\\\mp\text{ح}_{\text{ط}+1}\text{د}\end{matrix}\right|\text{سـ}^{\text{ط}+1}\cdots\pm\text{ح}_{.}\text{د}$$

فبالضرب فى سـ يوجد كل حد حافظا لاشارته ويحصل الصف الاول وبالضرب فى ـ د تتغير جميع الاشارات ويحصل الصف الثانى وتكون اشارة الحد الاول من الحاصل وهو $\text{ح}_{\text{م}}\text{سـ}^{\text{م}+1}$ هى + وتكون اشارة الحد الذى بدرجة ﻫ + ١ المتحصل من جمع حدين سالبين هى ـ ومهما كانت اشارات الحدود المتوسطة يتحقق انه يوجد بين هذين الحدين المختلفين فى الاشارة مغايرة واحدة بالاقل وحينئذ توجد فى حاصل الضرب المغايرة الاولى من المضروب وهى التى بين الحد الاول والحد الذى درجته ﻫ وكذلك تكون اشارة الحد الذى درجته ع + ١ المتحصل من جمع حدين موجبين هى + ويوجد بين الحدين المحتوين على $\text{سـ}^{\text{ﻫ}+1}$ و $\text{سـ}^{\text{ع}+1}$ المختلفين فى

الاشارة

الاشارة مغايرة واحدة بالاقل وحينئذ توجد فى الحاصل المغايرة الثانية من المضروب وهى التى توجد من الحد المحتوى على سـ^ش الى الحد المحتوى على سـ^ع ولاجل بسط البرهان يمكننا الآن أن نجعل المضروب آيلا الى الحدود الاول من السلاسل المختلفة وأن لا نعتبر فى حاصل الضرب الا الحدود المناظرة للحدود التى أخذت من المضروب أعنى أن لا نعتبر الا الحدود التى درجتها تزيد بواحد عن درجة الحدود التى تبتدئ بها سلاسل المضروب بحيث كانت هذه الحدود المعتبرة فى حاصل الضرب مقرونة باشارات عين اشارات الحدود المناظرة لها من المضروب فمن الواضح اننا نجد فى حاصل الضرب جميع مغايرات المضروب وحينئذ متى وصلنا الى الحد المحتوى على سـ^ط+١ نكون قد وجدنا فى الحاصل جميع مغايرات المضروب وبالابتداء من الحد المحتوى على سـ^ط لا يحتوى المضروب على مغايرات مطلقا لكن الحد الثابت ∓ جـ من المضروب مضروبا فى ــ حـ يحدث الحد الاخير وهو ± جـ حـ من الحاصل وحيث ان هذا الحد الاخير باشارة مخالفة لاشارة الحد المحتوى على سـ^ط+١ فتكون السلسلة الاخيرة من الحاصل محتوية أيضا على مغايرة بالاقل زائدة عن المغايرات التى توجد فى المضروب

وقد يمكن انه بالضرب فى سـ ــ حـ تدخل عدة مغايرات جديدة لا مغايرة واحدة ففى هذه الحالة يكون عدد المغايرات الداخلة ٣ أو ٥ أو الخ أعنى أن عددها يكون فرديا لاننا قد وجدنا فى كل سلسلة من سلاسل الحاصل مغايرة مناظرة لمغايرة من المضروب لكن يمكن أن تحتوى هذه السلسلة على أكثر من مغايرة واحدة لانه حيث كانت الحدود المتوسطة متحصلة من جمع حدين مختلفين فى الاشارة فتكون مكيفة الاشارات انما اذا احتوت السلسلة المذكورة على أكثر من مغايرة واحدة يجب أن يكون عدد المغايرات التى تحتوى عليها تلك السلسلة فرديا أعنى يكون واحدا مضافا اليه عددا زوجيا لان الاشارة تتغير بالضرورة بين كل حدين مختلفين فى الاشارة مرارا فردية العدد ويعلم من ذلك أن كل سلسلة من سلاسل حاصل الضرب يمكن أن تدخل مغايرات جديدة زوجية العدد وحيث ان السلسلة الاخيرة تدخل مغايرات فردية العدد فحينئذ يكون العدد الكلى للمغايرات الجديدة فرديا

يه ٣٣٥ (نظرية) فى كل معادلة جبرية ذات معاملات حقيقية عدد الجذور

الموجبة لا يمكن أن يزيد عن عدد المغايرات واذا كان مخالفا له يكون مخالفا له بعدد زوجى

أولا لتكن ء(س) = ٠ معادلة ذات معاملات حقيقية لها جذور موجبة بعدد ما ولتكن ح , ء , هـ , ٠٠٠ , ك فيكون

$$\text{ء}(\text{س}) = (\text{س} - \text{ح})(\text{س} - \text{ء}) \cdots (\text{س} - \text{ك})\,\text{ء}_{1}(\text{س})$$

والخارج ء_{1} (س) معاملاته حقيقية كذلك فاذا ضربنا هذه الكمية الكثيرة الحدود وهى ء_{1} (س) على التوالى فى كل من العوامل ذوات الحدين وهى (س − ح) , (س − ء) , ٠٠٠ , (س − ك) المناظرة للجذور الموجبة بحيث أنه يدخل بكل عملية ضرب مغايرة جديدة بالاقل فيكون حاصل الضرب النهائى وهو ء(س) مشتملا بالاقل على مغايرات بقدر عدد الجذور الموجبة

وثانيا ننبه على ان الحد الاخير من كثيرة الحدود ء_{1} (س) يكون موجبا لانه اذا كان الامر بخلاف ذلك وجب أن يكون لكثيرة الحدود ء_{1} (س) جذر موجب وهذا مخالف للفرض وحينئذ اذا اشتملت هذه الكمية الكثيرة الحدود على مغايرات فانها تكون مشتملة على مغايرات زوجية العدد لكن قد شاهدنا انه بالضرب فى كل من العوامل التى مثل س − ح تدخل مغايرات فردية العدد أعنى يكون عددها واحدا مضافا اليه عدد زوجى وحينئذ تكون كثيرة الحدود ء(س) محتوية على مغايرات بقدر عدد الجذور الموجبة مضافا اليه حاصل جمع عدة أعداد زوجية أعنى مضافا اليه مغايرات زوجية العدد

مثلا المعادلة

$$\text{س}^{٥} - ٣\text{س}^{٤} - ٢\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + ٧\text{س} - ٨ = ٠$$

تحتوى على ثلاث مغايرات وحينئذ لا يمكن أن تحتوى على أكثر من ثلاثة جذور موجبة واذن اما أن يكون لها ثلاثة جذور موجبة أو جذر واحد موجب

والمعادلة

$$\text{س}^{٧} - ٥\text{س}^{٣} + ٨\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٦ = ٠$$

تحتوى على أربع مغايرات ولا يمكن أن يكون لها أكثر من أربع جذور موجبة واذن اما أن يكون لها أربع جذور موجبة أو جذران موجبان أو لا يكون لها جذور موجبة

موجبة مطلقا
والمعادلة

$$سـ^{٦} + ٤سـ^{٣} - ٥ = ٠$$

تحتوى على مغايرة واحـدة ولا يمكن أن تحتوى على أكثر من جذر واحـد موجب وبالضرورة يكون لها جذور واحد موجب

بـ٢٥٢د (نتيجة) اذا غـير سه فى المعادلة د(سه)=٠ الى ـ سه تحصـل معادلة جديدة تكون جذورها هى جذور المعادلة المفروضة مأخوذة باشارات مخالفة لاشاراتها وحينئذ تصير الجذور السالبة للمعادلة الاولى جذورا موجبة للمعادلة الثانية وحينئذ اذا اذا طبقت النظرية المتقدمة على المعادلة المحوّل اليها توجد نهاية كبرى لعـدد الجذور السالبة للمعادلة المفروضة

مثلا لتكن المعادلة

$$سـ^{٥} - ٣سـ^{٤} - ٢سـ^{٣} + سـ^{٢} + ٧سـ - ٨ = ٠$$

فبتغيير سه الى ـ سه تحصل المعادلة

$$-سـ^{٥} - ٣سـ^{٤} + ٢سـ^{٣} + سـ^{٢} - ٧سـ - ٨ = ٠$$

التى تحتوى على مغايرتين فهذه المعادلة الاخيرة لها فى الغاية جذران موجبان و بناء على ذلك يكون للمعادلة المفروضـة جـذران سالبان فى الغاية فاذا لم يكن لها جذران سالبان لا يكون لها جذور سالبة بالكلية

ولتكن المعادلة

$$سـ^{٧} - ٥سـ^{٣} + ٨سـ^{٢} - ٤سـ + ٦ = ٠$$

فبتغيير سه الى ـ سه تكون المعادلة المحوّل اليها هى

$$-سـ^{٧} + ٥سـ^{٣} + ٨سـ^{٢} + ٤سـ + ٦ = ٠$$

وحيث ان هذه المعادلة تحتوى على مغايرة واحدة فيكون لها جذر موجب و بناء على ذلك يكون للمعادلة المفروضة جذر واحد سالب وحيث اننا قد شاهدنا ان هذه المعادلة لها أربعة جذور موجبة فى الغاية فيكون لهذه المعادلة خمسة جـذور حقيقية فى الغاية وحيث ان لها سـبعة جـذور حيث انها بدرجـة سابعة فينتج من ذلك ان لها بالاقل جذران تخيليان

ولتكن المعادلة

$$سـ^٦ + ٤ سـ^٣ - ٥ = ٠$$

فالمعادلة المحوّل اليها هي

$$سـ^٦ - ٤ سـ^٣ - ٥ = ٠$$

لها جذر موجب وحينئذ يكون للمعادلة المفروضة جذر سالب وحيث اننا قد علمنا ان لها جذر موجب فيكون لها جذران حقيقيان وبناء على ذلك يكون لها أربعة جذور تخيلية

بند ٢٥٣ (تنبيه) من المعلوم ان عدد حدود الكمية الكثيرة الحدود التامة التى بدرجة م هو م + ١ وان حاصل جمع عدد المغايرات على عدد المداومات يساوى م فاذا غير سـ الى - سـ فحيث كان كل حدين متواليين أحدهما بدرجة زوجية والآخر بدرجة فردية فلا تتغير اشارة أحدهما وتتغير اشارة الآخر وبناء على ذلك تتغير مغايرات كثيرة الحدود المفروضة الى مداومات فى كثيرة الحدود المحوّل اليها وتتغير مداومات كثيرة الحدود المفروضة الى مغايرات فى كثيرة الحدود المحوّل اليها وينتج من ذلك ان عدد مغايرات كثيرة الحدود المفروضة يكون مساويا لعدد مداومات كثيرة الحدود المحوّل اليها وحينئذ اذا رمزنا بحرف ع لعدد المغايرات التى تحتوى عليها معادلة تامة بدرجة م وبحرف عَ لعدد مغايرات المعادلة المتحصلة من تغيير سـ الى - سـ فى المعادلة المفروضة يكون ع + عَ = م

ولنعتبر الآن معادلة غير تامة ولنفرض اننا أدخلنا بين حدين متواليين حدا مقرونا باشارة حيثما اتفق فاذا كان هذان الحدان مختلفين فى الاشارة فان عدد المغايرات لا يتغير واذا كانا متحدين فى الاشارة فان عدد المغايرات لا يتغير أو يزيد بمغايرات عددها ٢ على حسب ما يكون الحد الذى أدخل مقرونا بهذه الاشارة المتحدة أو باشارة مخالفة لهذه الاشارة واذا أدخل فى كثيرة الحدود الجديدة حد أيضا فان عدد المغايرات يزيد بمغايرات عددها ٠ أو ٢ وهلم جرا وينتج من ذلك انه متى أدخلت فى كمية كثيرة الحدود غير تامة حدود مقرونة باشارات حيثما اتفق بحيث تصير كثيرة الحدود تامة فان عدد المغايرات لا يتغير او يزيد بمغايرات زوجية العدد وبمثل ذلك لا يتغير عدد مغايرات المعادلة المحول اليها او يزيد بمغايرات زوجية العدد وحينئذ اذا رمزنا بحرفى ع وعَ لعددى مغايرات المعادلة المفروضة والمعادلة المحوّل اليها وبحرفى

ع١ , عَ١ لعددى مغايرات المعادلة المتممة بكيفية حيثما اتفق والمعادلة المتحصلة بتغيير س الى −س فى هذه المعادلة المتممة فان المجموع (ع١ + عَ١) يزيد عن المجموع (ع + عَ) بعدد زوجى مثل ٢ك١ يمكن ان يكون صفرا وحيث قد علم أن ع١ + عَ١ = م فيكون

ع + عَ = م − ٢ك١

وبواسطة نظرية ديكارت يتحصل على نهاية كبرى ع لعدد الجذور الموجبة للمعادلة المفروضة وعلى نهاية كبرى عَ لعدد جذورها السالبة وحينئذ توجد جذور حقيقية يكون عددها فى الغاية ع + عَ وبناء على ذلك توجد بالاقل جذور تخيلية عددها م − (ع + عَ) أو ٢ك١ واذن يتحصل على نهاية صغرى لعدد الجذور التخيلية وتكون هذه النهاية عددا زوجيا

ومتى علم من طبيعة المسئلة ان المعادلة جميع جذورها حقيقية يكون ب الذى هو عدد الجذور الموجبة مساويا بالعدد ع الذى هو عدد مغايرات المعادلة المفروضة ويكون ل الذى هو عدد الجذور السالبة مساويا بالعدد عَ الذى هو عدد مغايرات المعادلة المتحصلة بتغيير س الى −س فى المعادلة المفروضة لانه حيث كان عدد الجذور الموجبة وعدد الجذور السالبة مخالفين لعددى المغايرات وهما ع , عَ بعددين زوجيين ٢ك , ٢كَ فيكون ب = ع − ٢ك , ل = عَ − ٢كَ واذن يكون

ب + ل = ع + عَ − ٢ك − ٢كَ = م − ٢ك١ − ٢ك − ٢كَ

ولاجل ان يكون العدد ب + ل الذى هو عدد الجذور الحقيقية مساويا بالعدد م يلزم ان يكون كل من الاعداد الثلاثة الزوجية وهى ٢ك , ٢ك١ , ٢ك , ٢كَ معدومة

ومن هنا يستنتج أن ب = ع , ل = عَ

ويمكن ملاحظة انه اذا نقص بين حدين متحدين فى الاشارة حد او عدة حدود يكون للمعادلة جذور تخيلية لانه اذا ملئت المسافة الخالية بادخال حدود تكون مع الحد الاول سلسلة متغايرات فان عدد مغايرات المعادلة المفروضة يزيد بدون ان يتغير عدد مغايرات المعادلة المتحصلة من تغيير س الى −س فى المعادلة المفروضة وبناء على ذلك لا تكون النهاية الصغرى وهى ٢ك١ لعدد الجذور التخيلية معدومة ولننبه أيضا

على انه مهما كانت كيفية تقيم المعادلة يكون هذا العدد وهو ٢ك١ ثابتا

(في نظرية رول)

بـ٢٥٤د (نظرية) كل جذرين حقيقيين متواليين مثل حـ و ء لكمية كثيرة الحدود صحيحة مثل ء(س) يحصران بينهما بالاقل جذر حقيقي لمشتقة هذه الكمية الكثيرة الحدود

لانه اذا غير س من حـ الى ء تبتدئ الدالة ء(س) من الصفر ثم تعود الى الصفر وحينئذ تكون هذه الدالة المستمرة متزايدة في أول الامر ثم تصير متناقصة أو تكون متناقصة زمنا ما ثم تصير بعد ذلك متزايدة وعلى كلتا الحالتين تتغير اشارة المشتقة ءَ(س) وحيث انها مستمرة فتنعدم مرة واحدة بالاقل بمقدار لحرف س محصور بين حـ و ء وعلى العموم يكون للمشتقة جذور فردية العدد محصورة بين حـ و ء (بـ٢٣٤د) وهذه النظرية حقيقية لجميع الدوال المحدودة مهما كانت بشرط ان تكون المشتقة محدودة ومستمرة بمقادير س المحصورة بين الجذرين المعتبرين ولقد انتفعنا بهذه الخاصية في اثبات متسلسلة تيلور بـ١٨٧د

بـ٢٥٥د (نتيجة) ينتج من ذلك ان كل جذرين حقيقيين متواليين للمشتقة لا يحصران بينهما أكثر من جذر حقيقي للدالة المفروضة لانه اذا حصر جذران حقيقيان متواليان حَ و ءَ للمشتقة جذرين حقيقيين حـ و ء للدالة المفروضة فان هذين الجذرين الحقيقيين وهما حـ و ء يحصران بينهما جذرا للمشتقة وهذا محال

لكن لا يتحقق من انه يوجد بين الجذرين المتواليين حَ و ءَ للمشتقة جذر للدالة المفروضة ولاجل ان يتحقق من ذلك يكفي ان يعوض س بالعددين حَ و ءَ في الدالة المفروضة فان تحصل ناتجان متحدان في الاشارة يعلم انه لا يوجد لها جذر محصور بين حَ و ءَ وان تحصل ناتجان مختلفان في الاشارة يعلم أنه يوجد لها جذر محصور بين حَ و ءَ ولتكن حَ و ءَ و هَ و ... و كَ الجذور الحقيقية للمشتقة وهي ءَ(س) مرتبة على حسب كبرها ولنعوض س في الدالة ء(س) بالكميات

$$-\infty \text{ و } حَ \text{ و } ءَ \text{ و } هَ \text{ و } \ldots\ldots \text{ و } كَ \text{ و } +\infty$$

على التوالي ولنعتبر اشارات النواتج فكل عددين متواليين لا يحصران بينهما جذورا اصلا أو يحصران بينهما جذرا واحدا للدالة ء(س) على حسب ما يكون الناتجان متحدين

متضدين فى الاشارة أو مختلفين فيها ويعلم من ذلك انه اذا أمكن حل المشتقة يمكن ايجاد عدد الجذور الحقيقية للمعادلة المفروضة

فاذا رمز بحرف ع لعدد الجذور الحقيقية للمشتقة بحيث ان عدد المسافات التى توجد بين الكميات التى يعوض بها س فى الدالة وهى

$$-\infty \quad \text{و} \quad \text{حَ} \quad \text{و} \quad \text{ءَ} \quad \text{و} \quad \text{هَ} \quad \text{و} \ldots \text{و} \quad \text{كَ} \quad \text{و} \quad +\infty$$

يكون ع+١ فينتج من ذلك انه يكون للدالة المفروضة جذور يكون عددها فى الغاية هو ع+١

(تطبيق ماذكر على المعادلات ذات الدرجة الثالثة)

بند ٢٥٦ لنعتبر المعادلة ذات الدرجة الثالثة وهى

$$\text{س}^{3}+\text{ح}_{1}\text{س}^{2}+\text{ح}_{2}\text{س}+\text{ح}_{3}=0$$

فاذا سويت المشتقة بصفر تحصل معادلة ذات درجة ثانية وهى

$$3\text{س}^{2}+2\text{ح}_{1}\text{س}+\text{ح}_{2}=0$$

ولاجل ان تكون الجذور الثلاثة للمعادلة المفروضة حقيقية يلزم أولا ان يكون جذرا المشتقة حقيقيين فانرمز بحرف حَ لاصغر جذرى المشتقة وبحرف ءَ لاكبرهما ولنعوض س فى الدالة ذات الدرجة الثالثة المفروضة بالكميات

$$-\infty \quad \text{و} \quad \text{حَ} \quad \text{و} \quad \text{ءَ} \quad \text{و} \quad +\infty$$

فبوضع $\text{س}=-\infty$ يوجد ناتج سالب وبوضع $\text{س}=+\infty$ يوجد ناتج موجب فاذا نتج من وضع حَ عوضا عن س ناتج موجب ونتج من وضع ءَ عوضا عن س ناتج سالب بحيث ان كلا من المسافات يحدث تغيرا فى الاشارة فيوجد فى هذه المسافة جذر حقيقى وتكون الجذور الثلاثة للمعادلة ذات الدرجة الثالثة حقيقية

بند ٢٥٧ لكن الاحسن أن نحول المعادلة قبل كل شئ الى صورة بسيطة لانه يمكن دائما محو الحد الثانى من أى معادلة بتحويل سهل ولبيان ذلك نأخذ المعادلة

$$\text{س}^{\text{م}}+\text{ح}_{1}\text{س}^{\text{م}-1}+\text{ح}_{2}\text{س}^{\text{م}-2}+\cdots+\text{ح}_{\text{م}}=0$$

ثم نضع فيها $\text{س}=\text{ص}+\text{ل}$ فتؤل المعادلة الى

$$(\text{ص}+\text{ل})^{\text{م}}+\text{ج}_{١}(\text{ص}+\text{ل})^{\text{م}-١}+\cdots=٠$$

أو

$$\text{ص}^{\text{م}}+(\text{م}\,\text{ل}+\text{ج}_{١})\,\text{ص}^{\text{م}-١}+\cdots=٠$$

فاذا جعل $\text{ل}=-\frac{\text{ج}_{١}}{\text{م}}$ ينعدم معامل الحد الثاني وتأخذ المعادلة هذه الصورة وهي

$$\text{ص}^{\text{م}}+\text{ء}_{٢}\,\text{ص}^{\text{م}-٢}+\text{ء}_{٣}\,\text{ص}^{\text{م}-٣}+\cdots+\text{ء}_{\text{م}}=٠$$

وكان يمكن بالسهولة معرفة هذا الناتج لانه يتضح من الارتباط $\text{ص}=\text{س}-\text{ل}$ ان جذور المعادلة الجديدة تكون مساوية لجذور المعادلة المفروضة منقوصا كل منها بالكمية الثابتة وهي ل وحينئذ يكون مجموع جذور المعادلة الثانية مساويا لمجموع جذور المعادلة المفروضة وهو $-\text{ج}_{١}$ منقوصا منه م ل وحينئذ اذا أخذ $\text{ل}=-\frac{\text{ج}_{١}}{\text{م}}$ يكون مجموع جذور المعادلة الثانية معدوما وبناء على ذلك يكون معامل الحد الثاني معدوما

ولاجل اختصار المعادلة ذات الدرجة الثالثة يوضع $\text{س}=\text{ص}-\frac{\text{ج}_{١}}{٣}$ فتؤول المعادلة المذكورة الى المعادلة الابسط وهي

$$\text{ص}^{٣}+\text{ح}\,\text{ص}+\text{ك}=٠$$

وبهذا التحويل متى كانت المعاملات حقيقية لاتزال الجذور الحقيقية حقيقية ولاتزال الجذور التخيلية تخيلية

بحث ٢٥٨ د وانبحث الآن عن الشرط الذي به تكون الجذور الثلاثة للمعادلة

$$\text{س}^{٣}+\text{ح}\,\text{س}+\text{ك}=٠$$

حقيقية فنقول

حيث انه يجب أن يكون جذرا المعادلة

$$٣\,\text{س}^{٢}+\text{ح}=٠$$

حقيقيين فيلزم أن يكون المعامل ح سالبا فاذا فرضنا ان هذا الشرط مستوف يحدث

$$\text{ءَ}=-\sqrt{-\frac{\text{ح}}{٣}}\ ,\quad \text{ءً}=\sqrt{-\frac{\text{ح}}{٣}}$$

ويجب خلاف ذلك أن يكون $\text{د}(\text{ءَ})>٠$ أعني أن يكون

$$-\left(\sqrt{-\frac{\text{ح}}{٣}}\right)^{٣}-\text{ح}\sqrt{-\frac{\text{ح}}{٣}}+\text{ك}>٠$$

أو

او $$-\frac{\text{ح}}{٣}\sqrt{-\frac{\text{ح}}{٣}} > -\frac{\text{ك}}{٢} \qquad (١)$$

والشرط ء (ءَ) <٠ يستنتج من الشرط السابق بتغيير اشارة الجذر وجهة المتباينة وبذلك يكون

$$\frac{\text{ح}}{٣}\sqrt{-\frac{\text{ح}}{٣}} < -\frac{\text{ك}}{٢}$$

او $$-\frac{\text{ح}}{٣}\sqrt{-\frac{\text{ح}}{٣}} > \frac{\text{ك}}{٢} \qquad (٢)$$

وحيث كان المعامل ح سالبا فيكون الطرفان الاولان للمتباينتين (١) و (٢) كميتين موجبتين ولنفرض أن ك > ٠ فحيث كان الطرف الثانى للمتباينة (١) سالبا فتكون مستوفية على الدوام وحيث كان طرفا المتباينة (٢) موجبين فيمكن تربيعهما وان يستنتج منهما أن

$$-\left(\frac{\text{ح}}{٣}\right)^{٣} > \left(\frac{\text{ك}}{٢}\right)^{٢}$$

او $$\left(\frac{\text{ح}}{٣}\right)^{٣} + \left(\frac{\text{ك}}{٢}\right)^{٢} < ٠ \qquad (٣)$$

ولنفرض الآن ان ك<٠ فتكون المتباينة (٢) هى المحققة على الدوام وتوصل المتباينة (١) الى نفس المتباينة (٣) وغير ذلك لا يمكن أن تكون المتباينة (٣) محققة الا اذا كان المعامل ح سالبا

ويعلم من ذلك انه لاجل أن تكون الجذور الثلاثة للمعادلة

$$\text{س}^{٣} + \text{ح}\,\text{س} + \text{ك} = ٠$$

حقيقية يلزم ويكفى أن يكون معاملاها محققين للمتباينة

$$\left(\frac{\text{ح}}{٣}\right)^{٣} + \left(\frac{\text{ك}}{٢}\right)^{٢} < ٠$$

فمتى كان الطرف الاول من هذه المتباينة كمية موجبة لا يكون للمعادلة سوى جذر واحد حقيقى ومتى كانت هذه الكمية معدومة يكون للمعادلة جذران متساويان كما شاهدنا فى بـ ٢٤٧ د

(امثلة)

(الاول) المعادلة

$$\text{س}^{٣} + ٥\,\text{س} - ٢ = ٠$$

التى فيها معامل الحد الثانى موجب ليس لها الا جذر واحد حقيقى وهذا الجذر موجب

(الثاني) المعادلة

$$س^٣ - ٦س + ٤ = ٠$$

جذورها الثلاثة حقيقية وحيث ان المعادلة التي يحصل عليها بتغيير س الى − س في هذه المعادلة المفروضة لا تحتوي الا على مغايرة فيكون احد الجذور الثلاثة سالبا ويكون الجذران الآخران موجبين

(الثالث) المعادلة

$$س^٣ - ٦س + ٦ = ٠$$

ليس لها الا جذر واحد حقيقي وهذا الجذر سالب

(الرابع) المطلوب تعيين ابعاد اسطوانة مستديرة قائمة متى علم سطحها الكلي وحجمها

لذلك نفرض انه السطح الكلي هو $٤ ط ح^٢$ وان الحجم $\frac{٤ط ء^٣}{٣}$ ونرمز بحرف س لنصف قطر قاعدة الاسطوانة وبحرف ص لارتفاعها فتوجد المعادلتان

$$ص = \frac{٤ء^٣}{٣س^٢} \quad و \qquad (١)$$

$$س^٣ - ٢ح^٢ س + \frac{٤ء^٣}{٣} = ٠ \qquad (٢)$$

فالمعادلة (٢) لها دائما جذر سالب لا يوافق المسئلة ولاجل ان تكون المسئلة ممكنة يلزم ان يكون للمعادلة (٢) جذر موجب وبناء على ذلك يلزم ان تكون جذورها الثلاثة حقيقية واذن يوجد الشرط

$$ء^٣ < ح^٣ \sqrt{\frac{٢}{٣}}$$

فمتى كان هذا الشرط مستوفيا يكون للمعادلة (٢) جذران موجبان يطابقهما مقداران موجبان للارتفاع ص ويكون للمسئلة حلان ومتى كان $ء^٣ = ح^٣ \sqrt{\frac{٢}{٣}}$ يؤل هذان الحلان الى حل واحد

(تطبيق على المعادلات ذوات الدرجة الرابعة)

بند ٥٠٩ اذا حذف الحد الثاني (بند ٥٠٧) تؤل المعادلة ذات الدرجة الرابعة الى الصورة

$$س^٤$$

$$س^{٤} - ح_{١} س^{٢} + ء_{١} س + هـ_{١} = ٠ \qquad (١)$$

ولنضع $س = \frac{١}{ص}$ فتؤول هذه المعادلة الى

$$هـ_{١} ص^{٤} + ء_{١} ص^{٣} + ح_{١} ص^{٢} + ١ = ٠ \qquad (٢)$$

وبمساواة المشتقة بصفر تحصل المعادلة

$$٤ هـ_{١} ص^{٣} + ٣ ء_{١} ص^{٢} + ٢ ح_{١} ص = ٠$$

أو

$$ص\left(٤ هـ_{١} ص^{٢} + ٣ ء_{١} ص + ٢ ح_{١}\right) = ٠$$

وهذه المعادلة يمكن حلها وحينئذ يمكن معرفة عدد الجذور الحقيقية للمعادلة (٢) وبناء على ذلك يمكن معرفة عدد الجذور الحقيقية للمعادلة المفروضة

بند ٢٦٠ يمكن ايلولة حل أي معادلة ذات درجة رابعة الى حل معادلة ذات درجة ثالثة ولبيان ذلك نلاحظ في أول الامر ان أي كمية كثيرة الحدود بدرجة رابعة هي حاصل ضرب اربعة عوامل بدرجة أولى مثل $(س - ح)(س - ء)(س - هـ)(س - و)$ وحيث ان حاصل ضرب عاملين حيثما اتفق بدرجة أولى مثل $(س - ح)(س - ء)$ يحدث عاملا بدرجة ثانية مثل $س^{٢} + ع س + ك$ فيكون للكمية الكثيرة الحدود ذات الدرجة الرابعة ستة عوامل بدرجة ثانية لكن حيث انه يمكن أخذ هذه العوامل اثنين اثنين فلا يمكن تحليل الكمية الكثيرة الحدود ذات الدرجة الرابعة المذكورة الى حاصل ضرب عاملين بدرجة ثانية الا بثلاث كيفيات

ولتكن المعادلة

$$ء(س) = س^{٤} + ٢ ح_{١} س^{٣} + ء_{١} س^{٢} + ٢ هـ_{١} س + و_{١} = ٠ \qquad (٣)$$

هي المعادلة المفروضة فيمكن ان يوضع

$$\left.\begin{aligned} ء(س) &= \left(س^{٢} + ح_{١} س + ل\right)^{٢} \\ &- \left\{\left(٢ل + ح_{١}^{٢} - ء_{١}\right) س^{٢} + ٢\left(ح_{١} ل - هـ_{١}\right) س + \left(ل^{٢} - و_{١}\right)\right\} \end{aligned}\right\} \qquad (٤)$$

(ل كمية اختيارية) ويمكن تعيين هذه الكمية بحيث تكون الكمية ذات الدرجة الثانية وهي

$$\left(2\text{ل}+\text{ح}_1^2-\text{د}_1\right)\text{س}^2+2\left(\text{ح}_1\text{ل}-\text{ه}_1\right)\text{س}+\left(\text{ل}^2-\text{و}\right)$$

مربعا كاملا ولذلك يكفي ان يوضع

$$\left(\text{ل}^2-\text{و}_1\right)\left(2\text{ل}+\text{ح}_1^2-\text{د}_1\right)-\left(\text{ح}_1\text{ل}-\text{ه}_1\right)^2=0 \qquad (٥)$$

وبذلك يتحصل لاجل تعيين ل على معادلة ذات درجة ثالثة وبكل مقدار من مقادير ل توجد كيفية لوضع المعادلة ذات الدرجة الرابعة بصورة الفرق بين مربعين وهو

$$\left.\begin{aligned}&\text{د}(\text{س})=\left(\text{س}^2+\text{ح}_1\text{س}+\text{ل}\right)^2\\&-\left[\text{س}\sqrt{2\text{ل}+\text{ح}_1^2-\text{د}_1}+\frac{\text{ح}_1\text{ل}-\text{ه}_1}{\sqrt{2\text{ل}+\text{ح}_1^2-\text{د}_1}}\right]^2\end{aligned}\right\} \qquad (٦)$$

وبناء على ذلك توجد كيفية بكل مقدار من مقادير ل لتحليل المعادلة ذات الدرجة الرابعة المذكورة الى حاصل ضرب عاملين بدرجة ثانية وهذان العاملان هما

$$\text{س}^2+\text{ح}_1\text{س}+\text{ل}\pm\left[\text{س}\sqrt{2\text{ل}+\text{ح}_1^2-\text{د}_1}+\frac{\text{ح}_1\text{ل}-\text{ه}_1}{\sqrt{2\text{ل}+\text{ح}_1^2-\text{د}_1}}\right] \qquad (٧)$$

ولاجل حل المعادلة ذات الدرجة الرابعة يكفي حساب أحد جذور المعادلة (٥) ذات الدرجة الثالثة وبمساواة العاملين (٧) المطابقين لهذا الجذر بالصفر تتحصل معادلتان بدرجة ثانية ومنهما تستنتج الجذور الاربعة للمعادلة المفروضة

ومتى كانت معاملات المعادلة (٣) حقيقية تكون معاملات المعادلة (٥) حقيقية كذلك وممـا ينبغي التنبيه عليه هو ان أحد المقادير الحقيقية للكمية ل بالاقل يجعل الكمية $2\text{ل}+\text{ح}_1^2-\text{د}_1$ موجبة لان المعادلة (٥) التي يكون لطرفها الاول مقدار سالب متى عوض ل فيها بالكمية $\frac{\text{د}_1-\text{ح}_1^2}{2}$ لها جذور حقيقية فردية العدد واكبر من $\frac{\text{د}_1-\text{ح}_1^2}{2}$

وبكل

وبكل مقدار للكمية ل ا كبر من $\frac{ء_1 - ح_1^2}{2}$ يحصل على ازدواج عاملين بدرجة ثانية معاملاتهما حقيقية وبكل مقدار حقيقى أقل من $\frac{ء_1 - ح_1^2}{2}$ للكمية ل يحصل على عاملين معاملاتهما تخيلية ومقترنة وبكل مقدار تخيلى للكمية ل يحصل على عاملين معاملاتهما تخيلية كذلك الا انها لا تكون مقترنة لانه حيث ان الجذر $\sqrt{ل^2 + ح_1^2 - ء_1}$ يكون له فى هذه الحالة مقدار تخيلى مثل $ى + ب ع$ جزؤه الحقيقى وهو ى مخالف للصفر فتكون المعاملات $ح_1 \pm ى \pm ب ع$ وهى معاملات القوة الاولى للمجهول س فى العوامل ذوات الدرجة الثانية تخيلية وغير مقترنة

وينتج من ذلك انه اذا كانت الجذور الاربعة للمعادلة (٣) حقيقية بحيث ان جميع العوامل ذوات الدرجة الثانية تكون حقيقية تكون مقادير ل الثلاثة حقيقية وا كبر من $\frac{ء_1 - ح_1^2}{2}$ واذا كانت الجذور الاربعة للمعادلة المذكورة تخيلية بحيث ان ازدواجا من ازدواجات العوامل تكون معاملاته حقيقية وتكون معاملات كل من الازدواجين الآخرين تخيلية ومقترنة فتكون المقادير الثلاثة للكمية ل حقيقية أيضا الا ان واحدا منها يكون أكبر من $\frac{ء_1 - ح_1^2}{2}$ ثم اذا كان للمعادلة جذران حقيقيان وجذران تخيليان بحيث ان ازدواجا من ازدواجات العوامل تكون معاملاته حقيقية وكل من الازدواجين الآخرين تكون معاملاته تخيلية غير مقترنة فيكون مقداران من مقادير ل تخيليين وعكس جميع هذه الاحوال صحيح

(فى المعادلات الثلاثية الحدود)

٢٦١ هذه الطريقة التى استعملناها لاجل ايجاد عدد الجذور الحقيقية للمعادلة ذات الدرجة الثالثة تطبق على المعادلة الثلاثية الحدود وهى

$$س^م + ح_1 س^ن + ء_1 = 0 \qquad (1)$$

لانه اذا أخذت المشتقة تحصل المعادلة

$$\text{م}\,\text{س}^{\text{م}-١} + \text{ه}\,\text{ح}_{١}\,\text{س}^{\text{ه}-١} = ٠$$

أو

$$\text{س}^{\text{ه}-١}\left(\text{م}\,\text{س}^{\text{م}-\text{ه}} + \text{ه}\,\text{ح}_{١}\right) = ٠ \qquad (٢)$$

التي تعرف كيفية ايجاد جذورها الحقيقية

ويمكن كذلك تطبيقها على المعادلة

$$\text{س}^{\text{م}} + \text{ح}_{١}\,\text{س}^{\text{م}-\text{ه}} + \text{ء}_{١}\,\text{س}^{\text{م}-٢\text{ه}} + \text{هـ}_{١} = ٠ \qquad (٣)$$

لانه اذا أخذت المشتقة تحصل المعادلة

$$\text{م}\,\text{س}^{\text{م}-١} + (\text{م}-\text{ه})\,\text{ح}_{١}\,\text{س}^{\text{م}-\text{ه}-١} + (\text{م}-٢\text{ه})\,\text{ء}_{١}\,\text{س}^{\text{م}-٢\text{ه}-١} = ٠$$

أو

$$\text{س}^{\text{م}-٢\text{ه}-١}\left[\text{م}\,\text{س}^{٢\text{ه}} + (\text{م}-\text{ه})\,\text{ح}_{١}\,\text{س}^{\text{ه}} + (\text{م}-٢\text{ه})\,\text{ء}_{١}\right] = ٠ \qquad (٤)$$

التي يمكن حلها

ويمكن ايلولة المعادلة

$$\text{س}^{\text{م}} + \text{ح}_{١}\,\text{س}^{٢\text{ه}} + \text{ء}_{١}\,\text{س}^{\text{ه}} + \text{هـ}_{١} = ٠$$

الى الصورة المتقدمة بان يوضع $\text{س} = \frac{١}{\text{ص}}$

(في نظرية استورم)

ب ٢٦٢ متى علم حل المشتقة فان نظرية رول تكفي لايجاد عدد الجذور الحقيقية للمعادلة لكن اذا لم يعلم حل المشتقة تكون هذه النظرية غير كافية واذذاك يمكن استعمال نظرية استورم التي تحدث في جميع الحالات واسطة لايجاد العدد المضبوط للجذور الحقيقية المحصورة بين عددين معلومين لاى معادلة جبرية

فليكن ء(س) كمية كثيرة الحدود صحيحة ذات معاملات حقيقية وليكن ح جذرا حقيقيا لهذه الكمية الكثيرة الحدود فيمكن تعيين عدد موجب صغير صغرا كافيا مثل ف بحيث ان العددين ح-ف و ح+ف لا ينحصران بينهما جذر الكثيرة الحدود ومشتقتها خلاف ح ولنثبت أولا انه اذا غير س من ح-ف الى ح+ف يكون لكثيرة الحدود ومشتقتها مقادير مختلفة الاشارة قبل الجذر ويكون لهما مقادير متحدة الاشارة بعد الجذر فنقول

انتغير

لنغير سـ من ح الى ح+ف فاذا كانت المشتقة ءَ (سـ) موجبة بمقادير سـ المحصورة بين هذين العددين تكون الدالة ء(سـ) متزائدة وحيث انها تبتدئ بالصفر فتكون موجبة بمقادير سـ المحصورة بين ح و ح+ف واذا كانت المشتقة سالبة تصير الدالة متناقصة وحيث انها تبتدئ بالصفر فتكون سالبة بمقادير سـ المحصورة بين ح و ح+ف ويعلم من ذلك انه اذا غير سـ من ح الى ح+ف تكون الدالة ومشتقتها متحدتين فى الاشارة ولنغير الآن سـ من ح-ف الى ح فاذا كانت المشتقة ءَ(سـ) موجبة بمقادير سـ المحصورة بين هذين العددين تكون الدالة ء(سـ) متزائدة وحيث انها تنتهى بالصفر فتكون سالبة بمقادير سـ المحصورة بين ح-ف و ح واذا كانت المشتقة سالبة تصير الدالة متناقصة وحيث انها تنتهى بالصفر فتكون موجبة بمقادير سـ المحصورة بين ح-ف و ح ويعلم من ذلك انه متى غير سـ من ح-ف الى ح تكون الدالة ومشتقتها مختلفتين فى الاشارة

بـ ٢٦٣ د (الحالة التى لا يكون فيها المعادلة جذور متساوية) لنعتبر أولا الحالة التى لا يكون فيها الكثيرة الحدود ء(سـ) سوى جذور بسيطة ولنرمز بحرف س لهذه الكمية الكثيرة الحدود مرتبة على حسب القوى المتنازلة لحرف سـ ونرمز بالرمز $س_{١}$ لمشتقتها ولنقسم س على $س_{١}$ ونرمز بحرف $ح_{١}$ للخارج وبحرف $س_{٢}$ للباقى مأخوذا باشارة مغايرة ولنقسم $س_{١}$ على $س_{٢}$ ونرمز بحرف $ح_{٢}$ للخارج وبحرف $س_{٣}$ للباقى مأخوذا باشارة مغايرة لاشارته وهلم جرا وسلسلة العمليات هذه هى التى تجرى لايجاد القاسم المشترك الاعظم بين كثيرتى الحدود س و $س_{١}$ وحيث ان هاتين الكميتين الكثيرتى الحدود أوليتان مع بعضهما (بـ ٢٤٥ د) فيتوصل بعد عدة عمليات قسمة الى باق غير متعلق بحرف سـ فلنرمز لهذا الباقى الاخير مأخوذا باشارة مخالفة لاشارته بالرمز $س_{ك}$ فنجد أن

$$س = س_{١} ح_{١} - س_{٢} \quad و$$

$$س_{١} = س_{٢} ح_{٢} - س_{٣} \quad و$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad و$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad و$$

$$س_{ك-٢} = س_{ك-١} ح_{ك-١} - س_{ك}$$

ولنعتبر تتابع الكميات الكثيرة الحدود وهى

$$س \;و\; س_1 \;و\; س_2 \;و\; \ldots \;و\; س_ك$$

فأقول انه اذا أعطى لحرف سـ فى هذا التتابع مقداران حقيقيان مخصوصان مثل سـ و سـ١ (سـ أقل من سـ١) على التوالى وعدت المغايرات التى تحتوى عليها سلسلة الكميات المذكورة يكون عدد المغايرات التى تنقص متى مر من سـ الى سـ١ دالا بالضبط على عدد الجذور الحقيقية المحصورة بين النهايتين سـ و سـ١

ولاثبات ذلك نزيد سـ بكيفية مستمرة من سـ الى سـ١ فنقول انه لا يمكن ان يحصل تغير فى عدد المغايرات الا اذا تغيرت اشارة احدى الكميات الكثيرة الحدود وبناء على ذلك لا يحصل هذا التغير الا اذا مرت احدى الكميات المذكورة بالصفر ولننبه فى أول الامر على ان أى كميتين كثيرتى الحدود متواليتين مثل $س_{ه-1}$ و $س_ه$ لا يمكن ان ينعدما بمقدار واحد لحرف سـ لانه اذا حصل ذلك فبموجب الارتباط

$$س_{ه-1} = س_ه \, ع_ه - س_{ه+1}$$

تنعدم الكمية $س_{ه+1}$ التالية كذلك وكذلك تنعدم الكميات الكثيرة الحدود وهى $س_{ه+2}$ و $س_{ه+3}$ و ... و $س_ك$ وهذا غير ممكن حيث كانت الكمية الكثيرة الحدود وهى $س_ك$ غير متعلقة بحرف سـ

ولنفرض الآن أن كمية كثيرة الحدود متوسطة ولتكن $س_ه$ تتغير اشارتها متى مر سـ بالمقدار حـ فيكون لكثيرتى الحدود $س_{ه-1}$ و $س_{ه+1}$ مقداران مخالفان للصفر ويكون هذان المقداران مختلفين فى الاشارة لانه عندما يكون سـ = حـ تؤول المتساوية المتقدمة الى

$$س_{ه-1} = - س_{ه+1}$$

وحيث انه يمكن أخذ حـ صغيرا صغرا كافيا بحيث انه اذا غير سـ من حـ ـ ف الى حـ + ف تكون كلتا كثيرتى الحدود وهما $س_{ه-1}$ و $س_{ه+1}$ حافظة لاشارة واحدة فحينئذ تكون هاتان الكميتان الكثيرتا الحدود مختلفتين فى الاشارة بمقادير سـ المحصورة

المحصورة بين حـ - ف , حـ + ف ومن الواضح انه مهما كانت اشارتا كثيرة الحدود
س بمقداري سـ وهما سـ = حـ - ف , سـ = حـ + ف يكون تتابع الثلاث
كميات الكثيرة الحدود وهي

$$س_{ك-1} \ , \ س_{ك} \ , \ س_{ك+1}$$

محتويا بكل مقدار من مقداري سـ هذين على مغايرة واحدة لا غير انما يمكن ان يتغير
وضع هذه المغايرة ويعلم من ذلك ان عدد المغايرات التي يحتوي عليها تتابع الكميات
الكثيرة الحدود لا يتغير متى تغيرت اشارة احدى الكميات الكثيرة الحدود
المتوسطة وحيث ان الكمية الاخيرة وهي $س_{ك}$ الغير المتعلقة بحرف سـ تكون حافظة
لاشارة واحدة على الدوام فاذن لا يتغير عدد مغايرات التتابع الا اذا تغيرت اشارة
الكمية الكثيرة الحدود الاولى وهي س

لكن قد شاهدنا انه اذا مر سـ بجذر مثل حـ لكثيرة الحدود س تكون هذه الكمية
الكثيرة الحدود ومشتقتها مختلفتين في الاشارة قبل الجذر بمقدار يسير ومتحدتين
في الاشارة بعده بمقدار يسير فحينئذ تنقص مغايرة في رأس تتابع الكميات الكثيرة
الحدود ومثل هذا يحصل كلما مر سـ بجذر من جذور الكمية الكثيرة الحدود
ويعلم من ذلك ان عدد المغايرات التي تنقص من تتابع الكميات الكثيرة الحدود متى
مر من المقدار $سـ_{0}$ الى المقدار الاكبر وهو $سـ_{1}$ يكون مساويا للعدد الجذر الحقيقية
المحصورة بين $سـ_{0}$ و $سـ_{1}$

بند ٢٦٤ فاذا أريد الحصول على العدد الكلي للجذور الحقيقية لكثيرة الحدود س
لزم أن يجعل سـ = $-\infty$ في تتابع الكميات الكثيرة الحدود وان يحسب عدد
المغايرات ثم يجعل سـ = $+\infty$ ويحسب عدد المغايرات فيكون عدد المغايرات الناقصة
مساويا للعدد الجذور الحقيقية لكن نعلم انه اذا أعطي لحرف سـ عدد مقداره المطلق
كبير جدا تكون اشارة كل كمية كثيرة الحدود عين اشارة حدها الاول واذن يمكن عند
تطبيق هذه الطريقة تعويض كل كمية كثيرة الحدود بحدها الاول

ولنبحث عن الشروط التي بها تكون جميع جذور أي كمية كثيرة الحدود صحيحة وبدرجة
م مثل س حقيقية فحيث ان درجات كثيرات الحدود المتتالية تتناقص من ابتداء
م الى الصفر فيكون عدد كثيرات الحدود المكون منها التتابع مساويا في الغاية للعدد

م+١ وبناء على ذلك يكون عدد المغايرات التى يحتوى عليها تتابع الكميات الكثيرة الحدود بمقدار مخصوص لحرف سه مساويا فى الغاية لعدد م ولاجل أن تكون جميع الجذور التى عددها م للكمية الكثيرة الحدود س حقيقية يلزم انه اذا جعل سه = − ∞ يكون تتابع الكميات الكثيرة الحدود محتويا على مغايرات عددها م ولذا يلزم أولا أن يكون تتابع الكميات الكثيرة الحدود تاما أعنى أن تكون درجة كل كمية كثيرة الحدود أقل بواحد من درجة الكمية الكثيرة الحدود السابقة لها وثانيا أن تكون جميع الحدود الاول مسبوقة باشارة واحدة كاشارة + مثلا كى انه اذا جعل سه = − ∞ توجد مغايرة بين كل كميتين كثيرتى حدود متواليتين وغير ذلك فهذه الشروط كافية لانها اذا كانت مستوفية لا يكون تتابع الكميات الكثيرة الحدود محتويا على مغايرات مطلقا عندما يجعل سه = + ∞ ويكون عدد المغايرات الناقصة هو م

مثلا لنعتبر المعادلة ذات الدرجة الثالثة وهى

$$\text{سه}^{٣} + \text{ح}\,\text{سه} + \text{ك} = ٠$$

فنجد تتابع الكميات الكثيرة الحدود وهو

$$\text{س} = \text{سه}^{٣} + \text{ح}\,\text{سه} + \text{ك} \text{ ،} \qquad \text{و}$$

$$\text{س}_{١} = ٣\,\text{سه}^{٢} + \text{ح} \qquad \text{و}$$

$$\text{س}_{٢} = -\frac{٢\,\text{ح}}{٣}\,\text{سه} - \text{ك} \qquad \text{و}$$

$$\text{س}_{٣} = -\frac{٤\,\text{ح}^{٣} + ٢٧\,\text{ك}^{٢}}{٤\,\text{ح}^{٢}}$$

وتكون الجذور الثلاثة للمعادلة حقيقية اذا احتوى التتابع على ثلاث مغايرات حينما يجعل سه = − ∞ ولم يحتو على مغايرات مطلقا حينما يجعل سه = + ∞ ولذا يلزم أن يكون ح < ٠ وان يكون $٤\text{ح}^{٣} + ٢٧\text{ك}^{٢} < ٠$ وحينئذ يوجد الشرط الذى تحصلنا عليه سابقا بواسطة نظرية رول (بـ ٢٥٨ د)

بـ ٢٦٥ د (تنبيه أول) لاجل اجتناب المعاملات الكسرية يمكن ضرب كل مقسوم فى عدد ثابت كما ذكرنا عند البحث عن القاسم المشترك الاعظم (بـ ٢٤٢ د) الا انه يلزم هنا أن يكون المضروب فيه موجبا كى لا تتغير اشارات كثيرات الحدود التى يجب اعتبارها

ويمكن

ويمكن كذلك قسمة جميع حدود أي كمية كثيرة الحدود على عدد موجب مثلا لتكن المعادلة

$$س = س^{٥} - ٥س^{٣} + ١٠س^{٢} - ١٥س + ١٦ = ٠$$

فبقسمة المشتقة وهي

$$٥س^{٤} - ١٥س^{٢} + ٢٠س - ١٥$$

على ٥ يمكن تعويضها بكثيرة الحدود الابسط منها وهي

$$س_{١} = س^{٤} - ٣س^{٢} + ٤س - ٣$$

ويكون باقي القسمة الاولى قابلا للقسمة على ٢ وبتغيير الاشارات يحدث

$$س_{٢} = س^{٣} - ٣س^{٢} + ٦س - ٨$$

وبالقسمة الثانية يحدث باق بدرجة أولى يكون من بعد تغيير اشارات حدوده هو

$$س_{٣} = ٢س - ٧$$

وفي القسمة الاخيرة يضرب المقسوم ثلاث مرات متتالية في ٢ لاجل اجتناب المعاملات الكسرية ويكون الباقي من بعد تغيير اشارات حدوده هو

$$س_{٤} = -١٥٣$$

وحيث ان تتابع الكميات الكثيرة الحدود يحتوي على مغايرتين حينما يجعل $س = -\infty$ وعلى مغايرة واحدة حينما يجعل $س = +\infty$ فلا يكون للمعادلة المفروضة سوى جذر واحد حقيقي ويكون هذا الجذر سالبا

بند ٢٦٦ (تنبيه ثان) متى توصل بعد عدة عمليات قسمة متتالية الى كمية كثيرة الحدود مثل $س_{ل}$ حافظة لاشارة واحدة متى غير س من $س_{٠}$ الى $س_{١}$ لا يجدي استمرار الحساب نفعا ولاجل ايجاد عدد الجذور الحقيقية المحصورة بين $س_{٠}$ و $س_{١}$ تطبق القاعدة المنطوق بها على تتابع الكميات الكثيرة الحدود وهو

$$س \text{ و } س_{١} \text{ و } س_{٢} \text{ و } \ldots \text{ و } س_{ل}$$

لانه يفرض فقط عند اقامة الدليل ان الكمية الكثيرة الحدود الاخيرة لا تتغير اشارتها بمقادير س المحصورة بين $س_{٠}$ و $س_{١}$

مثلا لنأخذ المعادلة

$$\text{س} = \text{سـ}^{5} - 3\text{سـ}^{3} + \text{سـ}^{2} - 8\text{سـ} - 10 = 0$$

فيكون
$$\text{س}_{1} = 5\text{سـ}^{4} - 9\text{سـ}^{2} + 2\text{سـ} - 8$$

وبعمليتى القسمة الاوليين يوجد أن

$$\text{س}_{2} = 6\text{سـ}^{3} - 3\text{سـ}^{2} + 32\text{سـ} + 50 \quad \text{و}$$

$$\text{س}_{3} = 413\text{سـ}^{2} + 636\text{سـ} + 346$$

و يعلم مباشرة ان جذرى هذه الكمية الكثيرة الحدود الاخيرة التى بدرجة ثانية تخيليان وبناء على ذلك تكون اشارتها دائما عين أشارة حدها الاول وحينئذ لا يلزم استمرار الحساب وحيث ان تتابع الكميات الكثيرة الحدود س و س_{1} و س_{2} و س_{3} يحتوى على ثلاث مغايرات حينما يجعل سـ = − ∞ وعلى مغايرة واحدة حينما يجعل سـ = ٠ ولا يحتوى على مغايرات مطلقا حينما يجعل سـ = + ∞ فيستنتج من ذلك ان المعادلة المفروضة لها ثلاثة جذور حقيقية اثنان منها سالبان و واحد موجب

بند ٢٦٧ (الحالة التى يكون فيها للمعادلة جذور متساوية) قد فرضنا الى الآن انه ليس للمعادلة جذور متساوية فان كان لها جذور متساوية لا توصل المعادلة الى باق غير متعلق بحرف سـ بل توصل الى باق معدوم ويكون المقسوم عليه الاخير وليكن $\text{س}_{ك}$ هو القاسم المشترك الاعظم الجبرى بين كثيرة الحدود س ومشتقتها س_{1} وتكون هذه الكمية الكثيرة الحدود الاخيرة وهى $\text{س}_{ك}$ قاسمة لكل من الكميات الكثيرة الحدود وهى

$$\text{س} \;\text{و}\; \text{س}_{1} \;\text{و}\; \text{س}_{2} \;\text{و}\; \cdots \;\text{و}\; \text{س}_{ك-1} \;\text{و}\; \text{س}_{ك}$$

فاذا تصورنا اجراء عمليات القسم هذه يتكون من الخوارج تتابع وهو

$$\text{ص} \;\text{و}\; \text{ص}_{1} \;\text{و}\; \text{ص}_{2} \;\text{و}\; \cdots \;\text{و}\; \text{ص}_{ك-1} \;\text{و}\; 1$$

يمكن اعادة الادلة المتقدمة عليه ولننبه فى أول الامر على ان أى كميتين كثيرتى حدود متواليتين مثل $\text{ص}_{هـ-1}$ و $\text{ص}_{هـ}$ لا يمكن ان تنعدما فى آن واحد لانه اذا قسمت المتساوية

$\text{س}_{هـ-1}$

$$س_{ه-١} = س_{ه} ع_{ه} - س_{ه+١}$$

على ص$_{ك}$ يستنتج أن

$$ص_{ه-١} = ص_{ه} ع_{ه} - ص_{ه+١}$$

فاذا فرض ان كثيرتى الحدود ص$_{ه-١}$, ص$_{ه}$ تنعدمان بمقدار واحد لحرف سه تنعدم كذلك كثيرة الحدود التالية لهما وهى ص$_{ه+١}$ وكذلك تنعدم كثيرات الحدود ص$_{ه+٢}$, ص$_{ه+٣}$, ... , ص$_{ك}$ أى ١ وهذا مستحيل ثم لننبه على انه اذا تغيرت اشارة كمية كثيرة حدود متوسطة مثل ص$_{ه}$ متى مر سه بالمقدار ح فحيث ان بهذا المقدار يكون

$$ص_{ه-١} = - ص_{ه+١}$$

فيكون لكثيرتى الحدود ص$_{ه-١}$, ص$_{ه+١}$ مقداران مخالفان للصفر ومختلفان فى الاشارة بكل مقدار يعطى الى سه بحيث يكون محصورا بين ح-ف , ح+ف وينتج من ذلك انه مهما كانت اشارتا كثيرة الحدود ص$_{ه}$ بالمقدارين سه=ح-ف , سه=ح+ف يكون تتابع الثلاثة كميات الكثيرة الحدود وهو

$$ص_{ه-١} , ص_{ه} , ص_{ه+١}$$

محتويا بكل مقدار من مقدارى سه هذين على مغايرة واحدة لا غير والغاية تغير وضع هذه المغايرة

وينتج من ذلك كما سبق ان عدد مغايرات التتابع الثانى لا يتغير متى تغيرت اشارة كمية كثيرة حدود متوسطة وحيث ان كثيرة الحدود الاخيرة وهى ص$_{ك}$ أى ١ تكون حافظة لاشارة واحدة دائما فحينئذ لا يتغير عدد المغايرات الا اذا تغيرت اشارة الكمية الكثيرة الحدود الاولى وهى ص

ونعلم ان القاسم المشترك الاعظم سه$_{ك}$ بين كمية كثيرة الحدود س ومشتقتها س$'$ يساوى حاصل ضرب العوامل الاولية لكثيرة الحدود س منقوصا اس كل منها واحد

وحينئذ اذا قسمت كثيرة الحدود س على هذا القاسم المشترك الاعظم وهو سَ‌ك يكون خارج القسمة كمية كثيرة الحدود ص مساوية لحاصل ضرب جميع العوامل الاولية التي تتركب منها كثيرة الحدود س محوّلا اس كل منها الى الواحد مثلا لتكن الكمية

س = (سـ − حـ)^ه (سـ − ء)^ك ....

فيكون سَ‌ك = ± (سـ − حـ)^(ه−١) (سـ − ء)^(ك−١) .... و

ص = س ÷ سَ‌ك = ± (سـ − حـ) (سـ − ء) ....

ويكون للمعادلة ص = ٠ جميع جذور المعادلة س = ٠ ولا يكون لها جذور غيرها الا ان كلا منها يكون مأخوذا بصفة جذر بسيط

ومع أن كثيرة الحدود ص التي هي خارج قسمة س على سَ‌ك ليست هي مشتقة صَ غير ان كثيرتي الحدود ص و صَ الموضوعتين في رأس التتابع الثاني لهما نفس الخاصية التي لكثيرتي الحدود س و سَ الموضوعتين في رأس التتابع الاول أعني انه متى مر سـ بجذر مثل حـ تكون هاتان الكميتان الكثيرتا الحدود مختلفتين في الاشارة قبل الجذر بقليل ومتحدتين في الاشارة بعده بقليل لانه حيث انه حينما يكون سـ = حـ − ف يكون لكثيرتي الحدود س و سَ مقداران مختلفان في الاشارة فيكون لخارجي قسمتهما وهما ص و صَ على كمية واحدة مخالفة للصفر مثل سَ‌ك مقداران مختلفان في الاشارة كذلك وحيث انه حينما يكون سـ = حـ + ف يكون لكثيرتي الحدود س و سَ مقداران متحدان في الاشارة فيكون للخارجين ص و صَ مقداران متحدان في الاشارة كذلك ويعلم من ذلك انه متى مر سـ بجذر مثل حـ تنقص مغايرة في رأس التتابع الثاني وحيث ان مثل ذلك يحصل متى مر سـ بكل جذر فيستنتج من ذلك ان عدد المغايرات التي تنقص متى مر سـ من مقدار مثل سـ الى مقدار اكبر مثل سـَ يكون مساويا بالعدد الجذور الحقيقية المحصورة بين سـ و سـَ

لكن

لكن يمكن الاستغناء عن تكوين التتابع الثانى وتطبيق القاعدة المنطوق بها على نفس التتابع الاول لانه اذا اعتبر التتابعان

$$س و س_١ و س_٢ و ... و س_{ك-١} و س_ك و$$

$$ص و ص_١ و ص_٢ و ... و ص_{ك-١} و ١$$

وأعطى لحرف س مقدار مخصوص مثل سـ مخالف لكل من الجذور فانه يتحصل على مقادير كثيرات الحدود المكونة للتتابع الثانى بقسمة مقادير كثيرات الحدود المكونة للتتابع الاول على عدد واحد مخالف للصفر وهو مقدار كثيرة الحدود $س_ك$ فاذا كان هذا المقسوم عليه موجبا تكون جميع الاشارات باقية على ماهى عليه واذا كان سالبا تتغير جميع هذه الاشارات وعلى كل حال يكون عدد المغايرات التى يحتوى عليها تتابعا المقادير ثابتا وبناء على ذلك يكون عدد المغايرات التى تنقص متى مر سـ من سـ الى سـ متحدا فى كل من التتابعين ويعلم من ذلك ان نظرية استورم يمكن تطبيقها على تتابع كثيرات الحدود وهو

$$س و س_١ و س_٢ و ... و س_ك$$

سواء كان للمعادلة س=٠ جذور متساوية أولا ويكون عدد المغايرات التى تنقص متى مر سـ من سـ الى سـ دالا على عدد الجذور الحقيقية المختلفة المحصورة بين سـ و سـ واذا كان للمعادلة جذور متساوية لا يكون كل جذر مضاعف معدودا سوى مرة واحدة وبعبارة اخرى لا تكون درجة تضعيف الجذور معتبرة ومع ذلك فانه اذا وصلت العملية الى قاسم مشترك اعظم جبرى بين كثيرة الحدود س ومشتقاتها يهتم كما أوضحنا فى بـ ٢٤٩ د بتحويل حل المعادلة المفروضة وهى س=٠ الى حل معادلات درجاتها اخفض من درجة المعادلة المفروضة ولا يكون لهذه المعادلات سوى جذور بسيطة ثم تطبق نظرية استورم على هذه المعادلات ان لزم ذلك

(أمثلة)

(الاول) المطلوب تقسيم نصف كرة الى قسمين متكافئين بمستو مواز للقاعدة

(الثانى) المطلوب تعيين ابعاد منشور قائم قاعدته مربع من بعد معرفة سطحه الكلى

وحجمه

(الثالث) المطلوب رسم مخروط داخل كرة من بعد معرفة حجمه

(الرابع) المطلوب تعيين مثلث من بعد معرفة ابعاد مركز الدائرة المرسومة داخله عن رؤسه أو ابعاد مركز الدائرة المرسومة عليه عن اضلاعه الثلاثة

(الخامس) المطلوب ان يعد من رؤس مثلث ثلاثة مستقيمات تمر بنقطة واحدة وتحدد على الاضلاع ثلاثة أجزاء متساوية غير متتالية

(السادس) المطلوب رسم قطعة كرة يكون حجمها معلوما وتكون قاعدتها دائرة معلومة

(السابع) المطلوب رسم مثلث متساوى الساقين داخل كرة معلومة بحيث يكون مسطحه مساويا لكمية معلومة

(الثامن) المطلوب تعيين اضلاع مثلث قائم الزاوية من بعد معرفة مجموع ضلعى القائمة والمساحة الجسمية للجسم المتولد من دوران المثلث حول الوتر

(الباب الرابع)
فى حل المعادلات

(الفصل الاول)
فى نهايات الجذور

بند ٢٦٨ من المهم عندما يراد حساب الجذور الحقيقية لمعادلة مثل ء (س) = ٠ ان تعين فى أول الامر كميتان تكون جميع هذه الجذور محصورة بينهما وكل عدداً كبر من أكبر جذر موجب يسمى نهاية كبرى لجذور المعادلة واذا بحث عن نهاية كبرى للجذور الموجبة للمعادلة ء (ـ س) = ٠ التى يتحصل عليها بتغيير س الى ـ س فى المعادلة المفروضة وهى ء(س) = ٠ تحصل نهاية صغرى لجذور المعادلة المفروضة بحيث ان جميع جذور هذه المعادلة تكون محصورة بين هاتين النهايتين

والطرق الاولى التى نذكرها لتعيين النهاية الكبرى للجذور الموجبة مؤسسة على النظرية الآتية وهى

(نظرية اولى) اذالم تشتمل أى كمية كثيرة الحدود صحيحة مرتبة على حسب القوى التنازلية لمتغير س ومعامل حدها الاول موجب الاعلى مغايرة واحدة وعوض س

بعدد

بعد ذه موجب وليكن ح وكان مقدار كثيرة الحدود موجبا أقول ان كثيرة الحدود تأخذ مقادير متزائدة على الدوام متى تزايد س الى أن وصل الى ح
ولاثبات ذلك نفرض ان

$$\text{د}(\text{س})=\text{ج}\,\text{س}^{\text{م}}+\text{ج}_{١}\text{س}^{\text{م}-١}+\text{ج}_{٢}\text{س}^{\text{م}-٢}+\cdots-\text{ج}_{\text{ه}}\text{س}^{\text{م}-\text{ه}}-\text{ج}_{\text{ه}+١}\text{س}^{\text{م}-\text{ه}-١}\cdots$$

كمية كثيرة الحدود من هذا القبيل فيمكننا ان نضعها بالصورة

$$\text{د}(\text{س})=\text{س}^{\text{م}-\text{ه}}\left[\text{ج}\,\text{س}^{\text{ه}}+\text{ج}_{١}\text{س}^{\text{ه}-١}+\cdots-\left(\text{ج}_{\text{ه}}+\text{ج}_{\text{ه}+١}\frac{١}{\text{س}}+\text{ج}_{\text{ه}+٢}\frac{١}{\text{س}^{٢}}+\cdots\right)\right]$$

ولنضع

$$\text{ع}=\text{ج}\,\text{س}^{\text{ه}}+\text{ج}_{١}\text{س}^{\text{ه}-١}+\cdots$$

$$\text{ك}=\text{ج}_{\text{ه}}+\text{ج}_{\text{ه}+١}\frac{١}{\text{س}}+\text{ج}_{\text{ه}+٢}\frac{١}{\text{س}^{٢}}+\cdots$$

فيكون $\text{د}(\text{س})=\text{س}^{\text{م}-\text{ه}}(\text{ع}-\text{ك})$

فاذا أعطى للتغير س مقادير موجبة تكبر شيأ فشيأ تتزايد الكمية الاولى وهى ع من الكميتين الموجبتين وهما ع , ك وتتناقص الثانية منهما وحينئذ يتزايد فرقهما وهو ع ـ ك وبناء على ذلك اذا كان هذا الفرق موجبا حينما يكون س = ح فانه يأخذ مقادير موجبة تكبر شيأ فشيأ بمقادير س المتزائدة من ابتداء ح وحيث ان العامل الموجب وهو $\text{س}^{\text{م}-\text{ه}}$ يكون متزائدا فيأخذ الحاصل $\text{س}^{\text{م}-\text{ه}}(\text{ع}-\text{ك})$ مقادير موجبة تكبر شيأ فشيأ وهذا هو ما أردنا اثباته

بند ٢٦٩ د (الطريقة الاولى) لتكن

$$\text{د}(\text{س})=\text{س}^{\text{م}}+\text{ج}_{١}\text{س}^{\text{م}-١}+\text{ج}_{٢}\text{س}^{\text{م}-٢}+\cdots+\text{ج}_{\text{م}}=٠$$

معادلة معاملاتها حقيقية ومعامل حدها الاول موجب ولنفرض ان $-\text{ه}_{١}$ هو أكبر المعاملات السالبة فى المقدار المطلق فيمكننا ان نضع الطرف الاول للمعادلة بالصورة

$$\text{د}(\text{س})=\text{س}^{\text{م}}-\text{ه}_{١}\text{س}^{\text{م}-١}-\text{ه}_{١}\text{س}^{\text{م}-٢}-\cdots-\text{ه}_{١}$$

$$+(\text{ج}_{١}+\text{ه}_{١})\text{س}^{\text{م}-١}+(\text{ج}_{٢}+\text{ه}_{١})\text{س}^{\text{م}-٢}+\cdots+(\text{ج}_{\text{م}}+\text{ه}_{١})$$

ولنضع

$$د_1(س) = س^{م} - ه_1 س^{م-1} - ه_1 س^{م-2} - \cdots - ه_1$$ و

$$د_2(س) = (ه_1 + ج_1) س^{م-1} + (ه_1 + ج_2) س^{م-2} + \cdots + (ه_1 + ج_م)$$

فيحدث

$$د(س) = د_1(س) + د_2(س)$$

وحيث كانت جميع معاملات كثيرة الحدود $د_2(س)$ موجبة فتأخذ مقادير موجبة متزائدة بالمقادير الموجبة المتزائدة للمتغير س وحيث ان كثيرة الحدود $د_1(س)$ معامل حدها الاول موجب ولا تحتوى الا على مغايرة واحدة فتأخذ بموجب النظرية المتقدمة مقادير موجبة تكبر شيأ فشيأ متى تزايد س من ابتداء عدد موجب وليكن ح يجعل هذه الكمية موجبة ومن الواضح ان كثيرة الحدود د(س) التى هى مجموع كثيرى الحدود السابقتين يكون لها هذه الخاصية وبناء على ذلك يكون العدد ح نهاية كبرى للجذور الموجبة للمعادلة المفروضة ويعلم من ذلك انه يتحصل على نهاية كبرى للجذور الموجبة للمعادلة المفروضة بالبحث عن عدد موجب ح يجعل كثيرة الحدود $د_1(س)$ موجبة وحيث ان

$$د_1(س) = س^{م} - ه_1(س^{م-1} + س^{م-2} + \cdots + 1)$$

$$= س^{م} - \frac{ه_1(س^{م} - 1)}{س - 1} = \frac{س^{م}(س - 1 - ه_1) + ه_1}{س - 1}$$

فيكفى أخذ ح = ه$_1$ + ١

بند ٢٧٠ (الطريقة الثانية) متى كان معامل الحد الذى بدرجة م-١ موجبا أو معدوما أمكن على العموم ايجاد نهاية أصغر جدا من النهاية المتقدمة ولبيان ذلك نفرض أن م-ه درجة أول حد سالب ثم نضع الطرف الاول من المعادلة بالصورة

$$د(س) = س^{م} - ه_1 س^{م-ه} - ه_1 س^{م-ه-1} - \cdots - ه_1$$

$$+ ج_1 س^{م-1} + \cdots + (ه_1 + ج_ه) س^{م-ه} + \cdots + (ه_1 + ج_م)$$

فاذا

فاذا وضعنا

$$\text{ء}_{1}(\text{س})=\text{س}^{\text{م}}-\text{ه}_{1}\text{س}^{\text{م}-\text{ه}}-\text{ه}_{1}\text{س}^{\text{م}-\text{ه}-1}-\cdots-\text{ه}_{1}\quad\text{و}$$

$$\text{ء}_{2}(\text{س})=\text{ج}_{1}\text{س}^{\text{م}-1}+\cdots+(\text{ه}_{1}+\text{ج}_{\text{ه}})\text{س}^{\text{م}-\text{ه}}+\cdots+(\text{ه}_{1}+\text{ج}_{\text{م}})$$

يحدث

$$\text{ء}(\text{س})=\text{ء}_{1}(\text{س})+\text{ء}_{2}(\text{س})$$

وكما سبق تكون كثيرة الحدود المفروضة وهى $\text{ء}(\text{س})$ مجموع كميتين كثيرتى الحدود احداهما $\text{ء}_{2}(\text{س})$ التى جميع معاملاتها موجبة واخراهما $\text{ء}_{1}(\text{س})$ التى معامل حدها الاوّل موجب ولا تحتوى الا على مغايرة واحدة وحينئذ يكفى ان يبحث عن عدد موجب ح يجعل كثيرة الحدود $\text{ء}_{1}(\text{س})$ موجبة ولذلك نعلم أن

$$\text{ء}_{1}(\text{س})=\text{س}^{\text{م}}-\text{ه}_{1}(\text{س}^{\text{م}-\text{ه}}+\text{س}^{\text{م}-\text{ه}-1}+\cdots+1)$$

$$=\text{س}^{\text{م}}-\frac{\text{ه}_{1}(\text{س}^{\text{م}-\text{ه}+1}-1)}{\text{س}-1}=\frac{\text{س}^{\text{م}-\text{ه}+1}\left\{\text{س}^{\text{ه}-1}(\text{س}-1)-\text{ه}_{1}\right\}+\text{ه}_{1}}{\text{س}-1}$$

فاذا فرضنا ان المتغير س أكبر من الواحد تكون الكمية $\text{س}^{\text{ه}-1}(\text{س}-1)-\text{ه}_{1}$ أكبر من $(\text{س}-1)^{\text{ه}}-\text{ه}_{1}$ وحينئذ تكون كثيرة الحدود $\text{ء}_{1}(\text{س})$ موجبة بالمقدار

$$\text{ح}=1+\sqrt[\text{ه}]{\text{ه}_{1}}$$

مثلا لنأخذ المعادلة

$$\text{س}^{7}+4\text{س}^{6}-10\text{س}^{5}-13\text{س}^{4}+7\text{س}^{3}+12\text{س}^{2}-9=0$$

فالمعامل السالب الذى مقداره المطلق أكبر هو -13 وأوّل معامل سالب هو معامل الحد المحتوى على س^{5} وهنا $\text{ه}=2$ وبواسطة القانون $\text{ح}=1+\sqrt[\text{ه}]{\text{ه}_{1}}$ يوجد $1+\sqrt{13}$
وحينئذ يكون عدد ٥ نهاية كبرى للجذور الموجبة
والمعادلة التى يتحصل عليها بتغيير س الى $-$س وهى

$$\text{س}^{٧} - ٤\text{س}^{٦} - ١٠\text{س}^{٥} + ١٣\text{س}^{٤} + ٧\text{س}^{٣} - ١٢\text{س}^{٢} + ٩ = ٠$$

فيها أكبر معامل سالب في المقدار المطلق هو −١٢ وبواسطة القانون $\text{ح} = ١ + \text{ص}_{١}$ توجد النهاية الكبرى وهي ١٣ للجذور الموجبة لهذه المعادلة وحينئذ تكون الجذور الحقيقية للمعادلة المفروضة محصورة بين −١٣ و +٥

بند ٢٧١ (الطريقة الثالثة) متى لم يشتمل الطرف الاول للمعادلة التي نفرض دائما ان معاملها الاول موجب الاعلى مغايرة واحدة لا يكون للمعادلة سوى جذر موجب فمتى تغير س من ابتداء الصفر الى هذا الجذر تكون كثيرة الحدود سالبة ومن أول الجذر تأخذ كثيرة الحدود مقادير موجبة تكبر شيأ فشيأ ويعلم من ذلك ان كل عدد موجب ح يجعل كثيرة الحدود موجبة يكون نهاية كبرى

وفي الحالة العمومية تقسم كثيرة الحدود الى عدة سلاسل من الحدود مرتبة على حسب القوى التنازلية لحرف س بحيث يكون الحد الاول من كل سلسلة موجبا ولا تحتوي كل سلسلة الاعلى مغايرة واحدة في الغاية ثم يبحث عن عدد موجب ح يجعل كل سلسلة من هذه السلاسل موجبة فمتى تزايد س من ابتداء ح تأخذ كل سلسلة مقادير موجبة متزائدة ويكون مجموعها متزائدا وحينئذ يكون هذا العدد وهو ح نهاية كبرى للجذور الموجبة للمعادلة المفروضة

مثلا لتكن المعادلة

$$\text{س}^{٦} - ٢\text{س}^{٥} + ٤\text{س}^{٤} - ١٠\text{س}^{٣} + ٥\text{س}^{٢} - ١٠\text{س} - ٦ = ٠$$

فنقسم الطرف الاول الى ثلاث سلاسل هكذا

$$(\text{س}^{٦} - ٢\text{س}^{٥}) + (٤\text{س}^{٤} - ١٠\text{س}^{٣}) + (٥\text{س}^{٢} - ١٠\text{س} - ٦) = ٠$$

أو

$$\text{س}^{٥}(\text{س} - ٢) + ٢\text{س}^{٣}(٢\text{س} - ٥) + (٥\text{س}^{٢} - ١٠\text{س} - ٦) = ٠$$

فالسلسلة الاولى تكون موجبة بمقادير س الاكبر من ٢ والسلسلة الثانية تكون موجبة بمقادير س الاكبر من $\frac{٥}{٢}$ وحيث ان هذا العدد وهو $\frac{٥}{٢}$ يجعل السلسلة الثالثة موجبة كذلك فيكون نهاية كبرى للجذور الموجبة ولو طبقت الطريقة الاولى لوجدان النهاية هي ١١ وهذا العدد أكبر من $\frac{٥}{٢}$

ولنأخذ

ولنأخذ المعادلة

$$س^{7}+س^{6}-10س^{5}-13س^{4}+7س^{3}+12س^{2}-9=0$$

السابق أخذها ونقسمها الى سلسلتين هكذا

$$س^{4}(س^{3}+4س^{2}-10س-13)+(7س^{3}+12س^{2}-9)=0$$

فبتعويض س باعداد صحيحة تكبر شيأ فشيأ يعلم أن ١ يجعل السلسلة الثانية موجبة وأن عدد ٣ يجعل السلسلة الاولى موجبة وحينئذ يكون عدد ٣ نهاية كبرى للجذور الموجبة واذا قسمت المعادلة التي يتحصل عليها بتغيير س الى −س في المعادلة المفروضة الى ثلاث سلاسل هكذا

$$س^{5}(س^{2}-4س-10)+س^{2}(13س^{2}+7س-12)+9=0$$

يعلم أن ١ يجعل السلسلة الثانية موجبة وأن ٦ يجعل الاولى موجبة وحينئذ يكون عدد ٦ نهاية كبرى للجذور الموجبة للمعادلة المحول اليها وبناء على ذلك تكون الجذور الحقيقية للمعادلة المفروضة محصورة بين −٦ و +٣ وبواسطة الطريقة الثانية قد وجدنا ان نهايتي الجذور هما −١٣ و +٥

ولنأخذ أيضا المعادلة

$$س^{4}-6س^{3}+2س^{2}-20س-15=0$$

ولنقسم الحدود في أول الامر الى سلسلتين بالترتيب الموضوعة به هكذا

$$س^{3}(س-6)+(2س^{2}-20س-15)=0$$

فتكون السلسلة الاولى موجبة بمقادير س الاكبر من ٦ وحيث كان الجذر الموجب لكثيرة الحدود ذات الدرجة الثانية المكونة للسلسلة الثانية أقل من ١١ فتكون هذه السلسلة الثانية موجبة بجميع مقادير س الاكبر من ١١ وينتج من ذلك ان عدد ١١ يكون نهاية كبرى للجذور الموجبة الا انه يمكن خفض هذه النهاية بتقسيم الحد السالب وهو −٢٠ س الى قسمين وأخذ احد القسمين مع السلسلة الاولى وبذلك يحدث

$$س(س^{3}-6س^{2}-10)+(2س^{2}-10س-15)=0$$

وحيث ان السلسلتين تكونان موجبتين بالمقدار س=٧ فيكون هذا العدد وهو ٧ نهاية كبرى

٢٧٣ د (طريقة نوتون) هذه الطريقة تنتج من النظرية الآتية وهي

(نظرية ثانية) اذا كان عدد مثل ح يجعل كمية كثيرة حدود صحيحة ومشتقاتها المتتالية موجبة أقول ان هذه الكمية الكثيرة الحدود ومشتقاتها تأخذ مقادير موجبة متزائدة متى تزايد س بالابتداء من ح

لاننا اذا عوضنا س بالمقدار ح+ف تؤل كثيرة الحدود د(س) التي بدرجة م مرتبة على حسب القوى المتنازلة للكمية ف الى

$$د(ح+ف)=د(ح)+دَ(ح)\frac{ف}{١}+دً(ح)\frac{ف^{٢}}{١\times٢}\cdots+د^{م}(ح)\frac{ف^{م}}{١\times٢\cdots\times م}$$

فاذا كانت الكميات د(ح) و دَ(ح) و دً(ح) و ... و د^م(ح) موجبة فمن الواضح ان كثيرة الحدود تأخذ مقادير موجبة متزائدة بالمقادير الموجبة والمتزائدة لكمية ف أعني متى تزايد س بالابتداء من ح ومن الواضح ان المشتقات المتتالية وهي دَ(س) و دً(س) و ... الخ تكون بهذه الخاصية

وبموجب ذلك لنفرض اننا كوّنا المشتقات المتتالية لكثيرة الحدود المفروضة فتكون المشتقة برتبة م كمية ثابتة وموجبة حيث ان العامل الاول موجب وتكون المشتقة برتبة م-١ كمية كثيرة الحدود بدرجة اولى فليكن حَ جذرها فجميع الاعداد الاكبر من حَ تجعل هذه الكمية الكثيرة الحدود موجبة وتكون المشتقة برتبة م-٢ كمية كثيرة الحدود بدرجة ثانية فاذا كان العدد حَ يجعل هذه الكمية الكثيرة الحدود موجبة فبموجب النظرية المتقدمة تكون هذه الكمية الكثيرة الحدود موجبة كذلك بجميع الاعداد الاكبر من حَ واذا كانت هذه الكمية ذات الدرجة الثانية سالبة حينما يجعل س=حَ يكون جذراها حقيقيين ويكون أكبرهما وليكن حً أكبر من حَ وبجميع مقادير س الاكبر من حً تكون المشتقة برتبة م-٢ والمشتقتان التاليتان موجبة وتكون المشتقة برتبة م-٣ كمية كثيرة حدود بدرجة ثالثة فيختبر هل العدد حً يجعلها موجبة أم لا ولاجل الاختصار في الحسابات يعوض العدد حً بالعدد الصحيح الاكبر منه مباشرة فاذا كان هذا العدد يجعل كثيرة الحدود ذات الدرجة الثالثة موجبة فان جميع الاعداد الاكبر

منه

منه تجعلها موجبة كذلك واذا كان هذا العدد يجعلها سالبة تجرب الاعداد الصحيحة الاكبر منه شيأ فشيأ الى ان يوجد عدد من هذه الاعداد وليكن $\bar{\bar{\text{ح}}}$ يجعل كثيرة الحدود ذات الدرجة الثالثة موجبة فبجميع مقادير س الاكبر من $\bar{\bar{\text{ح}}}$ تكون المشتقة برتبة م-٣ والمشتقات الثلاثة التالية موجبة فيوضع هذا العدد وهو $\bar{\bar{\text{ح}}}$ في المشتقة برتبة م-٤ التي هي بدرجة رابعة ويدام العمل بهذه الكيفية بأن ينتقل من كل مشتقة الى المشتقة الاقل منها في الرتبة الى ان يتوصل الى الدالة المفروضة فيتحصل عدد صحيح مثل ح يجعل كثيرة الحدود وجميع مشتقاتها موجبة فيكون هذا العدد نهاية كبرى لجذور كثيرة الحدود المفروضة ولجذور جميع مشتقاتها وبوجب الكيفية التي وجد بها يكون هو أصغر عدد صحيح محقق لهذه الشروط والنهايات التي توجد بواسطة الطرق الاولى تكون محققة لهذه الشروط لانه يعتبر في جميع هذه الطرق ان كثيرة الحدود المفروضة وهي د(س) مجموع عدة كميات كثيرة الحدود مثل $\text{د}_{١}$(س) و $\text{د}_{٢}$(س) و ... الخ كل كمية منها معاملها الاول موجب ومحتوية على مغايرة في الغاية ويبحث عن عدد مثل ح يجعل هذه الكميات الكثيرة الحدود وهي $\text{د}_{١}$(س) و $\text{د}_{٢}$(س) و ... الخ موجبة فمتى تزايد س بالابتداء من ح تتزايد هذه الكميات الكثيرة الحدود وبناء على ذلك تكون مشتقاتها التي برتبة اولى وهي $\text{د}'_{١}$(س) و $\text{د}'_{٢}$(س) و ... الخ موجبة بالمقدار س = ح وحيث ان المعاملات الاول لهذه المشتقات موجبة كذلك ولا تحتوي كل مشتقة من هذه المشتقات الاعلى مغايرة واحدة في الغاية فتكون هذه المشتقات متزائدة متى تزايد س بالابتداء من ح وحينئذ تكون المشتقات التي برتبة ثانية موجبة حينما يجعل س = ح وهلم جرا

ولنطبق طريقة نوتون على المعادلة

$$\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{٥} - ١٠\,\text{س}^{٤} - ٣٢\,\text{س}^{٣} + ٧\,\text{س}^{٢} - ٥٠٠\,\text{س} - ١٢٠ = ٠$$

ولذلك نكون المشتقات المتتالية فنجد ان

$$\text{د}'(\text{س}) = ٥\,\text{س}^{٤} - ٤٠\,\text{س}^{٣} - ٩٦\,\text{س}^{٢} + ١٤\,\text{س} - ٥٠٠$$ و

$$\frac{\text{د}''(\text{س})}{١ \times ٢} = ١٠\,\text{س}^{٣} - ٦٠\,\text{س}^{٢} - ٩٦\,\text{س} + ٧$$ و

$$\frac{\text{د}^{٣}(\text{سـ})}{١\times٢\times٣} = ١٠\,\text{سـ}^{٢} - ٤٠\,\text{سـ} - ٣٢$$ و

$$\frac{\text{د}^{(٤)}(\text{سـ})}{١\times٢\times٣\times٤} = ٥\,\text{سـ} - ١٠$$ و

$$\frac{\text{د}^{(٥)}(\text{سـ})}{١\times٢\times٣\times٤\times٥} = ١$$

فجذر المشتقة برتبة رابعة هو ٢ وأول عدد صحيح مساو أو أكبر من ٢ يجعل المشتقة برتبة ثالثة موجبة هو ٥ وأول عدد صحيح مساو أو أكبر من ٥ يجعل المشتقة برتبة ثانية موجبة هو ٨ وأول عدد صحيح مساو أو أكبر من ٨ يجعل المشتقة برتبة أولى موجبة هو ١٠ ثم ان أول عدد صحيح مساو أو أكبر من ١٠ يجعل كثيرة الحدود المفروضة موجبة هو ١٣ ويستنتج من ذلك ان عدد ١٣ يكون نهاية كبرى لجذور المعادلة المفروضة ومن هذا المثال تتضح أفضلية طريقة نوتون لانه لو طابقت الطريقة الاولى أو الطريقة الثانية لوجدت النهاية ٥٠١ ولو طابقت الطريقة الثالثة بان جزئت كثيرة الحدود المفروضة الى سلسلتين هكذا

$$\text{سـ}^{٣}(\text{سـ}^{٢} - ١٠\,\text{سـ} - ٣٢) + (٧\,\text{سـ}^{٢} - ٥٠٠\,\text{سـ} - ١٢٠) = ٠$$

لوجدت النهاية ٧٢

بند ٢٧٣ ويمكن بالسهولة ايجاد نهاية صغرى للجذور الموجبة لانه اذا وضع $\text{سـ} = \frac{١}{\text{صـ}}$ تتحول المعادلة الى معادلة أخرى جذورها عكس جذور المعادلة المفروضة فاذا كان عدد ح نهاية كبرى للجذور الموجبة للمعادلة المحول اليها يكون الكسر $\frac{١}{\text{ح}}$ نهاية صغرى للجذور الموجبة للمعادلة المفروضة

مثلا لتكن المعادلة

$$\text{سـ}^{٣} + ٣\,\text{سـ}^{٢} - ١٧\,\text{سـ} + ٥ = ٠$$

التي جذورها الثلاثة حقيقية واثنان منها موجبان وأصغر من ٣ فحيث كان عدد ٤ نهاية كبرى للجذور الموجبة للمعادلة المحول اليها وهي

$$٥\,\text{صـ}^{٣} - ١٧\,\text{صـ}^{٢} + ٣\,\text{صـ} + ١ = ٠$$

فيكون الكسر $\frac{١}{٤}$ هو النهاية الصغرى للجذور الموجبة للمعادلة المفروضة وحينئذ تكون هذه الجذور الموجبة محصورة بين $\frac{١}{٤}$ و ٣

*(الفصل

(الفصل الثانى)

فى الجذور المنطقة

(فى البحث عن الجذور المنطقة)

نمرة ٢٧٤ د لتكن

$$\text{د}(\text{س}) = \text{ج}\,\text{س}^{\text{م}} + \text{ج}_{١}\,\text{س}^{\text{م}-١} + \text{ج}_{٢}\,\text{س}^{\text{م}-٢} + \cdots + \text{ج}_{\text{م}-١}\,\text{س} + \text{ج}_{\text{م}} = ٠$$

المعادلة المفروضة التى نفرض ان جميع معاملاتها منطقة بل وصحيحة لانها ان لم تكن صحيحة يمكن جعلها صحيحة بضرب جميع حدود المعادلة فى عدد مناسب وقد ذكرنا فى الجزء الاول (بند ٧٠ د) كيفية ايجاد خارج قسمة كثيرة الحدود د(س) المرتبة بالنسبة للقوى التنازلية لحرف س على س ـ ح وقد قلنا ان معامل الحد الاول من خارج القسمة يكون مساويا للمعامل الحد الاول من المقسوم وانه يكون كل معامل من معاملات الحدود الاخر لخارج القسمة بضرب المعامل السابق له فى ح واضافة المعامل المناظر له من المقسوم الى الناتج فاذا كانت جميع معاملات المقسوم صحيحة وموجبة أو سالبة فمن الواضح ان الخارج المتكون بهذه الكيفية تكون جميع معاملاته صحيحة حيث انه يتحصل عليها بتوافق اعداد صحيحة ببعضها بواسطة عمليات ضرب وجمع ولنتصور الآن انه بعد ترتيب كثيرة الحدود بالنسبة للقوى التصاعدية هكذا

$$\text{د}(\text{س}) = \text{ج}_{\text{م}} + \text{ج}_{\text{م}-١}\,\text{س} + \text{ج}_{\text{م}-٢}\,\text{س}^{٢} + \cdots + \text{ج}_{١}\,\text{س}^{\text{م}-١} + \text{ج}\,\text{س}^{\text{م}}$$

قد قسمت على ح ـ س فحيث ان المقسوم عليه قد تغيرت اشارته فقط فتتغير اشارة خارج القسمة فقط وبناء على ذلك تكون معاملاته حقيقية كذلك ولنجر عملية القسمة هكذا

$$ح_م + ح_{م-١}\,س + ح_{م-٢}\,س^٢ + ح_{م-٣}\,س^٣ \cdots + ح_٠\,س^م \quad \Big| \quad ح - س$$

$$\text{خارج القسمة:}\quad ه_{م-١} + ه_{م-٢}\,س + ه_{م-٣}\,س^٢ + \cdots + ه_١\,س^{م-٢} + ه_٠\,س^{م-١}$$

$$(ه_{م-١} + ح_{م-١})\,س + ح_{م-٢}\,س^٢ + ح_{م-٣}\,س^٣ \cdots + ح_٠\,س^م$$

$$(ه_{م-٢} + ح_{م-٢})\,س^٢ + ح_{م-٣}\,س^٣ \cdots + ح_٠\,س^م$$

$$(ه_{م-٣} + ح_{م-٣})\,س^٣ \cdots + ح_٠\,س^م$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$(ه_١ + ح_١)\,س^{م-١} + ح_٠\,س^م$$

$$(ه_٠ + ح_٠)\,س^م$$

فيكون العامل الاول من معاملات خارج القسمة هو $\frac{ح_م}{ح}$ وهذا العدد يجب أن يكون صحيحا ومن هنا يعلم شرط أول يجب أن يكون أى جذر صحيح موفيا له وهذا الشرط الاول هو أن يكون هذا الجذر قاسما للحد الاخير وهو $ح_م$ من المعادلة المفروضة ولاجل الاختصار نرمز بالرمز $ه_{م-١}$ للحد الاول من خارج القسمة ولنضربه فى المقسوم عليه وهو ح ـ س ولنطرح الحاصل من المقسوم فحاصل الضرب فى ح يمحو الحد الاول وهو $ح_م$ من المقسوم وحاصل الضرب فى ـ س يضاف للحد الثانى بحيث يكون الحد الاول من المقسوم الثانى هو $(ه_{م-١} + ح_{م-١})$ س واما الحدود التالية فتكون هى نفس الحدود التالية من المقسوم المفروض فاذا قسم هذا الحد الاول على ح يوجد الحد الثانى وهو $\frac{ه_{م-١} + ح_{م-١}}{ح}$ س من خارج القسمة ويجب ان يكون العامل الثانى وهو $\frac{ه_{م-١} + ح_{م-١}}{ح}$ صحيحا ولنرمز له بالرمز $ه_{م-٢}$ ولنضرب الحد الثانى وهو $ه_{م-٢}$ س من خارج القسمة فى المقسوم عليه وهو ح ـ س ونطرح الحاصل من المقسوم الثانى فحاصل الضرب فى ح يمحو الحد الاول من المقسوم الثانى وحاصل الضرب فى ـ س يضاف للحد الثانى من هذا المقسوم الثانى بحيث يكون الحد الاول من المقسوم الثالث هو $(ه_{م-٢} + ح_{م-٢})$ $س^٢$ واما الحدود التالية فتكون هى نفس الحدود التالية

من

من المقسوم المفروض واذا قسم هذا الحد الاول على ح يوجد الحد الثالث وهو $\frac{هـ_{م-٢}+ح_{م-٢}}{ح}$ $س^{٣}$ من خارج القسمة والمعامل الثالث وهو $\frac{هـ_{م-٢}+ح_{م-٢}}{ح}$ الذى نرمزله بالرمز $هـ_{م-٣}$ يجب ان يكون عدداً صحيحا وهلم جرّا

وقانون تركيب معاملات خارج القسمة عمومى وهو ان يتحصل على أى معامل من معاملات خارج القسمة بان يضاف للعامل السابق له معامل الحد الذى يشغل فى المقسوم نفس الرتبة الذى يشغلها الحد المراد تكوينه فى خارج القسمة ويقسم المجموع على ح

وبهذه الكيفية يتوصل الى المقسوم الاخير وهو

$$(هـ_{١}+ح_{١})س^{م-١}+ح_{٠}س^{م}$$

الذى اذا قسم على المقسوم عليه يوجد الحد الاخير وهو $\frac{هـ_{١}+ح_{١}}{ح}$ $س^{م-١}$ من خارج القسمة ويجب ان يكون المعامل الاخير وهو $\frac{هـ_{١}+ح_{١}}{ح}$ الذى نرمزله بالرمز $هـ_{٠}$ صحيحا كذلك فاذا ضرب المقسوم عليه فى الحد الاخير وهو $هـ_{٠}س^{م-١}$ من خارج القسمة وطرح الحاصل من المقسوم يحصل باقى القسمة وهو $(هـ_{٠}+ح_{٠})س^{م}$ فاذا كان ح جذر المعادلة يكون الباقى معدوما ويكون $هـ_{٠}+ح_{٠}=٠$

وينتج مما سبق انه اذا اريد ايجاد الجذور الصحيحة لمعادلة ذات معاملات صحيحة مرتبة على حسب القوى التنازلية للمجهول س لاتجرب سوى قواسم الحد الاخير ويجرى العمل بموجب هذه القاعدة وهى

(قاعدة) لاجل معرفة ان كان عدد صحيح مثل ح جذر المعادلة أم لا يقسم الحد الاخير على هذا العدد ثم يضاف للخارج معامل الحد الذى قبل الحد الاخير ويقسم المجموع على ح ثم يضاف للخارج معامل الحد السابق للحد الذى قبل الحد الاخير ويقسم المجموع على ح وهلم جرّا فجميع عمليات القسمة هذه يجب ان تكون ممكنة بدون باق ومتى اضيف معامل الحد الاول من المعادلة يجب ان يكون الناتج صفرا

فمتى كان عدد صحيح مثل ح موفيا لجميع هذه الشروط يكون هذا العدد جذرا للمعادلة وهذا مايدل عليه على الخصوص الشرط الاخير الذى يدل على ان باقى قسمة

الطرف الاول من المعادلة على ح ــ سه او على سه ــ ح معدوم واذاك تنخفض درجة المعادلة المفروضة بقسمة طرفها الاول على سه ــ ح الا انه يجب ان يلاحظ ان خارج القسمة يوجد محسوبا جاهزا لان معاملات هذا الخارج تكون هى الخوارج الصحيحة التى تحصل فى اثناء العمليات السابقة مغيرة اشاراتها ثم يستمر فى التجارب على المعادلة المختصرة لا على المعادلة المفروضة

(مثالان)

(الاول) المطلوب ايجاد الجذور الصحيحة للمعادلة

$$\text{سه}^{6}-\text{سه}^{5}-6\,\text{سه}^{4}-\text{سه}^{2}+\text{سه}+6=0$$

فيبتدأ بتجربة ١ فلاجل ان يكون ١ جذرا يجب ان يكون مجموع المعاملات الموجبة مساويا لمجموع المعاملات السالبة وهذا هو الواقع فى هذا المثال واذن يكون ١ جذرا فيقسم الطرف الاول للمعادلة على سه ــ ١ بموجب القاعدة المقررة فى الجزء الاول (بند ٧٠ د) ثم تعتبر المعادلة

$$\text{سه}^{5}-6\,\text{سه}^{3}-6\,\text{سه}^{2}-7\,\text{سه}-6=0$$

وهذه المعادلة لا تقبل ١ جذرا لها فيجرب ــ ١ فبتعويض سه بالمقدار ــ ١ يوجد ناتج معدوم وهو

$$-1+6-6+7-6=0$$

وحينئذ يكون ــ ١ جذرا فتقسم المعادلة على سه + ١ بموجب نفس القاعدة المذكورة ثم تعتبر المعادلة

$$\text{سه}^{4}-\text{سه}^{3}-5\,\text{سه}^{2}-\text{سه}-6=0$$

فبعد معرفة أن ــ ١ ليس جذرا لهذه المعادلة تجرب قواسم الحد الاخير وهو ٦ مأخوذة باشارة + أو باشارة ــ فانجرب فى أول الامر القاسم الاقل وهو + ٢ ولذلك نجرى العمل على حسب القاعدة السابق النطق بها فبقطع كثيرة الحدود من الشمال الى اليمين نقول خارج قسمة الحد الاخير وهو ــ ٦ على ٢ هو ــ ٣ وباضافة المعامل التالى وهو ــ ١ يحدث ــ ٤ الذى بقسمته على ٢ ينتج ــ ٢ وباضافة المعامل التالى وهو ــ ٥ ينتج ــ ٧ وهذا العدد لا يقبل القسمة على ٢ وحينئذ لا يكون عدد ٢ جذرا

ولنجرب

ولنجرب الآن ـ٢ ولنكتب الخوارج المتتالية من الشمال الى اليمين هكذا

ـ١ و +٣ و ـ١ و +٣

فبقسمة الحد الاخير وهو ـ٦ على ـ٢ ينتج +٣ وباضافة ـ١ ينتج عدد +٢ الذي بقسمته على ـ٢ ينتج عدد ـ١ وباضافة ـ٥ ينتج عدد ـ٦ الذي بقسمته على ـ٢ ينتج +٣ وباضافة ـ١ ينتج عدد +٢ الذي بقسمته على ـ٢ ينتج ـ١ وباضافة المعامل الاول وهو +١ يوجد ناتج معدوم وحينئذ يكون ـ٢ جذرا والاعداد السابقة كاتبها مغيرة اشاراتها هي معاملات خارج قسمة الطرف الاول من المعادلة على س+٢ وحينئذ تكتب هذه المعادلة مباشرة وهي

$$س^{٣}-٣س^{٢}+س-٣=٠$$

وعدد ـ٢ لا يمكن ان يكون جذرا مرة أخرى حيث انه لا يقسم الحد الاخير وتكون الاعداد اللازم تجربتها الآن هي فقط قواسم ٣ وهي +٣ و ـ٣ فاذا جرب +٣ توجد الخوارج

ـ١ و ٠ و ـ١

وحينئذ يكون +٣ جذرا وبقسمة الطرف الاول للمعادلة على س-٣ يتوصل الى المعادلة ذات الدرجة الثانية وهي

$$س^{٢}+١=٠$$

التي جذراها تخيليان وهما +ء و ـء

وحينئذ تصير المعادلة المفروضة محلولة حلا تاما وتكون جذورها الستة هي +١ و ـ١ و ـ٢ و +٣ و +ء و ـء

(الثاني) المطلوب تعيين الجذور الصحيحة للمعادلة

$$٢س^{٣}-١٢س^{٢}+١٣س-١٥=٠$$

فحيث ان المعادلة التي يتحصل عليها بتغيير س الى ـس في هذه المعادلة لا تحتوي على مغايرات مطلقا فلا يكون للمعادلة المفروضة جذور سالبة وحينئذ لا تجرب سوى اعداد صحيحة فبعد معرفة أن ١ ليس جذرا تجرب قواسم ١٥ وهاك جدول العمليات

$٢س^{٣}-١٢س^{٢}+١٣س-١٥=٠$	
ـ٥	+٣
ـ٢+٢-٣	+٥

ويكون عدد ٥ جذرا وبالقسمة على س − ٥ توجد المعادلة

$$2\text{س}^{2} - 2\text{س} + 3 = 0$$

التى جذراها تخيليان

ب ٢٧٥ د (تنبيه أول) يمكن تنقيص عدد التجاريب بالبحث عن نهايتى الجذور كما تقدم فى الفصل السابق

فلنعتبر المعادلة

$$\text{س}^{5} - 9\text{س}^{4} - 5\text{س}^{3} + 58\text{س}^{2} - 144 = 0$$

فاذا جزئ الطرف الاول من هذه المعادلة الى سلسلتين هكذا

$$\text{س}^{3}(\text{س}^{2} - 6\text{س} - 5) + (58\text{س}^{2} - 144) = 0$$

يشاهد أن عدد ٧ يكون نهاية كبرى لجذور المعادلة وبتغيير اشارة س تؤول المعادلة الى

$$\text{س}^{5} + 6\text{س}^{4} - 5\text{س}^{3} - 58\text{س}^{2} + 144 = 0$$

ويمكن كتابة هذه المعادلة الاخيرة هكذا

$$\text{س}^{2}(\text{س}^{3} + 6\text{س}^{2} - 5) - 58\text{س}^{2} + 144 = 0$$

ويشاهد ان عدد ٣ يجعل السلسلتين موجبتين فيكون نهاية كبرى للجذور الموجبة لهذه المعادلة الاخيرة وينتج من ذلك ان الجذور الصحيحة للمعادلة المفروضة محصورة بين −٣ و +٧

وينتج من ذلك اذا اريد البحث عن الجذور الصحيحة للمعادلة المفروضة يكفى ان تجرب قواسم ١٤٤ المحصورة بين −٣ و +٧ فيوجد بالاختبار ان الجذرين −٢ و +٣ وحينئذ تؤول المعادلة الى

$$\text{س}^{3} - 5\text{س}^{2} - 4\text{س} + 24 = 0$$

والعددان +٤ و +٦ ليسا جذرين لهذه المعادلة ولا فائدة فى التجربة زيادة عن ذلك فيتحقق ان هذه المعادلة ليس لها جذور صحيحة

ب ٢٧٦ د (تنبيه ثان) يمكن ايضا تنقيص عدد التجاريب بكيفية أخرى فلنفرض ان د (س) الطرف الاول لمعادلة ذات معاملات صحيحة وان ح جذر صحيح لهذه المعادلة

المعادلة فتكون كثيرة الحدود د(س) قابلة للقسمة على س−ح وبموجب ما ذكر في بند ٢٧٤ تكون معاملات الخارج والباقي د١(س) صحيحة كذلك فاذا عوض عن س في المتساوية

$$\frac{د(س)}{س-ح} = د_١(س)$$

بعدد صحيح حيثما اتفق مثل ل يوجد أن

$$\frac{د(ل)}{ح-ل} = د_١(ل)$$

وحيث ان الطرف الثاني عدد صحيح فيستنتج من ذلك ان العدد الصحيح د(ل) يكون قابلا للقسمة على العدد الصحيح ح−ل

والعدد الصحيح ل متغير فاذا جعل ل=١ أو ل=−١ ينتج من ذلك أن د(١) يكون قابلا للقسمة على ح−١ وأن د(−١) يكون قابلا للقسمة على ح+١ وبالعكس فاذا حسب د(١) و د(−١) يوجد أن ... + ... و −١ وحينئذ تجرب كل نتيجة في القاعدة المتقدمة ... العدد ح ... د(١) يقبل القسمة على ح−١ و د(−١) يقبل القسمة على ح+١ أيضا وبذلك يقل عدد التجاريب جدا

مثلا لنأخذ المعادلة

$$س^٥ - ٤س^٤ - ١٠١س^٣ + ١٤س^٢ + ٥٠٤س + ٥٧٦ = ٠$$

التي جذورها محصورة بين −٩ و +١٣ فيوجد أن د(١) = ٩٩٠ و د(−١) = ١٧٢ ولنأخذ قواسم العدد ٥٧٦ المحصورة بين −٩ و +١٣ فالعدد ٢+١ أى ٣ لا يقسم د(−١) وحينئذ لا يكون عدد ٢ جذرا وحيث ان عدد −٢ يحقق الشرطين السابق النطق بهما فيجرب هذا العدد وحيث ان عدد ٣+١ أى ٤ لا يقسم د(−١) فيصرف النظر عن +٣ وحيث ان العدد −٣−١ أى −٤ لا يقسم د(١) فيصرف النظر عن −٣ كذلك وبمثل ذلك يصرف النظر عن +٤ و −٤ و −٦ و +٨ و +٩ ولا يحتاج الامر الا لتجربة الاربعة قواسم

−٢ و +٦ و −٨ و +١٢

وهاك جدول العمليات

$$\text{س}^{5} - ٤\text{س}^{4} - ١٠١\text{س}^{3} + ١٤\text{س}^{2} + ٥٠٤\text{س} + ٥٧٦$$

−٢	+٢٧ و +٤٧ و −١٠٨ و −٢٨٨
+٦	+١٩ و +١٠٠ و +٩٦
−٨	−١ و +١٢ و +٥ و −٥٤ و −٧٢

$$\text{س}^{4} - ١٢\text{س}^{3} - ٥\text{س}^{2} + ٥٤\text{س} + ٧٢$$

−٨	−٩
±١٢	−١ و ٠ و +٥ و +٦

$$\text{س}^{3} - ٥\text{س} - ٦ = ٠$$

ويوجد الجذران الصحيحان وهما −٨ و +١٢ وليس للمعادلة ذات الدرجة الثالثة التى حولت اليها المعادلة المفروضة جذور صحيحة

(فى البحث عن الجذور المنطقة الكسرية)

بـ ٢٧٧ د نفرض دائما ان معاملات المعادلة

$$\text{ج}\,\text{س}^{م} + \text{ج}_{1}\,\text{س}^{م-1} + \cdots + \text{ج}_{م-1}\,\text{س} + \text{ج}_{م} = ٠ \qquad (١)$$

صحيحة فكل جذر منطق حيثما اتفق يمكن وضعه بصورة كسر لا يمكن اختصاره وليكن $\frac{\text{ح}}{\text{ء}}$ ويكون

$$\text{ج}\frac{\text{ح}^{م}}{\text{ء}^{م}} + \text{ج}_{1}\frac{\text{ح}^{م-1}}{\text{ء}^{م-1}} + \cdots + \text{ج}_{م-1}\frac{\text{ح}}{\text{ء}} + \text{ج}_{م} = ٠$$

فاذا ضرب طرفا هذا الارتباط فى $\text{ء}^{م-1}$ وحوّلت جميع الحدود التالية للحد الاول الى الطرف الثانى يؤول الى

$$\text{ج}\frac{\text{ح}^{م}}{\text{ء}} = -\left(\text{ج}_{1}\text{ح}^{م-1} + \text{ج}_{2}\,\text{ء}\,\text{ح}^{م-2} + \cdots + \text{ج}_{م}\,\text{ء}^{م-1}\right)$$

وحيث كان الطرف الثانى صحيحا فيجب ان يكون الطرف الاول صحيحا كذلك وحيث ان ء اولى مع ح بل مع $\text{ح}^{م}$ فيكون ء قاسما للمعامل ج ويعلم من ذلك ان مقام أى جذر منطق يكون قاسما للمعامل الاول من المعادلة

وكذلك

وكذلك اذا ضرب فى $\text{ء}^{\text{م}}$ وقسم على ح يوجد الارتباط

$$\frac{\text{ح}_{\text{م}}\,\text{ء}^{\text{م}}}{\text{ح}} = -\left(\text{ح}_{٠}\,\text{ح}^{\text{م}-١} + \text{ح}_{١}\,\text{ء}\,\text{ح}^{\text{م}-٢} + \cdots + \text{ح}_{\text{م}-١}\,\text{ء}^{\text{م}-١}\right)$$

وحيث ان الطرف الثانى صحيح فيكون الطرف الاول صحيحا كذلك وحيث ان ح اولى مع $\text{ء}^{\text{م}}$ فيجب ان يكون ح قاسما للعدد $\text{ح}_{\text{م}}$ ويعلم من ذلك ان بسط اى جذر منطق يكون قاسما للعامل الاخير من المعادلة

ب ٢٧٨ د ينتج من ذلك ان اى معادلة ذات معاملات صحيحة ومعاملها الاوّل هو الواحد لا يكون لها جذور منطقة كسرية لانه حيث ان مقام أى جذر منطق يجب ان يكون قاسما للعامل الاول الذى هو الواحد فيكون مساويا بالواحد وبناء على ذلك يكون هذا الجذر صحيحا ويعلم من ذلك ان جميع الجذور المنطقة تكون فى هذه الحالة اعدادا صحيحة ومن هذا تحدث واسطة سهلة لاجل ايلولة البحث عن الجذور المنطقة الكسرية الى البحث عن الجذور الصحيحة لانه يعلم انه اذا ضربت جذور المعادلة المفروضة فى عدد صحيح مناسب وليكن ك تصير جميع الجذور المنطقة الكسرية صحيحة ولاجل ضرب جذور المعادلة المفروضة فى ك يكفى أن يوضع سَ = ك س ومن هنا يكون س = $\frac{\text{سَ}}{\text{ك}}$ فاذا عوّض س فى المعادلة المفروضة بكسر $\frac{\text{سَ}}{\text{ك}}$ تحصل هذه المعادلة الجديدة وهى

$$\frac{\text{ح}_{٠}\,\text{سَ}^{\text{م}}}{\text{ك}^{\text{م}}} + \frac{\text{ح}_{١}\,\text{سَ}^{\text{م}-١}}{\text{ك}^{\text{م}-١}} + \frac{\text{ح}_{٢}\,\text{سَ}^{\text{م}-٢}}{\text{ك}^{\text{م}-٢}} + \cdots + \text{ح}_{\text{م}} = ٠$$

أو

$$\text{سَ}^{\text{م}} + \frac{\text{ح}_{١}\,\text{ك}}{\text{ح}_{٠}}\,\text{سَ}^{\text{م}-١} + \frac{\text{ح}_{٢}\,\text{ك}^{٢}}{\text{ح}_{٠}}\,\text{سَ}^{\text{م}-٢} + \cdots + \frac{\text{ح}_{\text{م}}\,\text{ك}^{\text{م}}}{\text{ح}_{٠}} = ٠ \qquad (٢)$$

ولنعين الآن العدد الصحيح ك بحيث تكون جميع معاملات هذه المعادلة الاخيرة صحيحة فحيث كان المعامل الاول مساويا بالواحد فتكون جميع الجذور المنطقة لهذه المعادلة صحيحة وحينئذ تؤل المسئلة الى تعيين الجذور الصحيحة للمعادلة (٢) ومتى وجدت هذه الجذور وقسمت على ك تحصل الجذور المنطقة للمعادلة (١)

وتجيع العلمية دائما متى أخذ ك = $\text{ح}_{٠}$ والسبب فى ذلك واضح لانه حيث كانت مقامات

الجذور المنطقة للمعادلة (١) قواسم لعدد جـ فتصير جذورها صحيحة متى ضربت في جـ وفي كل مثال ينتخب أصغر عدد صحيح يجعل معاملات المعادلة (٢) صحيحة

ومتى لزم ايجاد الجذور المنطقة لمعادلة يبتدأ بالبحث عن الجذور الصحيحة ثم تقسم المعادلة على العوامل ذوات الحدين المناظرة للجذور الصحيحة الواحد بعد الآخر ثم يبحث عن الجذور الكسرية بمساعدة الجذور الصحيحة للمعادلة (٢) المذكورة وقد يتعذر البحث عن الجذور الصحيحة لهذه المعادلة الاخيرة فيستمر في التجريب الى الحد الاخير انه متى كان أكبر جذر منطق كسري للمعادلة المفروضة مساويا لخارج قسمة العدد $\text{جـ}_{\text{م}}$ مقسوما على أصغر قاسم للعدد جـ فيكون أكبر جذر صحيح للمعادلة (٢) مساويا للغاية لحاصل ضرب ذلك في أكبر جذر منطق كسري للمعادلة المفروضة وحينئذ تمتد التجاريب حتى توصل الى هذه النهاية

(مثالان)

(الاول) المطلوب ايجاد الجذور المنطقة للمعادلة

$$٢\text{سـ}^{٤}+\text{سـ}^{٣}-١٠\text{سـ}^{٢}-٢\text{سـ}+١٢=٠ \qquad (١)$$

فيوجد في أول الامر الجذر الصحيح وهو -٢ وبالقسمة على $\text{سـ}+٢$ تؤول هذه المعادلة الى

$$٢\text{سـ}^{٣}-٣\text{سـ}^{٢}-٤\text{سـ}+٦ \qquad (٢)$$

وحيث ان هذه المعادلة ليس لها جذور صحيحة فنحول بتغيير سـ الى $\frac{\text{سـ}}{\text{ك}}$ الى هذه المعادلة وهي

$$\text{سـ}^{٣}-\frac{٣\text{ك}}{٢}\text{سـ}^{٢}-٢\text{ك}^{٢}\text{سـ}+٣\text{ك}^{٣}=٠$$

ويلزم هنا أن يجعل $\text{ك}=٢$ وتؤول المعادلة الى

$$\text{سـ}^{٣}-٣\text{سـ}^{٢}-٨\text{سـ}+٢٤=٠ \qquad (٣)$$

وحيث ان الجذور الكسرية للمعادلة (٢) لا يمكن أن تكون الا $\pm\frac{١}{٢}$ و $\pm\frac{٣}{٢}$ فيبحث عن الجذور الصحيحة للمعادلة (٣) ضمن الاعداد ± ١ و ± ٣ فقط فيوجد أن $+٣$ جذر ويعلم من ذلك أن الكسر $\frac{٣}{٢}$ يكون جذر المعادلة المفروضة فاذا قسمت المعادلة

الاخيرة

الاخيرة على س − ٣ يتوصل الى هذه المعادلة ذات الدرجة الثانية وهى

$$\text{س}^{٢} - ٨ = ٠$$

التى جذراها أصمان وهما $\pm ٢\sqrt{٢}$ ومن ذلك ينتج الجذران الاصمان $\pm\sqrt{٢}$ للمعادلة المفروضة وبناء على ذلك تكون الجذور الاربعة للمعادلة المفروضة هى −٢ و $\frac{٣}{٢}$ و $+\sqrt{٢}$ و $-\sqrt{٢}$

(الثانى) المعادلة

$$٤\,\text{س}^{٤} - ٢٨\,\text{س}^{٣} + ٤٥\,\text{س}^{٢} - ٦\,\text{س} - ١٨ = ٠ \qquad (١)$$

ليس لها جذور صحيحة فاذا غير س الى $\frac{\text{س}}{\text{ك}}$ وضرب الطرفان فى $\text{ك}^{٤}$ تؤول هذه المعادلة الى

$$\text{س}^{٤} - ٧\,\text{ك}\,\text{س}^{٣} + \frac{٤٥\,\text{ك}^{٢}}{٤}\text{س}^{٢} - \frac{٣\,\text{ك}^{٣}}{٢}\text{س} - \frac{٩\,\text{ك}^{٤}}{٢} = ٠$$

ولاجل اجراء التحويل يكفى أخذ ك = ٢ فيكون

$$\text{س}^{٤} - ١٤\,\text{س}^{٣} + ٤٥\,\text{س}^{٢} - ١٢\,\text{س} - ٧٢ = ٠ \qquad (٢)$$

وحيث ان الجذور الكسرية للمعادلة المفروضة تصير صحيحة بضربها فى ٢ فلا يمكن ان تكون الا $\pm\frac{١}{٢}$ و $\pm\frac{٣}{٢}$ و $\pm\frac{٩}{٢}$ فحينئذ نجرب الاعداد ±١ و ±٣ و ±٩ فنجد −١ جذرا للمعادلة (٢) وبالقسمة على س + ١ توجد المعادلة

$$\text{س}^{٣} - ١٥\,\text{س}^{٢} + ٦٠\,\text{س} - ٧ = ٠$$

ونجد ٣ جذرا لهذه المعادلة الاخيرة وبالقسمة على س − ٣ يتوصل الى المعادلة ذات الدرجة الثانية وهى

$$\text{س}^{٢} - ١٢\,\text{س} + ٢٤ = ٠$$

التى جذراها وهما س = $٦ \pm \sqrt{١٢}$ أصمان ويعلم من ذلك ان الجذور الاربعة للمعادلة المفروضة هى $-\frac{١}{٢}$ و $\frac{٣}{٢}$ و $٣ \pm \sqrt{٣}$

بند ٢٧٩ (طريقة ثانية للبحث عن الجذور المنطقة الكسرية) لننبه على انه اذا كانت معاملات معادلة مثل

$$\text{ح}\,\text{س}^{\text{م}} + \text{ح}_{١}\text{س}^{\text{م}-١} + \cdots + \text{ح}_{\text{م}-١}\,\text{س} + \text{ح}_{\text{م}} = ٠$$

صحيحة وقسم الطرف الاول على العامل ذى الحدين وهو س ـ $\frac{ح}{ء}$ المناظر للجذر المنطق الكسرى وهو $\frac{ح}{ء}$ تكون معاملات الخارج صحيحة كذلك لاننا اذا فرضنا اننا أجرينا عملية القسمة من بعد الترتيب بالنسبة للقوى التنازلية لحرف س يكون العامل الاول للخارج هو ح ويحصل على العامل الثانى بضرب العامل الاول فى $\frac{ح}{ء}$ واضافة $ح_{1}$ للحاصل ويحصل على الثالث بضرب الثانى فى $\frac{ح}{ء}$ واضافة $ح_{2}$ للناتج وهلم جرا فاذا لم تكن معاملات الخارج صحيحة لا يمكن ان تشتمل مقاماتها الا على العوامل الاولية لعدد ء

ولنفرض الآن اننا قسمنا كثيرة الحدود على $\frac{ح}{ء}$ ـ س بعد الترتيب على حسب القوى التصاعدية لحرف س (بند ٢٧٤) فيحصل العامل الاول من معاملات الخارج بقسمة $ح_{م}$ على $\frac{ح}{ء}$ أعنى بضرب $ح_{م}$ فى $\frac{ء}{ح}$ فاذا أضيف $ح_{م-1}$ لهذا العامل الاول وضرب الناتج فى $\frac{ء}{ح}$ يحصل العامل الثانى من معاملات الخارج وهلم جرا ويستنتج من ذلك انه اذا لم تكن معاملات الخارج صحيحة لا يمكن ان تشتمل مقاماتها الا على العوامل الاولية لعدد ح لكن قد شاهدنا من قبل ان هذه المقامات لا يمكن ان تحتوى الا على العوامل الاولية لعدد ء وحيث ان ح ، ء أوليان مع بعضهما فتؤول جميع المقامات الى الواحد وبناء على ذلك تكون معاملات الخارج صحيحة

ولا تكون معاملات الخارج صحيحة فقط بل تكون جميعها قابلة للقسمة على ء لاننا اذا رمزنا بحروف ح ، $ء_{1}$ ، $ء_{2}$ ، ... الخ لمعاملات الخارج مرتبا على حسب القوى التنازلية لحرف س يكون

$$ء_{1}=\frac{حح}{ء}+ح_{1} \text{ ،}$$

$$ء_{2}=\frac{حء_{1}}{ء}+ح_{2} \text{ ،}$$

$$ء_{3}=\frac{حء_{2}}{ء}+ح_{3}$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

ولاجل ان يكون $ء_{1}$ صحيحا يلزم ان يكون ء قاسما للعدد ح وهذا ما هو معلوم من قبل

قبل ولاجل ان يكون $\frac{ء}{٢}$ صحيحا يلزم ان يكون ء قاسما للعدد $\frac{ي}{١}$ وهلم جرا فطريقتا اجراء عملية القسمة يمكن تطبيقهما لاجل البحث عن الجذور والمنطقة الكسرية مباشرة وتستعمل احداهما او اخراهما على حسب الاحوال

(مثالان)

(الاول) لنأخذ المعادلة

$$٤س^{٤}-٢٨س^{٣}+٤٥س^{٢}-٦س-١٨=٠$$

التي قد سبق أخذها فبعد معرفة ان هذه المعادلة ليس لها جذور صحيحة انبحث عن الجذور الكسرية ولنجرب الكسر $\frac{١}{٢}$ في أول الامر فاذا حسبنا الخارج من الشمال الى اليمين كما في حساب الجذور الصحيحة لزم ان نقسم على التوالي على $\frac{١}{٢}$ وهذه العملية عبارة عن الضرب في ٢ وتكون جميع العمليات ممكنة ويلزم الذهاب الى الانتهاء لاجل معرفة ان كان الباقي معدوما أم لا وبالعكس أي اذا حسبنا من اليمين الى الشمال يلزم ان نضرب على التوالي في $\frac{١}{٢}$ وهذا عبارة عن القسمة على ٢ وحينئذ فالافضل ان نستعمل هذه الطريقة الثانية بأن نقول $٤\times\frac{١}{٢}=٢$ و $٢-٢٨=-٢٦$ و $-٢٦\times\frac{١}{٢}=-١٣$ ، $-١٣+٤٥=+٣٢$ و $+٣٢\times\frac{١}{٢}=+١٦$ ، $+١٦-٦=+١٠$ ، $+١٠\times\frac{١}{٢}=+٥$ و $+٥-١٨=-١٣$ فيتأتى هنا ان العملية تمتد الى الآخر الا أن الباقي -١٣ غير معدوم وحينئذ لا يكون $\frac{١}{٢}$ جذرا وبتجربة $-\frac{١}{٢}$ بهذه الكيفية تكون جميع العمليات ممكنة ويتوصل الى باق معدوم وحينئذ يكون $-\frac{١}{٢}$ جذرا وتوجد المعادلة

$$٤س^{٣}-٣٠س^{٢}+٦٠س-٣٦=٠$$

وبقسمة جميع الحدود على ٢ تؤول هذه المعادلة الى

$$٢س^{٣}-١٥س^{٢}+٣٠س-١٨=٠$$

وبعد تجربة $-\frac{١}{٢}$ مرة أخرى أيضا يجرب الكسر $\frac{٣}{٢}$ الآن ذلك يكون بالذهاب من الشمال الى اليمين فيقال $-١٨:\frac{٣}{٢}=-١٢$ و $-١٢+٣٠=+١٨$ و $+١٨:\frac{٣}{٢}=+١٢$ و $+١٢-١٥=-٣$ و $-٣:\frac{٣}{٢}=-٢$ و $-٢+٢=٠$ وحينئذ يكون الكسر $\frac{٣}{٢}$ جذرا ويكون خارج قسمة الطرف الاول على $س-\frac{٣}{٢}$ هو

$$٢س^{٢}-١٢س+١٢=٠$$

أو

$$س^{٢} - ٦ س + ٦ = ٠$$

وهذه المعادلة ذات الدرجة الثانية جذراها أصمان

(الثانى) المطلوب ايجاد الجذور المنطقة للمعادلة

$$١٥ س^{٤} + ١٦ س^{٣} - ٤٦ س^{٢} - ٥ س + ٦ = ٠$$

فبعد معرفة ان هذه المعادلة ليس لها جذور صحيحة يجرب الكسر $\frac{١}{٣}$ بالذهاب من اليمين الى الشمال فيرى ان هذا الكسر جذر ثم تؤخذ المعادلة المختصرة ويجرب فيها الكسور $\pm \frac{١}{٥}$ و $\pm \frac{٢}{٥}$ فيرى ان $-\frac{٢}{٥}$ جذر وحيث ان المعامل الاول للمعادلة التى يتحصل عليها مساو للواحد فلا يكون لها جذور منطقة وهاك جدول الحسابات

$\frac{١}{٣}$	$١٥ س^{٤} + ١٦ س^{٣} - ٤٦ س^{٢} - ٥ س + ٦ = ٠$ ١٥ ، +٢١ ، −٣٩ ، −١٨ ، ٠
	$٥ س^{٣} + ٧ س^{٢} - ١٣ س - ٦ = ٠$
$\frac{١}{٥}$	٥ ، +٨
$-\frac{١}{٥}$	٥ ، +٦
$\frac{٢}{٥}$	٥ ، +٩
$-\frac{٢}{٥}$	٥ ، +٥ ، −١٠ ، ٠
	$س^{٢} + س - ٣ = ٠$

بند ٢٨٠ (تنبيه أول) قد أوضحنا فى بند ٢٤٩ تتابع العمليات التى يلزم اجراؤها حينما تعلم كمية كثيرة الحدود مثل س ويراد ايجاد كميات كثيرة الحدود مثل $س_{١}$ و $س_{٢}$ و $س_{٣}$ و ... الخ مكونة اولاها من العوامل البسيطة لكثيرة الحدود المفروضة وثانيتها من العوامل المزدوجة وثالثتها من العوامل الثلاثية وهكذا وحيث ان هذه العمليات منحصرة فى عمليات قسمة فمن الواضح انه اذا كانت معاملات كثيرة الحدود المفروضة وهى س منطقة تكون معاملات كثيرات الحدود $س_{١}$ و $س_{٢}$ و ... الخ التى تستنتج منها منطقة كذلك فلنفرض ان كثيرة الحدود س ليس لها الا جذر ح بدرجة تضعيف مقدارها ه فتكون كثيرة الحدود $س_{ه}$ بدرجة اولى وبناء على ذلك يكون الجذر ح المستخرج من المعادلة ذات الدرجة الاولى وهى $س_{ه} = ٠$ التى معاملاتها

منطقة

منطقة منطقا وتعلم من ذلك انه متى كان لمعادلة ذات معاملات حقيقية جذر واحد مضاعف يكون هذا الجذر منطقا

بند ٢٨١ (تنبيه ثان) متى كان لمعادلة ذات درجة ثالثة جذور متساوية يكون لها اما جذر مزدوج وجذر بسيط وأما جذر ثلاثى وفى كلتى الحالتين تكون الجذور منطقة بموجب ما تقدم ذكره

ومتى كان لمعادلة ذات درجة رابعة جذور متساوية يكون لها اما جذر مزدوج وجذران بسيطان واما جذران مزدوجان واما جذر ثلاثى وجذر بسيط واما جذر رباعى ففى الحالة الاولى يكون الجذر المزدوج منطقا وفى الحالة الثالثة يكون الجذر الثلاثى والجذر البسيط منطقين وكذلك فى الحالة الرابعة يكون الجذر الرباعى منطقا وأما فى الحالة الثانية فحيث ان الجذرين المزدوجين يكونان معلومين بمعادلة ذات درجة ثانية فيكونان على العموم أصمين

ومتى كان لمعادلة ذات درجة خامسة جذور متساوية يكون لها اما جذر مزدوج وثلاثة جذور بسيطة وأما جذران مزدوجان وجذر بسيط واما جذر بدرجة تضعيف تساوى ٣ او اكبر من ٣ وفى جميع هذه الحالات يكون احد الجذور بالاقل منطقا

ويعلم من ذلك انه متى كان لمعادلة ذات معاملات منطقة ودرجة تساوى خمسة أوأقل من خمسة جذور متساوية يكون احد جذور هذه المعادلة بالاقل منطقا ماعدا اذا كانت كثيرة الحدود بدرجة رابعة وكانت مربعا كاملا

وحينئذ متى لم تتجاوز درجة المعادلة خمسة يمكن الاستغناء عن تطبيق طريقة الجذور المتساوية التى تحتاج على العموم لحسابات طويلة على المعادلة المفروضة وانه بعد معرفة ان كثيرة الحدود ليست مربعا كاملا تطبق على المعادلة طريقة الجذور المنطقة واما اذا كانت المعادلة بدرجة أكبر من خمسة فيمكن ان يكون لها جذور متساوية بدون ان يكون لها جذور منطقة

(الفصل الثالث)
(فى حساب الجذور الاصمة)

بند ٢٨٢ لنتصد الآن لحساب الجذور الاصمة لمعادلة جبرية ذات معاملات حقيقية منطقة كانت أوأصمة ونفرض ان المعادلة ليس لها جذور متساوية فيبتدأ بتعيين نهاية كبرى للجذور الموجبة ونهاية صغرى للجذور السالبة (بند ٢٦٩) ثم تفصل

الجذور أعنى ان تقسم المسافة المحصورة بين هاتين النهايتين الى أجزاء يكون كل جزء منها محتويا على جذر واحد فى الغاية

والطريقة العمومية التى تستعمل للوصول الى هذه النتيجة هى طريقة لاجرانج وهى عبارة عن ان تكون المعادلة التى جذورها هى الفروق بين جذور المعادلة المفروضة مأخوذة مثنى مثنى و يبحث عن نهاية صغرى مثل و للجذور الموجبة لهذه المعادلة (بند ٢٧٣) ثم تعوض فى الطرف الاول من المعادلة المفروضة اعداد محصورة بين النهايتين المعينتين بحيث تكون من هذه الاعداد متوالية عددية اساسها و فكل حدين متواليين لا يحصران بينهما أدنى جذر أو يحصران بينهما جذرا واحدا على حسب ما يكون ناتجا الوضع متحدين فى الاشارة أو مختلفين فيها

ومن نظرية استورم تحدث كذلك طريقة عمومية لاجل فصل الجذور وذلك ان يكون تتابع الكميات الكثيرة الحدود وهو

$$س \text{ و } س_{١} \text{ و } س_{٢} \text{ و } \ldots \text{ و } س_{ك}$$

ثم توضع فى الطرف الاول من المعادلة المفروضة اعداد تفترق عن بعضها بفروق متساوية كالاعداد الصحيحة المتوالية المحصورة بين النهايتين

فالمسافات التى توجد فيها مغايرات ناقصة تكون هى فقط التى يوجد بها جذور حقيقية ويكون عدد الجذور الحقيقية مساويا لعدد المغايرات الناقصة فان اشتملت احدى هذه المسافات على عدة جذور تقسم بالثانى الى أجزاء متساوية ويدام العمل بهذه الكيفية الى ان يتم فصل الجذور

الا ان هاتين الطريقتين البسيطتين جدا فى التصور تحتاجان لحسابات طويلة ولذا تستعمل عادة طريقة أخرى عند العمل بها يتحصل على فصل الجذور وذلك ان توضع مباشرة فى كثيرة الحدود المفروضة أعداد متساوية الابعاد عن بعضها ويتباعد باعتبار المشتقة ولايضاح كيفية العمل نمثل ببعض أمثلة فنقول

بند ٢٨٣ (المثال الاول) لتكن المعادلة ذات الدرجة الثالثة وهى

$$س^{٣} + ٣ س^{٢} - ١٧ س + ٥ = ٠$$

فبواسطة قاعدة ديكارت يتضح ان هذه المعادلة لها جذر حقيقى سالب وليس لها جذور موجبة مطلقا أو لها جذران موجبان وبواسطة تجزئة الحدود يشاهدان +٣ نهاية

كبرى

كبرى الجذور الموجبة وأن −٦ نهاية صغرى للجذور السالبة وحينئذ تكون الجذور الحقيقية محصورة بين −٦ و +٣ وبوضع الاعداد الصحيحة المتتالية المحصورة بين هاتين النهايتين تحصل النواتج الآتية

س=−٦ و −٥ و −٤ و −٣ و −٢ و −١ و ٠ و ١ و ٢ و ٣

−١ و +٤٠ و +٥٧ و +٥٦ و +٤٣ و +٢٤ و +٥ و −٨ و −٩ و +٨

وحيث ان الكثيرة الحدود مقدارين مختلفين فى الاشارة ومطابقين للمقدارين س=٠ و س=١ فيستنتج من ذلك انه يكون لها جذر حقيقى موجب محصور بين ٠ و ١ ويكون الجذر الثانى الموجب محصورا بين ٢ و ٣ ويكون الجذر السالب محصورا بين −٦ و −٥ وحينئذ تكون الجذور الثلاثة للمعادلة المفروضة حقيقة وتكون هذه الجذور مفصولة وبهذه الكيفية توجد الجذور مقربة من واحد صحيح ولاجل ايجاد احدها مقربا من ٠,١ يعوض المجهول فى المعادلة باعداد محصورة بين نهايتى هذا الجذر ولا تفترق عن بعضها الا بقدر ٠,١ لكن عادة يقلل عدد مرات التعويض بواسطة الاعتبارات الآتية وهى لنبحث مثلا عن الجذر المحصور بين ٢ و ٣ ففى تغير س من ٢ الى ٣ تكون المشتقة وهى ٣ س٢ +٦ س −١٧ موجبة وحينئذ تكون الدالة متزايدة ويمكن ان يسلم فى ان تغير الدالة يكون مناسبا تقريبا للتغير المتغير وحيث انه متى زاد س بواحد بالابتداء من ٢ تزيد الدالة زيادة تساوى ٩+٨ أى ١٧ فلاجل ان تزيد الدالة زيادة تساوى ٩ أى لاجل ان تؤل الى الصفر يلزم ان يعطى للمتغير س زيادة تساوى تقريبا الكسر $\frac{٩}{١٧}$ أى ٠,٥ وبموجب ذلك يحتمل ان الجذر لا يخالف ٢,٥ الا بكمية يسيرة فاذا وضع س=٢,٥ فى كثيرة الحدود المفروضة يوجد ناتج سالب وهو −٣,١٢٥ واذن يكون الجذر أكبر من ٢,٥ فاذا وضع س=٢,٦ يوجد أيضا ناتج سالب لكن اذا وضع س=٢,٧ يوجد ناتج موجب وهو +٠,٦٠٣ واذن يكون الجذر محصورا بين ٢,٦ و ٢,٧

ولنبحث كذلك عن الجذر المحصور بين ٠ و ١ ففى تغير س من ٠ الى ١ تكون المشتقة سالبة وحينئذ تصير الدالة متناقصة ولنسلم أيضا فى ان تغير الدالة يكون مناسبا تقريبا للتغير المتغير وحيث انه متى زاد س بواحد بالابتداء من ٠ تنقص الدالة بكمية تساوى ٥+٨ أي ١٣ فلاجل ان تنقص الدالة بكمية تساوى ٥ أي لاجل ان

متقدم يلزم ان يعطى للتغير س زيادة تساوى لكسر $\frac{٥}{١٣}$ تقريبا أو ٠,٤ وحينئذ يحتمل ان الجذر يخالف ٠,٤ اختلافا يسيرا وحيث انه متى وضع س=٠,٤ يوجد ناتج سالب وهو −١,٢٥٦ فيكون الجذر أصغر من ٠,٤ وحيث انه اذا وضع س=٠,٣ يوجد ناتج موجب وهو +٠,١٩٧ فيكون الجذر محصورا بين ٠,٣ و ٠,٤

بـ ٢٨٤ د (المثال الثانى) فى المثال السابق قد فصلت الجذور بواسطة تعويض المجهول فى المعادلة باعداد صحيحة لكن ليس الامر كذلك دائما ففى هذه الحالة يبحث عن المسافة التى تشتمل على الجذور التى لم تكن فصلت ثم تقسم هذه المسافة الى عشرة أجزاء متساوية فلتكن المعادلة

$$س^{٣} - ٧س + ٧ = ٠$$

التى جذورها محصورة بين −٤ , +٣ فبتعويض س باعداد صحيحة توجد النواتج الآتية وهى

س = −٤ , −٣ , −٢ , −١ , ٠ , ١ , ٢ , ٣

−٢٩ , +١ , +١٣ , +١٣ , +٧ , +١ , +١ , +١٣

وحينئذ يوجد جذر سالب بين −٤ , −٣ وحيث ان المعادلة التى يتحصل عليها بتغيير س الى −س فى المعادلة المفروضة لا تحتوى الا على مغايرة واحدة فلا يكون للمعادلة المفروضة جذر آخر سالب وحيث ان الشرط الذى به تكون الجذور حقيقية (بـ ٢٥٨ د) مستوف هنا فينتج من ذلك ان المعادلة لها جذران موجبان الا ان هذين الجذرين يكونان محصورين فى مسافة واحدة وحينئذ يلزم معرفة هذه المسافة ولذلك نعتبر المعادلة

$$٣س^{٢} - ٧ = ٠$$

التى يتحصل عليها بمساواة مشتقة الطرف الاول من المعادلة المفروضة بصفر فنعلم (بـ ٢٥٤ د) انه يوجد بين الجذرين الموجبين للمعادلة المفروضة جذر للمشتقة وهذا الجذر هو الجذر الموجب وهو $\sqrt{\frac{٧}{٣}}$ الاكبر من ١ والاقل من ٢ وحيث انه يجب ان تكون المسافة المشتملة على الجذرين المطلوبين مشتملة كذلك على الكمية $\sqrt{\frac{٧}{٣}}$ فتكون هى المسافة الكائنة بين ١ و ٢ ولاجل فصل الجذرين نقسم هذه المسافة الى عشرة أقسام متساوية فحينما يوضع س=١,٥ يوجد ناتج سالب وهو −٠,١٢٥ وحينئذ

يكون

يكون أحد الجذرين الموجبين محصورا بين ١ و ١,٥ ويكون الجذر الآخر محصورا بين ١,٥ و ٢ وحينئذ فقد انفصلت الجذور ويتضح من الادخال بواسطة الاجزاء المتناسبة أن احد الجذرين يساوي للعدد ١,٣ تقريبا وان الآخر يساوي ١,٧ تقريبا وحيث انه اذا وضع س=١,٣ يوجد ناتج موجب وهو +٠,٠٩٧ وانه اذا وضع س=١,٤ يوجد ناتج سالب وهو -٠,٠٥٦ فيكون الجذر الاول محصورا بين ١,٣ و ١,٤ وحيث انه اذا وضع س=١,٧ يوجد ناتج موجب وهو +٠,٠١٣ وانه اذا وضع س=١,٦ يوجد ناتج سالب وهو -٠,١٠٤ فيكون الجذر الآخر محصورا بين ١,٦ و ١,٧

بند ٢٨٥ (المثال الثالث) المعادلة

$$س^{٣}-٢س^{٢}+٥س-٧=٠$$

ليس لها جذور سالبة وعدد ٢ هو النهاية الكبرى للجذور الموجبة فاذا عوض س بصفر أو بواحد يوجد ناتج سالب واذا عوض س بعدد ٢ يوجد ناتج موجب وحيث ان جذري المشتقة وهي $٣س^{٢}-٤س+٥=٠$ تخيليان فلا يكون للمعادلة المفروضة الا جذر واحد حقيقي ويكون هذا الجذر محصورا بين ١ و ٢

بند ٢٨٦ (المثال الرابع) المعادلة

$$س^{٣}-٤س^{٢}+٥س-٧=٠$$

ليس لها جذور سالبة وعدد ٤ هو النهاية الكبرى للجذور واذا عوض س بالاعداد الصحيحة لا تتغير الاشارة الا حينما يعوض س بالعددين ٣ و ٤ وجذرا المشتقة وهي $٣س^{٢}-٨س+٥$ حقيقيان وهما ١ و $\frac{٥}{٣}$ فاذا كانت الجذور الثلاثة للمعادلة المفروضة حقيقية لوجب ان يحدث الجذر الاصغر وهو ١ للمشتقة ناتج موجب ولوجب ان يحدث الجذر الاكبر وهو $\frac{٥}{٣}$ ناتج سالب (بند ٢٥٦) وحيث انه اذا وضع س=١ في كثيرة الحدود يكون مقدارها سالبا فينتج من ذلك ان المعادلة المفروضة ليس لها سوى جذر واحد حقيقي وان هذا الجذر محصور بين ٣ و ٤

بند ٢٨٧ (المثال الخامس) المعادلة

$$٨س^{٣}-١٢س^{٢}+٣س-١=٠$$

ليس لها جذور سالبة وعدد ٢ هو النهاية الكبرى للجذور وبتعويض س

بالاعداد الصحيحة يوجدان الاشارة لا تتغير الا حينما يعوض سه بعددى ١ و ٢
وجذرا المعادلة ءَ(سه) = ٠ وهما سه = $\frac{٢-\sqrt{٢}}{٤}$, سه = $\frac{٢+\sqrt{٢}}{٤}$ حقيقيان
ومحصوران بين ٠ و ١ وحينئذ اذا كانت الجذور الثلاثة للمعادلة المفروضة حقيقية
يكون جذران محصورين بين ٠ و ١ لكن يمكن كتابة كثيرة الحدود بالصورة

$$-٨سه^{٢}(١-سه)-(٤سه^{٢}-٣سه+١)$$

وحيث ان جذرى كثيرة الحدود ذات الدرجة الثانية وهى ٤سه^{٢} − ٣سه + ١ حقيقيان
فتكون موجبة على الدوام ومن ذلك يرى انه متى غير سه من ٠ الى ١ تبقى كثيرة
الحدود المفروضة سالبة على الدوام وحينئذ لا يكون لها سوى جذر واحد حقيقى
ويكون هذا الجذر الحقيقى محصورا بين ١ و ٢

بند ٢٨٨ (المثال السادس) ولنعتبر أيضا المعادلة

$$سه^{٣}+١١سه^{٢}-١٠٢سه+١٨١=٠$$

التى جذورها الحقيقية محصورة بين النهايتين −١٨ و +٦
فحيث ان المعادلة الحادثة من تغيير سه الى −سه فى المعادلة المفروضة لا تحتوى
الا على مغايرة واحدة فلا يكون للمعادلة المفروضة سوى جذر واحد سالب ويكون
هذا الجذر محصورا بين −١٧ و −١٨ ويكون الجذران الآخران حقيقيين وموجبين
أو تخيليين وحيث ان جميع الاعداد الصحيحة تحدث نواتج موجبة فيكون الجذران
الموجبان محصورين ان وجدا فى مسافة واحدة ولاجل معرفة هذه المسافة نعتبر
جذرا المشتقة

$$٣سه^{٢}+٢٢سه-١٠٢$$

فيوجد انهما حقيقيان واحدهما موجب والآخر سالب فيستنتج انه اذا كان للمعادلة
المفروضة جذران موجبان فحيث انهما يجب ان يحصرا بينهما الجذر الموجب وهو
$\frac{-١١+\sqrt{٤٢٧}}{٣}$ = ٣,٢٢٢١١١ للمشتقة فيكونان محصورين بين ٣ و ٤ فاذا وضع سه = ٣,٢
و سه = ٣,٣ يوجد ناتجان موجبان وهما +٠,٠٠٨ و +٠,١٢٧ وحينئذ ان
وجد الجذران يكونان محصورين بين ٣,٢ و ٣,٣ فيلزم قسمة هذه المسافة الى عشرة
أقسام متساوية وحيث انه اذا وضع سه = ٣,٢٢ يوجد ناتج سالب وهو −٠,٠٠١٣٥٢

فيكون

فيكون للمعادلة جذران موجبان وحيث انه اذا وضع س=٣،٢١ و س=٣،٢٢ يوجد ناتجان موجبان وهما +٠،٠٠١٢٦١ و +٠،٠٠٠١٦٧ فيكون احد الجذرين محصورا بين ٣،٢١ و ٣،٢٢ ويكون الآخر محصورا بين ٣،٢٢ و ٣،٢٣ وصعوبة فصل الجذور في هذا المثال ناشئة من كون ان جذرين من جذورها قريبان جدا من بعضهما

بند ٢٨٩ (المثال السابع) لتكن المعادلة ذات الدرجة الرابعة وهي

$$س^{٤}-٥س^{٣}-٧س^{٢}+١٠س+٣=٠$$

فبموجب نظرية ديكارت يكون لهذه المعادلة جذور موجبة عددها اما ٠ أو ٢ وجذور سالبة عددها اما ٠ أو ٢ وتكون الجذور محصورة بين −٣ و +٧ وبتعويض س بالاعداد الصحيحة توجد هذه النواتج وهي

س=−٢ و −١ و ٠ و ١ و ٢ و ٣ و ٤ و ٥ و ٦

+١ و −١٣ و +٣ و +٧ و −١٩ و −٦٩ و −١١٣ و −٩٧ و +٥٧

وحيث ان الاشارة تتغير أربع مرات فيكون للمعادلة أربعة جذور حقيقية أولها محصور بين −٢ و −١ وثانيها محصور بين −١ و ٠ وثالثها محصور بين ١ و ٢ ورابعها محصور بين ٥ و ٦

ولنحسب الجذر المحصور بين ١ و ٢ مقربا من ١و٠ فبالادخال بواسطة الاجزاء المتناسبة بين ١ و ٢ توجد الزيادة $\frac{٧}{٢٦}$ أو ٠،٣ وحيث انه اذا وضع س=١،٣ يوجد ناتج موجب وهو +٢،٠٤١١ فيكون الجذر أكبر من ١،٣ وحيث انه اذا وضع س=١،٤ يوجد ناتج موجب أيضا وهو +٠،٤٠١٦ فيكون الجذر أكبر من ١،٤ وبوضع س=١،٥ يوجد ناتج سالب وهو −٢،٠٦٢٥ وحينئذ يكون الجذر محصورا بين ١،٤ و ١،٥

ولنحسب كذلك الجذر المحصور بين ٥ و ٦ فبالادخال بواسطة الاجزاء المتناسبة توجد الزيادة $\frac{٩٧}{١٥٤}$ أو ٠،٦ وحيث انه اذا عوض س بالعدد ٥،٦ يوجد ناتج سالب فيكون الجذر أكبر من ٥،٦ وحيث انه اذا غير س بالعدد ٥،٧ يوجد أيضا ناتج سالب وهو −٩،٢٩٤٩ فيكون الجذر أكبر من ٥،٧ فاذا وضع س=٥،٨ يوجد ناتج موجب وهو +١٠،٦٠٩٦ وحينئذ يكون الجذر محصورا بين ٥،٧ و ٥،٨

بند ٢٩٠ (المثال الثامن) لتكن المعادلة

$$س^{٤}-٤س^{٣}+س+٤=٠$$

التي لا يمكن ان يكون لها بموجب نظرية ديكارت اكثر من جذرين موجبين ولا اكثر من جذرين سالبين فالجذور محصورة بين −١ , ٤ وبتعويض س فيها بالاعداد الصحيحة توجد هذه النواتج وهي

س = −١ , ٠ , ١ , ٢ , ٣ , ٤

+٨ , +٤ , +٢ , −١٠ , −٢٠ , +٨

وحينئذ يكون للمعادلة جذران موجبان احدهما محصور بين ١ , ٢ والآخر محصور بين ٣ , ٤ فان كان لها جذران سالبان كان هذان الجذران السالبان محصورين بين ٠ , −١ وحيث ان الحدين الاولين يكونان موجبين بمقادير س المحصورة بين هاتين النهايتين ويكون الجزء س+٤ موجبا كذلك فتكون كثيرة الحدود موجبة على الدوام بمقادير س المحصورة بين النهايتين المذكورتين وحينئذ لا يكون للمعادلة جذور سالبة مطلقا

بند ٢٩١ (المثال التاسع) لنأخذ المعادلة ذات الدرجة الخامسة وهي

$$س^{٥}-٣س^{٣}+س^{٢}-٨س-١٠=٠$$

التي لها اما جذر واحد موجب أو ثلاثة جذور موجبة وليس لها جذور سالبة مطلقا أو لها جذران سالبان فبوضعها بهذه الصورة وهي

$$(س^{٥}-٣س^{٣}-٨س-١٠)+س^{٢}=٠$$

يوجد ان عدد ٣ نهاية كبرى للجذور الموجبة وان عدد −٣ نهاية صغرى للجذور السالبة وبتعويض س بالاعداد الصحيحة توجد هذه النواتج وهي

س = −٣ , −٢ , −١ , ٠ , ١ , ٢ , ٣

−١٤٨ , +٢ , +١ , −١٠ , −١٩ , −١٤ , +١٣٧

وحينئذ يكون للمعادلة جذران سالبان احدهما محصور بين −٣ , −٢ وآخرهما محصور بين −١ , ٠ ويكون لها جذر موجب محصور بين ٢ , ٣ فاذا وضعت المعادلة بالصورة

$$-س^{٣}(٤-س^{٢})-س(٨-س^{٢})-(١٠-س^{٢})=٠$$

يشاهد ان

يشاهد ان الطرف الاول يكون سالبا على الدوام متى غير سه من ٠ الى ٢ وحينئذ يبقى علينا ان نختبر هل يمكن ان يكون للمعادلة ثلاثة جذور محصورة بين ٢ و ٣ ام لا فلو كتبت المشتقة

$$٥س^{٤}-٩س^{٢}+٢س-٨$$

بالصورة

$$(٥س^{٤}-٩س^{٢}-٤)+(٢س-٤)$$

يعلم ان ٢ نهاية كبرى لجذور المشتقة ومن هنا يعلم انه ليس للمعادلة المفروضة سوى جذر واحد موجب ولقد اختبرنا هذا المثال بواسطة نظرية استورم (بند ٢٦٦) بند ٢٩٢ (المثال العاشر) ثم لنعتبر المعادلة

$$٨س^{٤}-٤٠س^{٣}+٥٧س^{٢}-٤٠س+٤٩=٠$$

التي ليس لها جذور سالبة فبواسطة تجزئة الطرف الاول الى عدة سلاسل توجد النهاية الكبرى للجذور وهي +٥ وبتعويض سه بالاعداد الصحيحة توجد هذه النواتج وهي

سه = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ،،

٤٩ ، ٣٤ ، ٥ ، ١٠ ، ٢٨٩ ، + ،،،

ولا يحصل تغير في الاشارة وحينئذ يلزم استعمال المشتقة

$$٣٢س^{٣}-١٢٠س^{٢}+١١٤س-٤٠=٠$$

فبتعويض سه بالاعداد الصحيحة المبتدئة بالصفر والمنتهية بالنهاية الكبرى وهي ٤ لا يحصل تغير في الاشارة الا مرة واحدة وذلك متى غير سه من ٢ الى ٣ والمشتقة برتبة ثانية وهي

$$٦(١٦س^{٢}-٤٠س+١٩)$$

لها جذران حقيقيان وهما $س=\frac{٥\pm\sqrt{٦}}{٤}$ فاذا كانت الجذور الثلاثة للمشتقة برتبة أولى حقيقية وجب ان يحصل باصغر جذري المشتقة برتبة ثانية على ناتج موجب فهذا الجذر أقل من $\frac{٣}{٤}$ وحيث انه يمكن وضع المشتقة برتبة أولى بهذه الصورة وهي

بـ ٣٢ سـ^{٣} ($\frac{٣}{٤}$ ـ سـ) ـ (٩٦ سـ^{٢} ـ ١١٤ سـ + ٤٠)

وان جذرى ذات الثلاثة حدود التى بدرجة ثانية وهى ٩٦ سـ^{٢} ـ ١١٤ سـ + ٤٠ تخيليان فيشاهد انه اذا غير سـ من ٠ الى $\frac{٣}{٤}$ تكون هذه المشتقة سالبة وحينئذ لا يكون لها سوى جذر واحد حقيقى وينتج من ذلك انه لا يمكن ان يكون للمعادلة المفروضة اكثر من جذرين حقيقيين (بند ٢٥٥) فان كان لها جذران حقيقيان يكونان محصورين بين ٢ و ٣ فاذا وضع سـ = ٢,٥ يوجد ناتج سالب وهو ـ ٧,٢٥٠٠٠ وحينئذ يكون للمعادلة المفروضة جذران حقيقيان احدهما محصور بين ٢ و ٢,٥ وآخرهما محصور بين ٢,٥ و ٣

وبالادخال بواسطة الاجزاء المتناسبة يستدل على الزيادة ٢,٠ وحيث انه اذا عوض سـ بالعدد ٢,٢ يوجد ناتج سالب وهو ـ ١,٦٣٠٢ فيكون الجذر الاول أقل من ٢,٢ وحيث انه اذا عوض سـ بالعدد ٢,١ يوجد ناتج موجب وهو + ١,٥١٤٨ فيكون هذا الجذر محصورا بين ٢,١ و ٢,٢

وبالادخال بين ٢,٥ و ٣ يستدل على الزيادة ٢,٠ وحيث انه اذا عوض سـ بالعدد ٢,٧ يوجد ناتج سالب وهو ـ ٠,٦٣٧٢ فيكون الجذر الثانى أكبر من ٢,٧ وحيث انه اذا عوض سـ بالعدد ٢,٨ يوجد ناتج سالب أيضا وهو ـ ٢,٤٧٠٢ فيكون هذا الجذر اكبر من ٢,٨ فاذا عوض سـ بالعدد ٢,٩ يوجد ناتج موجب وهو + ٢,٦٣٤٨ وحينئذ يكون الجذر محصورا بين ٢,٨ و ٢,٩

وقد تحصلنا فى الامثلة السابقة على فصل الجذور بواسطة أوضاع موجهة توجيها مناسبا مع المساعدة باعتبار المشتقة ومن الواضح انه لاجل أن تنجح هذه الطريقة يلزم أن لا يكون للمعادلة جذور متساوية وحينئذ متى اجريت عدة تجاريب ولم يتوصل الى فصل الجذور يختبر هل للمعادلة جذور متساوية أم لا ولذلك يبحث عن القاسم المشترك الاعظم بين كثيرة الحدود ومشتقتها والانسب فى هذه الحالة توجيه الحسابات بحيث تطبق نظرية استورم فبهذه الكيفية يرجع الامر الى الطريقة الثانية العمومية التى أوردناها فى مبدأ هذا الفصل

(الفصل الرابع)
فى طرق التقريب

(فى طريقة نوتون)

بـ ٢٩٣ د متى فصلت جذور معادلة مثل $\text{ى}(\text{س})=٠$ وتحصل أحد هذه الجذور بدرجة تقريب ما أعنى مقربا مثلا من ٠,١ أو من ٠,٠١ يسهل بالكلية حساب هذا الجذر بتقريب أكثر حسب الارادة ولنتكلم فى أول الامر على الطريقة المعروفة بطريقة نوتون فنقول

لنفرض انه يوجد بين عددى ح , ى جذر واحد فقط ولنفرض ان هذا الجذر هو ح+ف (المقدار المطلق الكمية ف أقل من المقدار المطلق للفرق ى−ح) فاذا حلل ى(ح+ف) بموجب قانون تيلور (بـ ١٨٧ د) وحدد هذا القانون بالحد المشتمل على المشتقة برتبة ثانية يحدث

$$\text{ى}(\text{ح}+\text{ف})=\text{ى}(\text{ح})+\frac{\text{ف}}{١}\,\text{ى}'(\text{ح})+\frac{\text{ف}^{٢}}{٢\times١}\,\text{ى}''(\text{ح}+\text{ے}\text{ف})$$

(ے كسر موجب أقل من الواحد) وتؤل المعادلة المفروضة الى

$$\text{ى}(\text{ح})+\frac{\text{ف}}{١}\,\text{ى}'(\text{ح})+\frac{\text{ف}^{٢}}{١\times١}\,\text{ى}''(\text{ح}+\text{ے}\text{ف})=٠$$

ومن هنا يستنتج أن

$$\text{ف}=-\frac{\text{ى}(\text{ح})}{\text{ى}'(\text{ح})}-\frac{\text{ف}^{٢}\,\text{ى}''(\text{ح}+\text{ے}\text{ف})}{٢\,\text{ى}'(\text{ح})} \qquad (١)$$

فيتركب الطرف الثانى من هذه المتساوية من حدين نرمز لهما بحرفى و , ز فاما أول هذين الحدين وهو و فانه معلوم وأما ثانيهما وهو ز فانه غير معلوم حيث انه يشتمل على المجهول ف انما بسبب احتوائه على العامل ف² يكون على العموم مقداره المطلق صغيرا جدا بالنسبة لمقدار ف وحينئذ اذا أهملنا هذا الحد الثانى نجد مقدارا تقريبيا للمجهول ف وهو

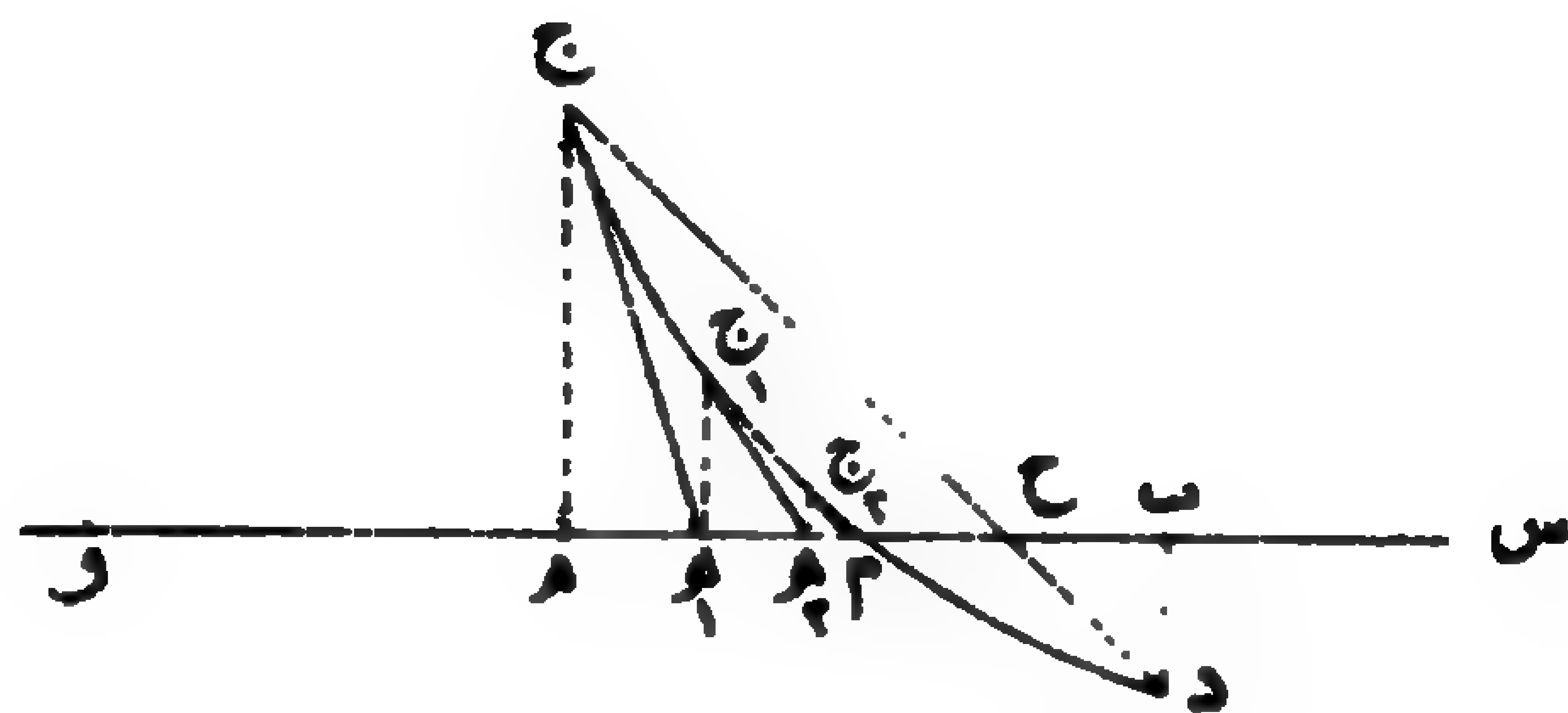
$$\text{و}=-\frac{\text{ى}(\text{ح})}{\text{ى}'(\text{ح})} \qquad (٢)$$

ويكون الخطأ الواقع هو

$$ز = \frac{ف^٢ ق̈ (ح + ى ف)}{٢ ق̄ (ح)} \qquad (٣)$$

ويتحصل على نهاية كبرى للمقدار المطلق للخطأ ز بتعويض ف٢ فى هذا المقدار الجبرى بالكمية (ى ـ ح)٢ وتعويض ق̈ (ح + ى ف) بكمية أكبر من المقدار المطلق للمشتقة برتبة ثانية وهى ق̈ (س) متى غير س فيما من ح الى ى

بند ٢٩٤ لطريقة نوتون معنى هندسى بسيط جدا فلنرسم المنحنى ج د الدال على سير الدالة ص = ق(س) متى غير س من ح الى ى بحيث كان الراسيان ق(ح) و ق(ى) المنسوبان للمقدارين ح و ى للمتغير س مختلفين فى الاشارة فيقطع المنحنى المحور و س فى نقطة م ويكون الجذر المطلوب مبينا بالطول وم وتؤل



طريقة التقريب المتقدمة الى مد المماس ج هـ١ للمنحنى من نقطة ج وأخذ الطول وهـ١ مقدارا تقريبيا للجذر وم لانه يعلم ان معادلة المماس للمنحنى فى نقطة ج هى

$$ص - ق(ح) = ق̄(ح) (س - ح)$$

فاذا جعل ص = ٠ فى هذه المعادلة لاجل أن يتحصل على نقطة هـ١ يحدث

$$س - ح = - \frac{ق(ح)}{ق̄(ح)} = و$$

وبذلك يتحصل على المقدار التقريبى وهو س = ح + و

بند ٢٩٥ هذا المقدار التقريبى وهو ح + و لا يكون دائما أقرب للجذر زيادة عن قرب المقدار الاول وهو ح منه لانه يمكن أن يتأتى أن نقطة هـ١ التى هى نقطة تقاطع المماس للمنحنى

للمنحنى فى نقطة ج بالمحور وسـ تكون متباعدة عن نقطة م زيادة عن بعد نقطة هـ منها بل يمكن ان تكون خارج المسافة هـ ب التى تحتوى على النقطة م

ومتى كانت المشتقة برتبة ثانية وهى $\ddot{\text{د}}(\text{سـ})$ حافظة لاشارة واحدة متى غير سـ من ح الى ء يمكن توجيه الحساب بحيث يحصل القرب بالدقة من الجذر شيأ فشيأ لان المقدار الجديد وهو ح+و يكون أقرب للمقدار الحقيقى وهو ح+و+ز للجذر زيادة عن قرب المقدار الاول وهو ح منه اذا كانت الثلاث كميات

$$\text{ح} \;,\; \text{ح}+\text{و} \;,\; \text{ح}+\text{و}+\text{ز}$$

متتالية ولذا يلزم ان تكون الكميتان و , ز متحدتين فى الاشارة وبناء على ذلك يلزم ان يكون حاصل ضربهما وهو

$$\text{و ز} = \frac{\text{ف}^{2}\,\text{د}(\text{ح})\,\ddot{\text{د}}(\text{ح}+\text{ح ف})}{2\,\left[\bar{\text{د}}(\text{ح})\right]^{3}}$$

موجبا وحيث ان الكميتين د(ح) , د(ء) مختلفتان فى الاشارة فيختبر أى مقدار من مقدارى ح , ء يجعل اشارة د(سـ) عين اشارة $\ddot{\text{د}}(\text{سـ})$ فهذا المقدار هو الذى يلزم ان يبتدأ منه أى هو الذى يلزم ان يضاف اليه المقدار التصحيحى اضافة جبرية

ولاجل عدم تشتت الافكار نفرض ان ح>ء ونفرض فى أول الامر ان اشارة د(ح) عين اشارة $\ddot{\text{د}}(\text{سـ})$ ففى هذه الحالة نبتدئ بمقدار ح الاصغر من الجذر وحيث كانت الكميتان و , ز متحدتين فى الاشارة وكان مجموعهما وهو و+ز = ف موجبا فتكونان موجبتين ويكون المقدار الجديد $\text{ح}_1 = \text{ح}+\text{و}$ أكبر من ح الا انه يكون أصغر من الجذر $\text{ح}_1+\text{ز}$ واذن يكون أقرب للجذر من ح

وحيث ان اشارة $\text{د}(\text{ح}_1)$ عين اشارة د(ح) وبالتبعية عين اشارة $\ddot{\text{د}}(\text{سـ})$ فيمكن بالابتداء من ح_1 البحث عن مقدار تصحيحى جديد مماثل للمقدار التصحيحى السابق لانه بواسطة القانون

$$\text{و}_1 = -\frac{\text{د}(\text{ح}_1)}{\bar{\text{د}}(\text{ح}_1)}$$

يوجد مقدار ثالث $ح_2 = ح_1 + و_1$ أكبر من $ح_1$ الا انه أصغر من الجذر وبناء على ذلك يكون أكثر قربا بالجذر من $ح_1$ وهلم جرا وبهذه الكيفية توجد سلسلة مقادير متزايدة ح و $ح_1$ و $ح_2$ ... الخ أقل من الجذر وتميل الى نهاية هي نفس الجذر لان نهاية الكمية ء$(ح_ه)$ تكون هي الصفر متى زاد ه الى مالا نهاية اذ انه لو بقي المقدار المطلق للكمية ء$(ح_ه)$ أكبر من كمية مخالفة للصفر لبقي الفرق $ح_ه - ح_{ه-1}$ أكبر من عدد معين ولزاد $ح_ه$ الى مالا نهاية وهذا محال وهذه الطريقة ترجع الى مد مماسات للمنحني من النقط ج و $ج_1$ و $ج_2$ و ... الخ التي افقياتها ح و $ح_1$ و $ح_2$ و ... الخ فبغاية السرعة تقرب النقط $ه_1$ و $ه_2$ و ... الخ التي هي نقط تقابل المماسات بالمحور وس من النقطة م بعدد ٢٩٦ ولنفرض الآن ان ء(ب) هي التي تكون اشارتها كاشارة ءً(س) ففي هذه الحالة نبتدئ من المقدار ء الاكبر من الجذر ونفرض ان هذا الجذر هو ء + ف (ف كمية سالبة) ويلزم في تعويض حرف ح بحرف ء في القوانين المتقدمة وحيث كانت الكميتان و و ز متحدتين في الاشارة وكان مجموعهما و + ز = ف سالبا فتكونان سالبتين ويكون المقدار الجديد $ء_1 = ء + و$ أصغر من ء الا انه يكون أكبر من الجذر $ء_1 + ز$ وحينئذ يكون أكثر قربا بالجذر عن ء

وحيث كانت اشارة ء$(ب_1)$ عين اشارة ء(ب) وبالتبعية عين اشارة ءً(س) فيمكن ان يبتدأ من $ء_1$ وان يبحث عن مقدار تقريبي جديد لانه بواسطة القانون

$$و_1 = -\frac{ء(ء_1)}{ءً(ء_1)}$$

يوجد مقدار ثالث $ء_2 = ء_1 + و_1$ أصغر من $ء_1$ لكنه أكبر من الجذر وبناء على ذلك يكون أكثر قربا بالجذر من $ء_1$ وهكذا

وبهذه الكيفية يتحصل على سلسلة مقادير متناقصة وهى ى و $ى_{١}$ و $ى_{٢}$ و ... الخ تميل الى نهاية تساوى الجذر وهذه الطريقة ترجع الى مدمماسات من النقط د و $د_{١}$ و $د_{٢}$ و ... الخ التى افقياتها ى و $ى_{١}$ و $ى_{٢}$ و ... الخ

(مثالين)

بہ ٢٩٧ د لنأخذ المعادلة

$$سہ^{٣}+٣سہ^{٢}-١٧سہ+٥=٠$$

التى اصغر جذريها الموجبين محصور بين ٠٫٣ و ٠٫٤ (بہ ٢٨٣ د) فالمشتقة برتبة ثانية موجبة بمقادير سہ المحصورة بين هاتين النهايتين وحيث ان الدالة تكون موجبة بالمقدار سہ=٠٫٣ فيبتدأ من هذا المقدار وبطريقة نوتون يوجد المقدار المقرب بالقلة وهو

$$و=-\frac{ى(ح)}{ىَ(ح)}=\frac{٠٫١٩٧}{١٤٫٩٣}=٠٫٠١٣١٩١١١$$

ولنقدر الآن الخطأ الواقع بمساعدة القانون (٣) فحيث ان للمشتقة برتبة ثانية وهى ىً(سہ) مقدارا موجبا يزيد مع ازدياد سہ حيث ان ىً(سہ) تكون موجبة فيكون مقدار ىَ(ح+ءف) اصغر من ىَ(٠٫٤) ويكون

$$ز < \frac{٨,٤ \times ف^{٢}}{٢ \times ١٤,٩٣} < ف^{٢} \times ٠,٣$$

وحيث كانت الكمية ف أقل من ٠,١ فيشاهد ان ز أقل من ٠,٠٠٣ وينتج من ذلك ان ف يكون اصغر من ٠,٠١٤ + ٠,٠٠٣ أى انه يكون اصغر من ٠,٠١٧ فاذا وضع هذا المقدار فى المقدار الجبرى للخطأ وجد أن

$$ز < (٠,٠١٧)^{٢} \times ٠,٣ < ٠,٠٠٠١$$

وحينئذ يكون مقدار ف محصورا بين ٠,٠١٣١ و ٠,٠١٣٣ فاذا أخذ ف = ٠,٠١٣٢ يوجد الجذر س = ٠,٣١٣٢ مقربا من ٠,٠٠٠١

واكبر الجذرين الموجبين محصور بين ٢,٦ و ٢,٧ وحيث ان المشتقة برتبة ثانية موجبة أيضا بمقادير س المحصورة بين هاتين النهايتين والدالة موجبة بالمقدار س = ٢,٧ فيبتدأ من هذا المقدار وبواسطة قانون نوتون يوجد المقدار التصحيحى وهو

$$و = -\frac{د(س)}{د'(س)} = -\frac{١,٦٥٣}{٢١,٠٧} = -٠,٠٣٠٩٩١١١$$

ويكون

$$-ز < \frac{٢٤,٤ \times ف^{٢}}{٢ \times ٢١,٠٧} < ف^{٢} \times ٠,٦$$

وحيث كان المقدار المطلق لكمية ف أقل من ٠,١ فيشاهد مباشرة ان المقدار المطلق للخطأ وهو ز يكون أقل من ٠,٠٠٦ ويستنتج من ذلك أن المقدار المطلق لكمية ف يكون أقل من ٠,٠٤ وبوضع هذا المقدار فى المقدار الجبرى للخطأ يوجد أن

$$-ز < (٠,٠٤)^{٢} \times ٠,٦ < ٠,٠٠١$$

وحينئذ يكون المقدار المطلق لكمية ف محصورا بين ٠,٠٣٠ و ٠,٠٣٢ فبأخذ ف = -٠,٠٣١ يتحصل الجذر س = ٢,٦٦٩ مقربا باقل من ٠,٠٠١

بند ٢٩٧ قد شاهدنا (بند ٢٨٩) ان اكبر جذر للمعادلة

$$س^{٤} - ٥س^{٣} - ٧س^{٢} + ١٥س + ٣ = ٠$$

محصور بين ٥,٧ و ٥,٨ وحيث ان المشتقة برتبة ثانية تكون موجبة بمقادير س المحصورة بين هذين العددين وان الدالة تكون موجبة متى كان س = ٥,٨ فيؤخذ

$$و = -\frac{د(س)}{د'(س)} = -\frac{١٠,٦٠٩٦}{٢٠٩,٦٤٨} = -٠,٠٥٠٦١١١$$

وحيث

وحيث كانت المشتقة برتبة ثالثة موجبة فتكون المشتقة برتبة ثانية وهى ءَ(س) متزايدة مع ازدياد س واذن يكون ءً(ء+ع ف)>ءً(ء) وبناء على ذلك يكون

$$-ز < \frac{ف^٢ ءً(ء)}{٢×٢٠٩,٦٤٨} = \frac{ف^٢×٢٤٥,٦٨}{٢×٢٠٩,٦٤٨} < ف^٢×٠,٥٢$$

وحيث ان المقدار المطلق لكمية ف اقل من ٠,١ فيكون الخطأ ـ ز اقل من ٠,٠٠٦ ويستنتج من ذلك ان المقدار المطلق لكمية ف يكون اقل من ٠,٠٦ فاذا وضع هذا المقدار فى المقدار الجبرى للخطأ يحدث

$$-ز < (٠,٠٦)^٢ × ٠,٥٢ < ٠,٠٠٢ < ٠,٠٠٢$$

ويكون المقدار المطلق لكمية ف محصورا بين ٠,٠٠ و ٠,٠٠٣ فاذا اخذ ف=٠,٠٠٢ يوجد س=٥,٧٤٨ مقربا باقل من ٠,٠٠٢

(فى الادخال بواسطة الاجزاء المتناسبة)

بـ٤٩٨ د هذه الطريقة عبارة عن ان يفرض ان تغير الدالة عقادير س المحصورة بين عددين قريبين من بعضهما قربا كافيا يكون مناسبا تناسبا محسوسا التغير المتغير ففى تغير س من ح الى ء تتغير الدالة بكمية تساوى ء(ء)ـ ء(ح) وحينئذ يطابق للتغير ء ـ ح للمتغير تغير قدره ء(ء)ـ ء(ح) للدالة فلنبحث عن التغير وَ الذى يلزم انه يحصل للمتغير بحيث تتغير الدالة بكمية تساوى ـ ء(ح) أى بحيث تصير معدومة ولذلك نضع التناسب

$$\frac{وَ}{ء-ح} = \frac{-ء(ح)}{ء(ء)-ء(ح)}$$

ومن هنا يكون

$$وَ = \frac{-(ء-ح)ء(ح)}{ء(ء)-ء(ح)}$$

ويكون المقدار المقرب للجذر هو ح+وَ لكننا لانعرف أن نقدر الخطأ وحينئذ يلزم أن تجرى أوضاع جديدة أى أن يعوض س فى المعادلة المفروضة بأعداد أخر مثلا اذا حسب الجذر فى أول الامر مقربا من ٠,١ فحيث ان الفرق ء ـ ح يكون مساويا للكسر ٠,١ فيؤخذ وَ مقربا لحد ٠,٠١ ويعوض س فى الدالة بأعداد

لا تفترق عن بعضها الا بكسر ٠٫٠٠١ وتكون هذه الاعداد متزائدة أو متناقصة الى أن يتحصل على ناتجين مختلفين في الاشارة ومتى وجد الجذر بهذه الكيفية محتويا على رقمين أعشاريين مضبوطين يجرى ادخال جديد وحيث كان الفرق ء ـ ح مساويا الآن لكسر ٠٫١ فيحسب وَ لحد ٠٫٠٠٠١ ثم تجرى أوضاع جديدة لاجل أن يتحصل على الجذر محتويا على أربعة أرقام أعشارية مضبوطة وهلم جرا وعلى العموم يضعف عدد الارقام الاعشارية في كل عملية

وكيفية الادخال هذه ترجع الى تعويض قوس المنحنى ج م د بالخط المستقيم ج د لان معادلة المستقيم ج د هي

$$\text{ص} - \text{ء}(\text{ح}) = \frac{\text{ء}(\text{ء}) - \text{ء}(\text{ح})}{\text{ء} - \text{ح}} (\text{س} - \text{ح})$$

فاذا جعل فيها ص = ٠ كي تتحصل نقطة ع التي هي تقاطع هذا المستقيم بالمحور وس يستنتج أن

$$\text{س} - \text{ح} = \frac{-(\text{ء} - \text{ح})\,\text{ء}(\text{ح})}{\text{ء}(\text{ء}) - \text{ء}(\text{ح})} = \text{وَ}$$

وبذلك يتحصل المقدار المقرب وهو $\text{س} = \text{ح} + \text{وَ}$

فمتى كانت المشتقة برتبة ثانية حافظة لاشارة واحدة متى غير س من ح الى ء يكون قوس المنحنى ج م د محدبا وتكون نقطة م التي هي نقطة تقاطع المنحنى بالمحور وس موجودة بين نقطة ع ونقطة هـ أو نقطة ب التي هي نقطة تقاطع المماس الذي يعد عند تطبيق طريقة نوتون من نقطة ج أو من نقطة د بالمحور المذكور وحينئذ يكون الجذر محصورا بين ح+و , ح+وَ وبناء على ذلك يستغنى باستعمال الطريقتين في آن واحد عن تقدير الخطأ

مثلا لنأخذ المعادلة التي سبق أخذها في بـ ٢٩٧ د وهي

$$\text{س}^{٤} - ٥\,\text{س}^{٣} - ٧\,\text{س}^{٢} + ١٠\,\text{س} + ٣ = ٠$$

التي لها جذر محصور بين ٥٫٧ , ٥٫٨ فبتطبيق طريقة نوتون يوجد ناتج أكبر ويكون

$$\text{س} < ٥٫٨ - ٠٫٠٥٠٦ = ٥٫٧٤٩٤$$

وبطريقة الادخال يوجد ناتج أصغر وهو

$$\text{وَ} = \frac{٩٫٢٩٤٩ \times ٠٫٠١}{١٩٫٩٠٤٥} = ٠٫٠٤٦٦١١١$$

ويكون

ويكون

$$س > ٠,٧٤٦٦$$

وحينئذ يؤخذ المقدار $س = ٠,٧٤٨$ المقرب بأقل من ٠,٠٠٢



(الفصل الخامس)

في حل المعادلات العالية

بند ٢٩٩ لا يمكن تطبيق نظرية استورم على الدوال العالية وانما يمكن تطبيق نظرية رول (بند ٢٠٤) عليها بشرط أن تكون الدالة ومشتقاتها محدودة ومستمرة وبهذه الواسطة تفصل الجذور بتوجيه عمليات الوضع توجيها مناسبا ومتى فصلت الجذور وتحصلت بتقريب ما تحسب مشتملة على عدة أرقام أعشارية بطريقة نوتون فلنفرض انه يوجد جذر محصور بين العددين ح و ء ولا يوجد خلافه بين هذين العددين فيوضع س = ح + ف فبموجب قانون تيلور يكون

$$٠ = د(ح+ف) = د(ح) + ف\,د'(ح) + \frac{ف^{٢}}{١\times٢}\,د''(ح+ك\,ف)$$

ومن هنا يكون

$$ف = -\frac{د(ح)}{د'(ح)} - \frac{ف^{٢}\,د''(ح+ك\,ف)}{٢\,د'(ح)}$$

فاذا أخذ المقدار المقرب وهو

$$و = -\frac{د(ح)}{د'(ح)}$$

يكون المقدار الجبري للخطا الواقع هو

$$ز = -\frac{ف^{٢}\,د''(ح+ك\,ف)}{٢\,د'(ح)}$$

ويكون الحساب الذي يلزم اجراؤه هو نفس الحساب الذي يجري في المعادلات الجبرية

بند ٣٠٠ (مثال اول) لنأخذ المعادلة

$$س^{س} = ١٠٠$$

فاذا أخذ اللوغاريتمان المتساويان للطرفين تؤل المعادلة الى

$$\text{د}(\text{س}) = \text{س لو س} - ٢ = ٠$$

ويكون

$$\text{دَ}(\text{س}) = \text{لو س} + \text{م} \quad ، \quad \text{دً}(\text{س}) = \frac{\text{م}}{\text{س}}$$

(حرف م رمز القياس اللوغاريتمات المعتادة)

فمتى تغير س من ٠ الى ١ تبقى الدالة د(س) سالبة ولا يوجد جذر فى هذه المسافة فاذا عوضنا س بالاعداد المتتالية يكون

$$\text{س} = ٢ \quad \text{لو}٢ = ٠٫٣٠١ \quad ٢\text{لو}٢ = ٠٫٦٠ \quad \text{د}(\text{س}) = -١٫٤٠$$

$$\text{س} = ٣ \quad \text{لو}٣ = ٠٫٤٧٧ \quad ٣\text{لو}٣ = ١٫٤٣ \quad \text{د}(\text{س}) = -٠٫٥٧$$

$$\text{س} = ٤ \quad \text{لو}٤ = ٠٫٦٠٢ \quad ٤\text{لو}٤ = ٢٫٤١ \quad \text{د}(\text{س}) = +٠٫٤١$$

وتنعدم المشتقة حينما يكون س $= \frac{١}{\text{هـ}}$ (هـ اساس نبير) وتبقى موجبة بجميع مقادير س الأكبر من هذا المقدار ويستنتج من ذلك ان د(س) تكون متزايدة على الدوام متى غير س من $\frac{١}{\text{هـ}}$ الى $+\infty$ وحينئذ تمر هذه الدالة بالصفر مرة واحدة لا غير ويعلم من ذلك انه ليس للمعادلة المفروضة سوى جذر واحد حقيقى وان هذا الجذر محصور بين ٣ و ٤

ولاجل تنقيص عدد مرات تعويض س نستعمل طريقة الادخال بواسطة الاجزاء المتناسبة فنجد أن

$$\text{و} = \frac{٠٫٥٧}{٠٫٩٨} = ٠٫٥٨$$

فلنجرب ٣٫٥ فنجد أن

$$\text{س} = ٣٫٥ \quad \text{لو س} = ٠٫٥٤٤٠٦٨٠٤ \quad \text{د}(\text{س}) = -٠٫٠٩٥٧٦١٨٦$$

$$\text{س} = ٣٫٦ \quad \text{لو س} = ٠٫٥٥٦٣٠٢٥٠ \quad \text{د}(\text{س}) = +٠٫٠٠٢٦٨٩٠٠$$

وحينئذ يكون الجذر محصورا بين ٣٫٥ , ٣٫٦ ويكون قريبا جدا من هذا المقدار الاخير زيادة عن قربه من المقدار الاول

وبتطبيق طريقة نوتون والابتداء من النهاية الكبرى يوجد هذا المقدار التصحيحى وهو

$$\text{و} = -\frac{٢٦٨٩٠٠}{٩٩٠٠٩٦٩٨} = -٠٫٠٠٢٧١٤٥\ldots$$

ثم يقدر الخطأ بواسطة القانون

$$-\text{ز} < \frac{\text{ف}^٢ \, \text{دً}(٣٫٥)}{٢\,\text{دَ}(٣٫٦)} < \frac{\text{ف}^٢ \times ٠٫١٢}{٢ \times ٠٫٩٩} < \text{ف}^٢ \times ٠٫٠٧$$

وحيث

وحيث ان المقدار المطلق لكمية ف أقل من ١ ,٠ فيشاهد مباشرة ان الخطا يكون أقل من ٠,٠٠٠٧ ويستنتج من ذلك ان المقدار المطلق لكمية ف أقل من ٠,٠٠٢٨+٠,٠٠٠٧ أى اقل من ٠,٠٠٣٥ فاذا وضع هذا المقدار فى المقدار الجبرى للخطأ يحدث

$$-ز < (٠,٠٠٣٥)^{٢} \times ٠,٠٧ < ٠,٠٠٠٠٠١$$

وحينئذ يكون مقدار ف محصورا بين -٠,٠٠٢٧١٤٥ , -٠,٠٠٢٧١٥٦ فاذا اخذ ف = -٠,٠٠٢٧١٥ يوجد الجذر س = ٣,٠٩٧٢٨٥ محتويا على ستة أرقام اعشارية مضبوطة

بند ٣١٣ (مثال ثان) لتكن المعادلة

$$د(س) = س - جتا س = ٠$$

فيوجد أن $دَ(س) = ١ + جا س$ و $دً(س) = جتا س$

فاذا جعل س = ٠ تكون د(س) = -١ واذا جعل س = $\frac{ط}{٢}$ يكون د(س) = +$\frac{ط}{٢}$ وحينئذ يكون للمعادلة جذر محصور بين ٠ و $\frac{ط}{٢}$ ولا يكون لها جذر خلافه محصور بين ٠ و $\frac{ط}{٢}$ حيث ان المشتقة لا تنعدم أبدا وحيث انه من بعد $\frac{ط}{٢}$ يكون س أكبر من الواحد فلا يكون للمعادلة جذور موجبة خلاف الجذر المحصور بين ٠ و $\frac{ط}{٢}$ بل لا يكون لها جذور سالبة ويعلم من ذلك انه ليس للمعادلة المفروضة سوى جذر واحد حقيقى وان هذا الجذر محصور بين ٠ و ١

ولاجل اجراء الوضع نستعمل جزء جداول كاليت الذى يتحصل به على الجيوب الطبيعية على حسب التقسيم الجديد للمحيط والجزء الذى به يتحصل على أطوال هذه الاقواس فاذا تتبع الجدولان يشاهد ان تغير الاشارة يحصل من ٤٧° الى ٤٨° هكذا

س = ٤٧° = ٠,٧٣٨ جتا س = ٠,٧٤٠ د(س) = -٠,٠٠٢

س = ٤٨° = ٠,٧٥٤ جتا س = ٠,٧٢٩ د(س) = +٠,٠٢٥

وحينئذ يكون الجذر محصورا بين ٤٧° و ٤٨° وقريبا جدا من أول هذين العددين وبالادخال بواسطة الاجزاء المتناسبة يوجد أن و = $\frac{٢}{٢٧}$ < ٠,١ وحينئذ يحتمل أن الجذر يكون محصورا بين ٤٧° و ٤٧°,١

وهاك حساب الوضع الجديد

س = ٤٧° = ٠,٧٣٨٢٧٤٢٧	س = ٤٧°,١ = ٠,٧٣٩٨٤٥٠٧
جتا س = ٠,٧٣٩٦٣١٠٩	جتا س = ٠,٧٣٨٥٧٣٠٢
د(س) = −٠,٠٠١٣٥٦٨٢	د(س) = +٠,٠٠١٢٧٢٠٥

واذن يكون الجذر محصورا بين ٤٧° و ٤٧°,١

وبواسطة طريقة نوتون يوجد المقدار التصحيحي وهو

و = − ٠,٠٠١٢٧٢٠٥ / ١,٦٧٤١٧٣٤٩ = −٠,٠٠٠٧٥٩٨٠١١١

ويقدر الخطأ بواسطة القانون

−ز < (ف² × ٠,١٧) / (١,٦٧ × ٢) < ف² × ٠,٢٣

وحيث كان المقدار المطلق لكمية ف أقل من ٠,٠٠٢ فيكون الخطأ الواقع أقل من (٠,٠٠٢)² × ٠,٢٣ أي أقل من ٠,٠٠٠٠٠١ ويستنتج من ذلك ان المقدار المطلق لكمية ف أقل من ٠,٠٠٠٧٦٠ + ٠,٠٠٠٠٠١ أي أقل من ٠,٠٠٠٨

فاذا وضع هذا المقدار في المقدار الجبري للخطأ يحدث

−ز < (٠,٠٠٠٨)² × ٠,٢٣ < ٠,٠٠٠٠٠٠١٥

وحينئذ يكون مقدار ف محصورا بين −٠,٠٠٠٧٥٩٨٠ و −٠,٠٠٠٧٥٩٩٦

وينتج من ذلك ان مقدار س يكون محصورا بين ٠,٧٣٩٠٨٥٢٨ و ٠,٧٣٩٠٨٥١١

وحينئذ اذا أخذ س = ٠,٧٣٩٠٨٥٢ تكون السبعة أرقام الاعشارية مضبوطة

بند ٣٠٢ (مثال ثالث) لتحل المعادلة

د(س) = س − ظا س = ٠

التي توجد في نظرية اهتزازات الاجسام المرنة وفي دراسة قوانين انتشار الحرارة فهنا

دَ(س) = − ظا² س و دً(س) = − (٢ ظا س) / (جتا² س)

فيشاهد في أول الامر ان جذور المعادلة متساوية مثنى ومختلفة الاشارة فاذا غير س من ٠ الى ط/٢ فحيث ان القوس يكون أصغر من ظله فتكون الدالة سالبة واذا غير س من ط/٢ الى ط فحيث ان الظل يكون سالبا فتكون الدالة موجبة ويعلم من ذلك انه لا يوجد جذور من ٠ الى ط ومتى غير س من ط الى ٣ط/٢ تمر الدالة من مقدار

موجب

موجب الى مقدار سالب وحينئذ يكون للدالة جذر حقيقى فى هذه المسافة ولا يوجد غيره فيها حيث أن المشتقة لاتنعدم واذا غير سه من ٣ط/٢ الى ٢ط فحيث ان الظل يكون سالبا فتبقى الدالة موجبة فاذا استمر الحال على ازدياد سه يوجد كذلك جذران حقيقيان فى كل محيط أولهما فى الربع الاول ثانيهما فى الربع الثالث ويعلم من ذلك ان للمعادلة جذور حقيقية لاحصر لعددها

ولنقصد لحساب صغر جذر موجب فنقول انه حينما يكون سه=ط+ط/٤ يكون الظل مساويا للواحد وتكون الدالة موجبة وحينئذ يكون الجذر محصورا بين ٥ط/٤ و ٣ط/٢ أعنى يكون محصورا بين ٣,٩ و ٥ فلنجرب العدد المتوسط وهو ٤,٥ ولنضع سه=ط+سَه فحينما يكون سه=٤,٥ يكون القوس سَه مساويا

١,٣٥٨٤ ويكون مقداره ٥٠َ ٧٧ْ تقريبا (درج ستينى) فيبحث فى الجداول عن لوغاريتم الظل ثم عن مقدار نفس الظل فيوجد انه

حينما يكون سه=٤,٥ يكون سَه=٥٠َ ٧٧ْ ويكون لو ظا سَه=٠,٦٦٦٣٥٣٧
ويكون ظا سَه=٤,٦٣٨٤ وتكون د(سه)=-٠,١٣٨٤

وحيث كان الناتج سالبا فيكون عدد ٤,٥ كبيرا ولنجرب ٤,٤ فنجد انه

حينما يكون سه=٤,٤ يكون سَه=٦ ٧٢ْ ويكون لو ظا سَه=٠,٤٩٠٨٠٩٣
ويكون ظا سَه=٣,٠٩٦٠ وتكون د(سه)=+١,٣٠٤٠

ويعلم من ذلك ان الجذر محصور بين ٤,٤ و ٤,٥ وانه قريب جدا من هذا العدد الاخير

وبالادخال بواسطة الاجزاء المتناسبة يوجد المقدار التصحيحى وهو ٠,٠٩ فنجرب حينئذ العدد ٤,٤٩ فنجد انه

حينما يكون سه=٤,٤٩ يكون سَه=٣٠ً ١٥َ ٧٧ْ ويكون ظا سَه=٤,٤٢٢٣
وتكون د(سه)=٠,٠٦٧٧

وحينما يكون سه=٤,٥٠ يكون سَه=٥٠ً ٤٩َ ٧٧ْ ويكون ظا سَه=٤,٦٣٧٢
وتكون د(سه)=-٠,١٣٧٢

واذن يكون الجذر محصورا بين ٤,٤٩ و ٤,٥٠ وبالادخال بواسطة الاجزاء المتناسبة يوجد أن وَ=٠,٠٠٣٣ بخطأ بالقلة وحينئذ يجرب العدد ٤,٤٩٣٤ فيوجد انه

حينما يكون س=٤٫٤٩٣٤ يكون سَ=٣٫٠٣ أ ٢٧ ٧٧

ويكون ظاسَ=٤٫٤٩٣٢١٠ ويكون ى(س)=+٠٫٠٠٠١٩٠

وحينما يكون س=٤٫٤٩٣٥ يكون سَ=٩٫٠٣ ٢٧ ٧٧

ويكون ظاسَ=٤٫٤٩٠٣٢٨ وتكون ى(س)=-٠٫٠٠١٨٢٨

وحينئذ يكون الجذر محصورا بين ٤٫٤٩٣٤ و ٤٫٤٩٣٥ ويكون قريبا جدا من أول هذين العددين وبالادخال يوجد أن

وَ/٠٫٠٠٠١ = ١٩٠/٢٠١٨ وحينئذ يكون

س=٤٫٤٩٣٤٠٩٤

بند ٣٠٣ (مثال رابع) لتمكن المعادلة

هـ^س - هـ^-س = ح س

التي يحتاج لها في اريد البحث عن صورة توازن سلسلة ثقيلة فنضع ح=١٢٫٠٤ فيكون

ى(س) = هـ^س - هـ^-س - ١٢٫٠٤×س = ٠

ويكون ىَ(س) = هـ^س + هـ^-س - ١٢٫٠٤

ويكون ىً(س) = هـ^س - هـ^-س

ويحسب هـ^س و هـ^-س بواسطة القانونين

لوهـ^س = م س = ٠٫٤٣٤٢٩٤٤٨٢×س ، لوهـ^-س = -لوهـ^س

(م مقياس الجملة اللوغاريتمية المعتادة)

فالمعادلة محققة بالمقدار س=٠ الآن لما جذر وجب خلاف ذلك نتصدى لتعيينه فنقول من الواضح انه يوجد بالمقدار س=١ ناتج سالب وكذا بالمقدار س=٢ فلنعوض س بالاعداد التالية فنجد انه

حينما يكون س=٣ يكون هـ^س =٢٠ ويكون ى(س)=-١٧

وحينما يكون س=٤ يكون هـ^س =٥٥ ويكون ى(س)=+٥

وحينئذ يكون الجذر محصورا بين ٣ و ٤ وبالادخال يوجد أن وَ=٠٫٨ فلنجرب ٣٫٨ فنجد انه

حينما

حينما يكون سه = ٣٫٨ يكون هـ^سه = ٤٤٫٧٠١٢ ويكون هـ^-سه = ٠٫٠٢٢٤
ويكون ء(سه) = −٢٫٩٧٣٢
وحينما يكون سه = ٣٫٩ يكون هـ^سه = ٤٩٫٤٠٢٥ ويكون هـ^-سه = ٠٫٠٢٠٢
ويكون ء(سه) = +٠٫٤٧٦٣
وحينئذ يكون الجذر محصورا بين ٣٫٨ و ٣٫٩
وبواسطة طريقة التقريب المنسوبة لنوتون يوجد أن

$$\text{و} = -\frac{٠٫٠٤٧٦٣}{٣٦٫٨٨٤٧} = -)))٠٫٠٠١٢٩١$$

ويكون

$$-\text{ز} < \frac{\text{ف}^٢\,\text{ءً}(٣٫٩)}{٢\,\text{ءَ}(٣٫٩)} < \text{ف}^٢ \times ٠٫٧$$

وحيث كانت الكمية ف أقل من ٠٫١ فيكون الخطأ ـ ز أقل من ٠٫٠٠٧
وينتج من ذلك ان مقدار ـ ف أصغر من ٠٫٠١٣ + ٠٫٠٠٧ أى أصغر من ٠٫٠٢
وبموجب ذلك يكون

$$-\text{ز} < (٠٫٠٢)^٢ \times ٠٫٧ = ٠٫٠٠٠٢٨$$

وينتج من ذلك ان مقدار ف محصور بين −٠٫٠١٢٩١ و −٠٫٠١٣٢ فيؤخذ
ف = −٠٫٠١٣ ويكون سه = ٣٫٨٨٧ (والثلاثة ارقام الاعشارية مضبوطة)

بحث ٣٠٤ (مثال خامس) تعيين حركة أى كوكب سيار أو أى كوكب من ذوات الذنب يرجع الى حل المعادلة

$$\text{ع} - \text{هـ}\ \text{جا}\ \text{ع} = \text{ك}$$

التى فيها حرف ك رمز زاوية معلومة وحرف ع رمز زاوية يطلب البحث عنها وحرف هـ رمز للاختلاف المركزى هـ للمدار مقسوما على جا ١ً

ومتى استحصل على هذه المعادلة يكون حرفا ك , ع دالين على طولى قوسين فتحول هذه المعادلة الى معادلة أخرى يكون طولا القوسين مقدرين فيها الى زاويتين ولذلك نرمز بحرف سه للعدد الدال على طول أى قوس بفرض أخذ نصف القطر وحدة فيعلم انه عند انشاء جداول الخطوط المساحية قد أخذ طول القوس الذى مقداره ثانية واحدة جيبا

للزاوية التى مقدارها ثانية واحدة وحينئذ يكون الخارج سَه = سه/جا أً دالا على عدد مرات احتواء الزاوية المطابقة للقوس سه على الزاوية التى مقدارها ثانية واحدة ويعلم من ذلك انه لاجل تحويل أى قوس الى زاوية (بفرض أخذ الزاوية التى مقدارها أً واحدة) يكفى انه يقسم على جا أً وحينئذ اذا قسمت جميع حدود المعادلة ى − هـ جا ى = ك على جا أً تحصل المعادلة ىَ − هـ/جا أً جا ىَ = كَ

ومتى لزم تعيين حركة الكواكب السيارة التى لمداراتها على العموم اختلافات مركزية صغيرة جدا يمكن حل المعادلة بواسطة طريقة التقريبات المتتالية لاننا اذا كتبنا المعادلة بالصورة

ى = ك + هَ جا ى

فباهمال الحد الثانى من الطرف الثانى يوجد مقدار أول تقريبى وهو ى١ = ك فاذا وضعنا هذا المقدار فى الطرف الثانى يوجد مقدار ثان وهو ى١ = ك + هَ جا ك أكثر قربا من المقدار الاول فاذا وضعنا هذا المقدار أيضا فى الطرف الثانى يوجد مقدار ثالث وهو ى٢ = ك + هَ جا ى١ أكثر قربا عن المقدارين الاولين وهلم جرا فليكن

ك = ٦ر٥٤ ٤٨ ٦٢ , هـ = ٠١٦٧٩٢٢٦ر٠ (هذا المقدار هو الاختلاف المركزى لمدار الارض) فيكون لو هَ = ٣٫٥٣٩٥٣٤٣ ويوجد أن

هَ جا ك = ٨ر١١ ٥١ ٠ , ى١ = ٤ر٦ ٤٠ ٦٣ ,

هَ جا ى١ = ٥ر٥٥ ٥١ ٠ , ى٢ = ١ر٠١ ٤٠ ٦٣ ,

هَ جا ى٢ = ٧ر٥٣ ٥١ ٠ , ى٣ = ٣ر٠١ ٤٠ ٦٣

ويشاهد أن المقادير التصحيحية تصغر شيأ فشيأ ولا يؤثر المقدار التصحيحى التالى على أعشار الثوانى

(تمرينات)

(الاول) المطلوب تقسيم نصف دائرة الى قسمين متكافئين بمستقيم يوازى للقطر

(الثانى)

(الثانى) المطلوب حساب الجذور الحقيقية للمعادلات

$$(4-3\,\text{س}^2)\,\text{جاس}-4\,\text{س}\,\text{جتاس}=0 \quad \text{و} \quad (1)$$

$$(\text{هـ}^{\text{س}}+\text{هـ}^{-\text{س}})\,\text{جتاس}-2=0 \quad \text{و} \quad (2)$$

$$(\text{هـ}^{\text{س}}+\text{هـ}^{-\text{س}})\,\text{جتاس}+2=0 \quad \text{و} \quad (3)$$

$$1-\text{س}+\frac{\text{س}^2}{(1\times2)^2}-\frac{\text{س}^3}{(1\times2\times3)^2}+\frac{\text{س}^4}{(1\times2\times3\times4)^2}-\cdots=0 \quad \text{و} \quad (4)$$

$$1-\frac{\text{س}}{1}+\frac{\text{س}^2}{3\times2^2}-\frac{\text{س}^3}{4(2\times3)^2}+\frac{\text{س}^4}{5(2\times3\times4)^2}-\cdots=0 \quad \text{و} \quad (5)$$

وهذه المعادلات توجد فى مسائل متنوعة من علمى الميكانيكا والطبيعة الرياضية

(الفصل السادس)

(فى تحليل الكسور الجذرية)

بـ ٣٠٥ د الكسر الجذرى هو كسر جبرى حداه دالتان صحيحتان بالنسبة لحرف واحد فيهما مثل س فليكن $\frac{\text{د}(\text{س})}{\text{ء}(\text{س})}$ كسرا من هذا القبيل فيمكننا ان نفرض دائما ان هذا الكسر لا يقبل الاختصار لانه اذا اشتركت عوامل بين كثيرتى الحدود المركبتين لحديه يمكن حذفها ومتى كانت درجة البسط أعلا من درجة المقام تجرى عملية القسمة مع الترتيب بالنسبة للقوى التنازلية لحرف س وبذلك يتحصل خارج صحيح مصحوب بكسر بسطه بدرجة أقل من درجة مقامه فاذا صرف النظر عن هذا الجزء الصحيح يبقى كسر غير قابل للاختصار مثل $\frac{\text{د}(\text{س})}{\text{ء}(\text{س})}$ بسطه بدرجة أقل من درجة مقامه ولنرمز بحرف م لدرجة المقام فيكون البسط فى الغاية بدرجة م−١

(فى التحليل فى حالة الجذور البسيطة)

بـ ٣٠٦ د لنفرض فى أول الامر انه ليس للمعادلة ء(س)=٠ جذور متساوية ولنرمز بحروف ح و ء و هـ و ... و ل للجذور التى عددها م لهذه المعادلة ولنضع

$$\text{ى}(\text{س})=(\text{س}-\text{ح})\,\text{ى}_{١}(\text{س})$$

ولنعوض س بالكمية $\text{ح}+(\text{س}-\text{ح})$ ثم نعتبر $\text{س}-\text{ح}$ زيادة ونحلل كثيرتي الحدود $\text{د}(\text{س})$ و $\text{ى}_{١}(\text{س})$ على حسب القوى التصاعدية لكمية $\text{س}-\text{ح}$ فنجد أن

$$\text{د}(\text{س})=\text{د}(\text{ح}+\overline{\text{س}-\text{ح}})=\text{د}(\text{ح})+\text{دَ}(\text{ح})\frac{\text{س}-\text{ح}}{١}+\cdots \quad \text{و}$$

$$\text{ى}_{١}(\text{س})=\text{ى}_{١}(\text{ح}+\overline{\text{س}-\text{ح}})=\text{ى}_{١}(\text{ح})+\text{ى}'_{١}(\text{ح})\frac{\text{س}-\text{ح}}{١}+\cdots$$

فاذا قسمنا كثيرة الحدود الاولى على كثيرة الحدود الثانية ورتبنا خارج القسمة بالنسبة للقوى التصاعدية لكمية $\text{س}-\text{ح}$ يكون الحد الاول من خارج القسمة هو $\frac{\text{د}(\text{ح})}{\text{ى}_{١}(\text{ح})}$ ولنرمز بحرف $\text{ح}_{١}$ لهذا الحد الاول فبضرب المقسوم عليه في $\text{ح}_{١}$ وطرح الناتج من المقسوم يوجد باق لا يشتمل على حد ثابت فاذا اخذ $\text{س}-\text{ح}$ عاملا مشتركا يمكن بيان هذا الباقي بكمية $(\text{س}-\text{ح})\,\text{د}_{١}(\text{س})$ وحيث اننا قد طرحنا الحاصل $\text{ح}_{١}\,\text{ى}_{١}(\text{س})$ الذي هو بدرجة م−١ من المقسوم الذي هو في الغاية بدرجة م−١ واخذنا $\text{س}-\text{ح}$ مضروبا مشتركا فتكون كثيرة الحدود $\text{د}_{١}(\text{س})$ بدرجة م−٢ في الغاية فاذا اوقفت عملية القسمة بهذا الحد الاول يحدث

$$\frac{\text{د}(\text{س})}{\text{ى}_{١}(\text{س})}=\text{ح}_{١}+\frac{(\text{س}-\text{ح})\,\text{د}_{١}(\text{س})}{\text{ى}_{١}(\text{س})}$$

وبقسمة الطرفين على $\text{س}-\text{ح}$ يحدث

$$\frac{\text{د}(\text{س})}{\text{ى}(\text{س})}=\frac{\text{ح}_{١}}{\text{س}-\text{ح}}+\frac{\text{د}_{١}(\text{س})}{\text{ى}_{١}(\text{س})}$$

وحينئذ يكون الكسر المفروض مساويا لكسر أول بسيط وهو $\frac{\text{ح}_{١}}{\text{س}-\text{ح}}$ زائدا عليه كسر جذري وهو $\frac{\text{د}_{١}(\text{س})}{\text{ى}_{١}(\text{س})}$ صورته كصورة الكسر الاول الا انه اخفض منه

في

في الدرجة لان المقام $\text{ء}_1(\text{س})$ بدرجة م–١ والبسط بدرجة م–٢ في الغاية وغير ذلك فان هذا الكسر غير قابل للاختصار كالكسر المفروض لانه اذا كان لحديه عامل أولي فان هذا العامل لايكون الا احد عوامل $\text{ء}_1(\text{س})$ وليكن س–ء مثلا وحيث ان هذا العامل يقسم $\text{ج}\,\text{ء}_1(\text{س})$ ويقسم $(\text{س}-\text{ح})\,\text{د}_1(\text{س})$ فيقسم مجموعهما وهو د(س) وهذا مستحيل حيث فرض ان جميع عوامل ء(س) لاتقسم د(س) وماذكرناه يطبق على الكسر $\frac{\text{د}_1(\text{س})}{\text{ء}_1(\text{س})}$ فاذا وضع $\text{ء}_1(\text{س})=(\text{س}-\text{ء})\,\text{ء}_2(\text{س})$ يحدث

$$\frac{\text{د}_1(\text{س})}{\text{ء}_1(\text{س})}=\frac{\text{ء}_1}{\text{س}-\text{ء}}+\frac{\text{ء}_2(\text{س})}{\text{ء}_2(\text{س})}$$

والكسر الجديد غير قابل للاختصار كذلك ومقامه بدرجة م – ٢ وبسطه بدرجة م – ٣ في الغاية ومثل ذلك يكون

$$\frac{\text{د}_2(\text{س})}{\text{ء}_2(\text{س})}=\frac{\text{هـ}_1}{\text{س}-\text{هـ}}+\frac{\text{د}_3(\text{س})}{\text{ء}_3(\text{س})}$$

وباستمرار العمل بهذه الكيفية يتوصل اخيرا الى كسر بدرجة أولى ويكون

$$\frac{\text{د}_{\text{م}-1}(\text{س})}{\text{ء}_{\text{م}-1}(\text{س})}=\frac{\text{ل}_1}{\text{س}-\text{ل}}$$

فاذا اضيفت جميع هذه المتساويات الى بعضها تمحى الكسور المتوسطة ويكون

$$\frac{\text{د}(\text{س})}{\text{ء}(\text{س})}=\frac{\text{ج}_1}{\text{س}-\text{ح}}+\frac{\text{ء}_1}{\text{س}-\text{ء}}+\cdots+\frac{\text{ل}_1}{\text{س}-\text{ل}}$$

وحينئذ يتحلل الكسر الجذري الى مجموع كسور بسيطة مقاماتها على التناظر هي العوامل الاولية التي يتركب منها مقام الكسر المفروض وبسوطها كميات ثابتة

بـ٣٠٧د ولنثبت الآن على ان الكسر المفروض لايمكن تحليله الا الى مجموعة واحدة من الكسور البسيطة بان نثبت ان اي مجموعتي كسور بسيطة مثل

$$\frac{\text{ج}_1}{\text{س}-\text{ح}}+\frac{\text{ء}_1}{\text{س}-\text{ء}}+\cdots$$ و

$$\frac{ج'_1}{س-ج'}+\frac{د'_1}{س-د'}+\cdots$$

متساويتين بجميع مقادير س تكونان مطابقتين لبعضهما فنقول اذا ضربنا الطرفين فى س ـ ج يحدث

$$ج_1+(س-ج)\left[\frac{د_1}{س-د}+\frac{ه_1}{س-ه}+\cdots\right]$$

$$=(س-ج)\left[\frac{ج'_1}{س-ج'}+\frac{د'_1}{س-د'}+\cdots\right]$$

ولنعط الآن لحرف س المقدار المخصوص وهو ج فيؤل الطرف الاول الى $ج_1$ فاذا لم يكن أى مقام من مقامات كسور المجموعة الثانية مساويا بالكمية س ـ ج ينعدم الطرف الثانى متى جعل فيه س = ج وحينئذ يلزم ان يكون أحد هذه المقامات مساويا بالكمية س ـ ج فلنفرض مثلا ان ج = ج' فيكون

$$ج_1+(س-ج)\left[\frac{د_1}{س-د}+\frac{ه_1}{س-ه}+\cdots\right]$$

$$=ج'_1+(س-ج)\left[\frac{د'_1}{س-د'}+\frac{ه'_1}{س-ه'}+\cdots\right]$$

فاذا جعل س = ج يستنتج ان $ج'_1=ج_1$ ويعلم من ذلك ان الكسر $\frac{ج_1}{س-ج}$ الذى هو من المجموعة الاولى يكون جزأ من المجموعة الثانية فاذا حذفنا هذين الكسرين المتساويين تبقى مجموعتان متساويتان ويكون

$$\frac{د_1}{س-د}+\frac{ه_1}{س-ه}+\cdots=\frac{د'_1}{س-د'}+\frac{ه'_1}{س-ه'}+\cdots$$

وبمثل ذلك يثبت ان الكسر $\frac{د_1}{س-د}$ الذى هو أحد كسور المجموعة الاولى يكون أحد كسور المجموعة الثانية وهلم جرا وحينئذ تكون المجموعتان متكافئتين

بب ٣٠ ش د (حساب البسوط) قد وجدنا أن

$$ج_1=$$

$$ح_1=\frac{د(ح)}{ى_1(ح)}$$

فيكون البسط الاول وهو $ح_1$ هو مقدار الكسر

$$\frac{د(س)}{\frac{ى(س)}{س-ح}}$$

متى جعل فيه $س=ح$ وبمثل ذلك يكون البسط الثانى وهو $ى_1$ هو مقدار الكسر

$$\frac{د(س)}{\frac{ى(س)}{س-ى}}$$

متى جعل فيه $س=ى$ وهكذا

ويمكن كذلك حساب هذه الثوابت بواسطة مشتقة الدالة $ى(س)$ لاننا قد وضعنا

$$ى(س)=(س-ح)\,ى_1(س)$$

فاذا أخذنا مشتقى الطرفين يحدث

$$ى'(س)=ى_1(س)+(س-ح)\,ى_1'(س)$$

وبجعل $س=ح$ يحدث

$$ى'(ح)=ى_1(ح)$$

ويستنتج من ذلك أن

$$ح_1=\frac{د(ح)}{ى'(ح)}$$

وبمثل ذلك يوجد أن

$$ى_1=\frac{د(ى)}{ى'(ى)}\ ،\ ه_1=\frac{د(ه)}{ى'(ه)}\ ،\ \ldots\ldots$$

ويعلم من ذلك ان بسوط الكسور البسيطة هى المقادير المختلفة التى يأخذها الكسر $\frac{د(س)}{ى'(س)}$ متى عوض س فيه على التوالى بكل من الجذور ح ، ى ، ه ، .... ، ل

التى هى جذور المعادلة $\text{ء}(\text{س})=٠$

(أمثلة)

(الاول) ليكن المطلوب تحليل الكسر

$$\frac{\text{د}(\text{س})}{\text{ء}(\text{س})}=\frac{٢\text{س}^{٣}+٥\text{س}^{٢}-٦}{\text{س}^{٤}+٢\text{س}^{٣}-\text{س}^{٢}-٢\text{س}}$$

فبحل المعادلة

$$\text{س}^{٤}+٢\text{س}^{٣}-\text{س}^{٢}-٢\text{س}=٠$$

توجد الاربعة جذور البسيطة وهى ٠ , ١ , −١ , −٢ وحينئذ يحلل هذا الكسر الجذرى الى أربعة كسور بسيطة بالصورة

$$\frac{\text{د}(\text{س})}{\text{ء}(\text{س})}=\frac{\text{ح}_{١}}{\text{س}}+\frac{\text{ء}_{١}}{\text{س}-١}+\frac{\text{هـ}_{١}}{\text{س}+١}+\frac{\text{و}_{١}}{\text{س}+٢}$$

ولاجل حساب البسوط نستعمل المشتقة وهى

$$\text{ءَ}(\text{س})=٤\text{س}^{٣}+٦\text{س}^{٢}-٢\text{س}-٢$$

فنجد أن

$$\text{ح}_{١}=\frac{\text{د}(٠)}{\text{ءَ}(٠)}=\frac{-٦}{-٢}=٣ \quad \text{و}$$

$$\text{ء}_{١}=\frac{\text{د}(١)}{\text{ءَ}(١)}=\frac{١}{٦} \quad \text{و}$$

$$\text{هـ}_{١}=\frac{\text{د}(-١)}{\text{ءَ}(-١)}=\frac{-٣}{٢} \quad \text{و}$$

$$\text{و}_{١}=\frac{\text{د}(-٢)}{\text{ءَ}(-٢)}=\frac{١}{٣}$$

وحينئذ يكون

$٤\text{س}^{٣}$

$$\frac{3\text{س}^3+5\text{س}^2-6}{\text{س}^4+2\text{س}^3-\text{س}^2-2\text{س}}=\frac{3}{\text{س}}+\frac{\frac{1}{6}}{\text{س}-1}-\frac{\frac{3}{2}}{\text{س}+1}+\frac{\frac{1}{3}}{\text{س}+2}$$

(الثانى) ليكن المطلوب تحليل الكسر

$$\frac{\text{س}^2+1}{(\text{س}+1)(\text{س}-1)(\text{س}-2)(\text{س}-3)}$$

فالكسر المفروض يتحلل بهذه الكيفية وهى

$$\frac{\text{س}^2+1}{(\text{س}+1)(\text{س}-1)(\text{س}-2)(\text{س}-3)}=\frac{\text{ح}_1}{\text{س}+1}+\frac{\text{ء}_1}{\text{س}-1}+\frac{\text{ه}_1}{\text{س}-2}+\frac{\text{و}_1}{\text{س}-3}$$

ويمكن تعيين الثوابت مباشرة وبدون مساعدة أى قانون بواسطة طريقة المعاملات الغير المعينة لانه اذا ضرب الطرفان فى المقام تؤل المتساوية السابقة الى

$$\text{س}^2+1=\text{ح}_1(\text{س}-1)(\text{س}-2)(\text{س}-3)+\text{ء}_1(\text{س}+1)(\text{س}-2)(\text{س}-3)$$
$$+\text{ه}_1(\text{س}+1)(\text{س}-1)(\text{س}-3)+\text{و}_1(\text{س}+1)(\text{س}-1)(\text{س}-2)$$

وهذه المتساوية يجب حصولها مهما كان مقدار س فلنعط لحرف س على التعاقب مقدار كل من الجذور وهى -1 و 1 و 2 و 3 فتمحى جميع حدود الطرف الثانى ماعدا حدا واحدا وتوجد الارتباطات

$$2=-24\,\text{ح}_1 \quad \text{و} \quad 2=4\,\text{ء}_1 \quad \text{و} \quad 5=-3\,\text{ه}_1 \quad \text{و} \quad 10=8\,\text{و}_1$$

ومن هنا تستنتج مقادير الثوابت وهى

$$\text{ح}_1=-\frac{1}{12} \quad \text{و} \quad \text{ء}_1=\frac{1}{2} \quad \text{و} \quad \text{ه}_1=-\frac{5}{3} \quad \text{و} \quad \text{و}_1=\frac{5}{4}$$

(فى حالة الجذور المضاعفة)

بند ٣٠٩ لنفرض ان ح جذر للمعادلة $\text{ء}(\text{س})=0$ بدرجة تضعيف مقدارها ه ونضع

$$\text{ء}(\text{س})=(\text{س}-\text{ح})^{\text{ه}}\,\text{ء}_1(\text{س})$$

فبعد تحليل كثيرتى الحدود $\text{د}(\text{س})$ و $\text{ء}_1(\text{س})$ على حسب القوى التصاعدية لكمية $\text{س}-\text{ح}$ كما سبق يوجد أن

$$د(س) = د(ح + س - ح) = د(ح) + دَ(ح)\frac{س-ح}{1} + \cdots \quad و$$

$$ء_1(س) = ء_1(ح + س - ح) = ء_1(ح) + ءَ_1(ح)\frac{س-ح}{1} + \cdots$$

ولنقسم كثيرة الحدود الاولى على الثانية ونرتب الخارج على حسب القوى التصاعدية لكمية $س-ح$ ونستمر فى العملية الى حد بدرجة $ه-1$ ونفرض ان هذا الخارج هو

$$ج_0 + ج_1(س-ح) + ج_2(س-ح)^2 + \cdots + ج_{ه-1}(س-ح)^{ه-1}$$

فحيث ان جميع حدود باقى القسمة تحتوى على العامل $(س-ح)^ه$ فيمكن وضع هذا الباقى بالصورة $(س-ح)^ه د_1(س)$ واذن يكون

$$\frac{د(س)}{ء_1(س)} = ج_0 + ج_1(س-ح) + \cdots + ج_{ه-1}(س-ح)^{ه-1} + \frac{(س-ح)^ه د_1(س)}{ء_1(س)}$$

وبقسمة الطرفين على $(س-ح)^ه$ يحدث

$$\frac{د(س)}{ء(س)} = \frac{ج_0}{(س-ح)^ه} + \frac{ج_1}{(س-ح)^{ه-1}} + \cdots + \frac{ج_{ه-1}}{س-ح} + \frac{د_1(س)}{ء_1(س)}$$

وحيث ان المقسوم عليه وهو $ء_1(س)$ بدرجة $م-ه$ والخارج بدرجة $ه-1$ فيكون حاصل ضرب المقسوم عليه فى خارج القسمة بدرجة $م-1$ وحيث ان المقسوم وهو $د(س)$ بدرجة $م-1$ فى الغاية فيكون الفرق أو باقى القسمة بدرجة $م-1$ فى الغاية وحيث أخذ $(س-ح)^ه$ مضروبا مشتركا فينتج من ذلك ان كثيرة الحدود $د_1(س)$ تكون فى الغاية بدرجة $م-ه-1$ ومن الواضح ان كثيرتى الحدود $ء_1(س)$ و $د_1(س)$ أوليتان مع بعضهما لانه اذا كان لهما عامل مشترك فان هذا العامل يقسم $ء(س)$ و $د(س)$ وهذا مخالف للفرض

ويعلم من ذلك انه يتحصل بالعامل المضاعف وهو $(س-ح)^ه$ سلسلة كسور بسيطة عددها

عددها هـ ويحتاج الامر لتحليل الكسر الغير القابل للاختصار وهو $\frac{د_{١}(س)}{ء_{١}(س)}$ الذى مقامه بدرجة م-هـ وبسطه بدرجة م-هـ-١ فى الغاية

ولنفرض ان للمعادلة ء(س) جذرا ثانيا ء مضاعفا بدرجة ح ونضع

$$ء_{١}(س)=(س-ء)^{ح}ء_{٢}(س)$$

فبمثل ما تقدم يحدث

$$\frac{د_{١}(س)}{ء_{١}(س)}=\frac{ء_{٠}}{(س-ء)^{ح}}+\frac{ء_{١}}{(س-ء)^{ح-١}}+\cdots+\frac{ء_{ح-١}}{س-ء}+\frac{د_{٢}(س)}{ء_{٢}(س)}$$

واذا كان للمعادلة ء(س)=٠ جذر ثالث هـ مضاعف بدرجة ك يحدث أيضا

$$\frac{د_{٢}(س)}{ء_{٢}(س)}=\frac{هـ_{٠}}{(س-هـ)^{ك}}+\frac{هـ_{١}}{(س-هـ)^{ك-١}}+\cdots+\frac{هـ_{ك-١}}{س-هـ}+\frac{د_{٣}(س)}{ء_{٣}(س)}$$

واذا لم يكن للمعادلة المذكورة جذر آخر مضاعف فحيث ان كثيرة الحدود $ء_{٣}(س)$ لا تحتوى الا على عوامل بسيطة فبموجب ما تقرر سابقا يحدث

$$\frac{د_{٣}(س)}{ء_{٣}(س)}=\frac{و_{١}}{س-و}+\frac{ز_{١}}{س-ز}=+\cdots+\frac{ل_{١}}{س-ل}$$

وباضافة جميع هذه المتساويات الى بعضها يوجد أخيرا أن

$$\frac{د(س)}{ء(س)}=\frac{ح_{٠}}{(س-ح)^{هـ}}+\frac{ح_{١}}{(س-ح)^{هـ-١}}+\cdots+\frac{ح_{هـ-١}}{س-ح}$$

$$+\frac{ء_{٠}}{(س-ء)^{ح}}+\frac{ء_{١}}{(س-ء)^{ح-١}}+\cdots+\frac{ء_{ح-١}}{س-ء}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{و_{١}}{س-و}+\frac{ز_{١}}{س-ز}+\cdots\cdots+\frac{ل_{١}}{س-ل}$$

ويطابق لكل جذر مضاعف سلسلة من الكسور البسيطة والكسر الاول من كل

سلسلة يجب أن لا يكون معدوما وأما الكسور الاخر فيمكن أن تنعدم كلها أو بعضها لاننا اذا أجرينا عملية قسمة الكميتين $\text{د}(\text{س})$, $\text{ء}_1(\text{س})$ الكثيرتى الحدود المرتبتين كما ذكرنا لا يكون الحدان الاولان $\text{د}(\text{ح})$, $\text{ء}_1(\text{ح})$ معدومين وبناء على ذلك لا يكون الحد الاول وهو $\text{ح}_0=\frac{\text{د}(\text{ح})}{\text{ء}_1(\text{ح})}$ من خارج القسمة معدوما ولا لانهائيا وأما المعاملات الاخر فيمكن ان تكون معدومة

بند ٣١١ الكسر المفروض لا يمكن تحليله الا الى مجموعة واحدة من الكسور البسيطة ولاثبات ذلك نفرض أن

$$\frac{\text{ح}_0}{(\text{س}-\text{ح})^{\text{ه}}}+\frac{\text{ح}_1}{(\text{س}-\text{ح})^{\text{ه}-1}}+\cdots+\frac{\text{ء}_0}{(\text{س}-\text{ء})^{\text{ع}}}+\frac{\text{ء}_1}{(\text{س}-\text{ء})^{\text{ع}-1}}+\cdots \quad \text{و}$$

$$\frac{\text{ح}'_0}{(\text{س}-\text{ح}')^{\text{ه}'}}+\frac{\text{ح}'_1}{(\text{س}-\text{ح}')^{\text{ه}'-1}}+\cdots+\frac{\text{ء}'_0}{(\text{س}-\text{ء}')^{\text{ع}'}}+\frac{\text{ء}'_1}{(\text{س}-\text{ء}')^{\text{ع}'-1}}+\cdots$$

مجموعتان متساويتان مهما كان مقدار س ونضرب كلا من هاتين المجموعتين فى $(\text{س}-\text{ح})^{\text{ه}}$ ونجعل $\text{س}=\text{ح}$ فتؤول المجموعة الاولى الى ح_0 فاذا لم يكن مقام أى كسر من كسور المجموعة الثانية قوة لكمية $\text{س}-\text{ح}$ ينعدم الطرف الثانى حينما نجعل فيه $\text{س}=\text{ح}$ وحينئذ يلزم أن يكون لبعض كسور المجموعة الثانية مقامات تكون قوى لكمية $\text{س}-\text{ح}$ فليكن $\text{ح}'=\text{ح}$ فأقول ان $\text{ه}'=\text{ه}$ لانه اذا اختلف الاسان عن بعضهما بأن كان ه مثلا أكبر من $\text{ه}'$ فبالضرب فى $(\text{س}-\text{ح})^{\text{ه}}$ يشاهد أنه متى جعل $\text{س}=\text{ح}$ يؤول الطرف الاول الى ح_0 بخلاف الطرف الثانى فانه ينعدم واذن يكون $\text{ه}'=\text{ه}$ كذلك وحينئذ تؤول المتساوية بعد الضرب فى $(\text{س}-\text{ح})^{\text{ه}}$ الى

$$\text{ح}_0+\text{ح}_1(\text{س}-\text{ح})+\cdots+(\text{س}-\text{ح})^{\text{ه}}\left\{\frac{\text{ء}_0}{(\text{س}-\text{ء})^{\text{ع}}}+\cdots\right\}$$
$$=\text{ح}'_0+\text{ح}'_1(\text{س}-\text{ح})+\cdots+(\text{س}-\text{ح})^{\text{ه}}\left\{\frac{\text{ء}'_0}{(\text{س}-\text{ء}')^{\text{ع}'}}+\cdots\right\}$$

فاذا

فاذا جعل $\text{سـ} = \text{د}$ يستنتج أن $\text{جـ} = \text{جـ}'$ ويعلم من ذلك أن الكسر الاول من المجموعة الاولى يوجد في المجموعة الثانية فاذا حذف هذان الكسران المتساويان وأعيدت هذه الادلة بالثاني يشاهد أن الكسر الثاني من المجموعة الاولى يوجد في المجموعة الثانية وهلم جرا وحينئذ تكون المجموعتان متطابقتين

(مثال)

ليكن المطلوب تحليل الكسر الجذري وهو

$$\frac{\text{د}(\text{سـ})}{\text{ى}(\text{سـ})} = \frac{٤\text{سـ}^{٣} - ٥\text{سـ} + ٢}{\text{سـ}^{٦} - \text{سـ}^{٥} - \text{سـ}^{٤} + \text{سـ}^{٣}}$$

حيث ان المقام وهو $\text{ى}(\text{سـ}) = \text{سـ}^{٣}(\text{سـ} - ١)^{٢}(\text{سـ} + ١)$

يشتمل على عامل ثلاثي وعلى عامل مزدوج وعلى عامل بسيط فيتحلل الى كسور بسيطة بهذه الكيفية

$$\frac{\text{د}(\text{سـ})}{\text{ى}(\text{سـ})} = \frac{\text{جـ}_{٠}}{\text{سـ}^{٣}} + \frac{\text{جـ}_{١}}{\text{سـ}^{٢}} + \frac{\text{جـ}_{٢}}{\text{سـ}} + \frac{\text{ى}_{٠}}{(\text{سـ} - ١)^{٢}} + \frac{\text{ى}_{١}}{\text{سـ} - ١} + \frac{\text{هـ}_{١}}{\text{سـ} + ١}$$

والنسب الثلاثة ثوابت التي تنسب للعامل الثلاثي وهو سـ ولذلك نرتب كثيري الحدود $\text{د}(\text{سـ})$ و $\text{ى}_{١}(\text{سـ})$ على حسب القوى التصاعدية الى سـ هكذا

$$\text{د}(\text{سـ}) = ٢ - ٥\text{سـ} + ٤\text{سـ}^{٣} \quad \text{و}$$

$$\text{ى}_{١}(\text{سـ}) = (\text{سـ} - ١)^{٢}(\text{سـ} + ١) = ١ - \text{سـ} - \text{سـ}^{٢} + \text{سـ}^{٣}$$

ثم نجري عملية القسمة ونستمر في العمل الى أن نتوصل الى الحد الذي بدرجة ثانية مع ملاحظة انه في هذا الحساب لافائدة في كتابة الحدود التي بدرجة اعلا من الدرجة الثانية وبذلك تصير العملية مختصرة هكذا

$٢ - ٥\text{سـ}$	$١ - \text{سـ} - \text{سـ}^{٢}$
$- ٣\text{سـ} + ٢\text{سـ}^{٢}$	$٢ - ٣\text{سـ} - \text{سـ}^{٢}$
$- \text{سـ}^{٢}$	

وحيث اننا فرضنا ان الخارج هو $\text{جـ}_{٠} + \text{جـ}_{١}\text{سـ} + \text{جـ}_{٢}\text{سـ}^{٢}$ فيكون

$$\text{جـ}_{٠} = ٢ \quad ، \quad \text{جـ}_{١} = -٣ \quad ، \quad \text{جـ}_{٢} = -١$$

ولنحسب الآن العاملين اللذين ينسبان للعامل المزدوج وهو سـ−١ فيمكننا ان نفرض اننا مبتدؤن بالتحليل من هذا العامل ثم نحلل د(سـ) و $\text{ء}_{١}(\text{سـ})$ الى الحدود التي بدرجة أولى ونهمل الحدود التالية هكذا

$$\text{د}(\text{سـ})=\text{د}(١+\overline{\text{سـ}-١})=\text{د}(١)+\text{د}'(١)(\text{سـ}-١)+\cdots=١+٧(\text{سـ}-١)+\cdots \quad \text{و}$$

$$\text{ء}_{١}(\text{سـ})=\text{سـ}^{٣}(\text{سـ}+١)=\text{سـ}^{٤}+\text{سـ}^{٣}=\text{ء}_{١}(١)+\text{ء}'_{١}(١)(\text{سـ}-١)+\cdots$$

$$=٢+٧(\text{سـ}-١)+\cdots$$

ثم نجرى عملية القسمة هكذا

$$\begin{array}{l|l} ١+٧(\text{سـ}-١) & ٢+٧(\text{سـ}-١) \\ \hline +\frac{٧}{٢}(\text{سـ}-١) & \frac{١}{٢}+\frac{٧}{٤}(\text{سـ}-١) \end{array}$$

وحيث قد فرض انه هذا الخارج هو $\text{ء}_{0}+\text{ء}_{١}(\text{سـ}-١)$ فيكون

$$\text{ء}_{0}=\frac{١}{٢} \quad \text{و} \quad \text{ء}_{١}=\frac{٧}{٤}$$

وأما من خصوص العامل $\text{هـ}_{١}$ الذى ينسب للعامل البسيط سـ+١ فاننا لو وضعنا $\text{ء}_{١}(\text{سـ})=\text{سـ}^{٣}(\text{سـ}-١)^{٢}$ يكون

$$\text{هـ}_{١}=\frac{\text{د}(-١)}{\text{ء}_{١}(-١)}=\frac{٣}{-٤}=-\frac{٣}{٤}$$

وحينئذ يكون

$$\frac{٤\text{سـ}^{٣}-٥\text{سـ}+٢}{\text{سـ}^{٦}-\text{سـ}^{٥}-\text{سـ}^{٤}+\text{سـ}^{٣}}=\frac{٢}{\text{سـ}^{٣}}-\frac{٣}{\text{سـ}^{٢}}-\frac{١}{\text{سـ}}+\frac{\frac{١}{٢}}{(\text{سـ}-١)^{٢}}+\frac{\frac{٧}{٤}}{\text{سـ}-١}-\frac{\frac{٣}{٤}}{\text{سـ}+١}$$

ويمكن كذلك استعمال طريقة المعاملات الغير المعينة ولذلك يوضع

$$\frac{٤\text{سـ}^{٣}-٥\text{سـ}+٢}{\text{سـ}^{٦}-\text{سـ}^{٥}-\text{سـ}^{٤}+\text{سـ}^{٣}}=\frac{\text{جـ}_{0}}{\text{سـ}^{٣}}+\frac{\text{جـ}_{١}}{\text{سـ}^{٢}}+\frac{\text{جـ}_{٢}}{\text{سـ}}+\frac{\text{ء}_{0}}{(\text{سـ}-١)^{٢}}+\frac{\text{ء}_{١}}{\text{سـ}-١}+\frac{\text{هـ}_{١}}{\text{سـ}+١}$$

ثم يحذف المقامات فتؤل هذه المتساوية الى

$$٤\text{سـ}^{٣}-٥\text{سـ}+٢=(\text{جـ}_{0}+\text{جـ}_{١}\text{سـ}+\text{جـ}_{٢}\text{سـ}^{٢})(\text{سـ}-١)^{٢}(\text{سـ}+١)$$

$$+\left\{\text{ء}_{0}+\text{ء}_{١}(\text{سـ}-١)\right\}\text{سـ}^{٣}(\text{سـ}+١)+\text{هـ}_{١}\text{سـ}^{٣}(\text{سـ}-١)^{٢}$$

وباعطاء

وباعطاء سـ مقادير ٠ و ١ و −١ على التوالى يحدث

$$\text{٢} = \text{جـ}_{٠} \ ، \ \text{١} = \text{٢ء}_{٠} \ ، \ \text{٣} = -\text{٤هـ}_{١}$$

واذن يكون

$$\text{جـ}_{٠} = \text{٢} \ ، \ \text{ء}_{٠} = \frac{\text{١}}{\text{٢}} \ ، \ \text{هـ}_{١} = -\frac{\text{٣}}{\text{٤}}$$

ولنأخذ مشتقى طرفى المتساوية السابقة فيحدث

$$\text{٢١سـ}^{٢} - \text{٥}$$

$$= (\text{جـ}_{١} + \text{٢جـ}_{٢}\text{سـ})(\text{سـ}-\text{١})^{٢}(\text{سـ}+\text{١}) + (\text{جـ}_{٠} + \text{جـ}_{١}\text{سـ} + \text{جـ}_{٢}\text{سـ}^{٢})\Big\{\text{٢}(\text{سـ}-\text{١})(\text{سـ}+\text{١})$$

$$+ (\text{سـ}-\text{١})^{٢}\Big\} + \text{ء}_{١}\text{سـ}^{٣}(\text{سـ}+\text{١}) + \Big\{\text{ء}_{٠} + \text{ء}_{١}(\text{سـ}-\text{١})\Big\}\Big\{\text{٣سـ}^{٢}(\text{سـ}+\text{١}) + \text{سـ}^{٣}\Big\}$$

$$+ \text{٣هـ}_{١}\text{سـ}^{٢}(\text{سـ}-\text{١})^{٢} + \text{٢هـ}_{١}\text{سـ}^{٣}(\text{سـ}-\text{١})$$

ولنجعل سـ = ٠ ثم سـ = ١ فى هذه المتساوية فيحدث

$$-\text{٥} = \text{جـ}_{١} - \text{جـ}_{٠} \ ، \ \text{٧} = \text{٢ء}_{١} + \text{٧ء}_{٠}$$

ومن هنا يكون

$$\text{جـ}_{١} = -\text{٣} \ ، \ \text{ء}_{١} = \frac{\text{٧}}{\text{٤}}$$

ولم يبق علينا الا أن نعين الثابت $\text{جـ}_{٢}$ ولذلك نأخذ المشتقة مرة ثانية ثم نجعل فيها سـ = ٠

ويكفى كتابة الحدود التى لا تشتمل على العامل سـ هكذا

$$\text{٢٤سـ} = \text{٢جـ}_{٢}(\text{سـ}-\text{١})^{٢}(\text{سـ}+\text{١}) + \text{٢جـ}_{١}\Big\{\text{٢}(\text{سـ}-\text{١})(\text{سـ}+\text{١}) + (\text{سـ}-\text{١})^{٢}\Big\}$$

$$+ \text{جـ}_{٠}\Big\{\text{٢}(\text{سـ}+\text{١}) + \text{٤}(\text{سـ}-\text{١})\Big\} + \cdots$$

فاذا جعل سـ = ٠ يحدث

$$\text{٠} = \text{٢جـ}_{٢} - \text{٢جـ}_{١} - \text{٢جـ}_{٠}$$

ومن هنا يكون

$$\text{جـ}_{٢} = -\text{١}$$

(في حالة الجذور التخيلية)

بند ٣١١ تحليل الكسر الجذري $\frac{\text{د}(\text{س})}{\text{ء}(\text{س})}$ يمكن اجراؤه بكيفية عمومية سواء كانت جذور المعادلة $\text{ء}(\text{س})=0$ حقيقية أو تخيلية ولبيان ذلك نفرض ان جميع معاملات كثيرتي الحدود المركبتين للكسر المفروض حقيقية ففي هذه الحالة اذا كان للمعادلة جذر تخيلي بسيط مثل $\text{ل}+\text{ح}\,\text{ء}$ يكون لها الجذر المقارن وهو $\text{ل}-\text{ح}\,\text{ء}$ ويطابق لهذين الجذرين في التحليل كسران بسيطان بالصورة

$$\frac{\text{ق}+\text{ر}\,\text{ء}}{\text{س}-\text{ل}-\text{ح}\,\text{ء}} \quad \text{و} \quad \frac{\text{ق}-\text{ر}\,\text{ء}}{\text{س}-\text{ل}+\text{ح}\,\text{ء}}$$

واعلم أن بسطي هذين الكسرين كميتان تخيليتان مقترنتان اذ من الواضح ان الثاني يستنتج من الاول بتغيير اشارة ء فاذا أريد اجتناب الكميات التخيلية من التحليل يكفي اضافة هذين الكسرين البسيطين الى بعضهما فيحدث

$$\frac{\text{ق}+\text{ر}\,\text{ء}}{\text{س}-\text{ل}-\text{ح}\,\text{ء}}+\frac{\text{ق}-\text{ر}\,\text{ء}}{\text{س}-\text{ل}+\text{ح}\,\text{ء}}=\frac{2\,\text{ق}(\text{س}-\text{ل})-2\,\text{ر}\,\text{ح}}{(\text{س}-\text{ل})^2+\text{ح}^2}$$

ويعلم من ذلك انه يطابق لكل ازدواج مكون من جذرين تخيليين بسيطين مقترنين كسر حقيقي بالصورة

$$\frac{\text{م}\,\text{س}+\text{ن}}{\text{س}^2+\text{ح}\,\text{س}+\text{ك}}$$

مقامه بدرجة ثانية وبسطه بدرجة أولى

بند ٣١٢ قد فرضنا فيما سبق ان كل جذرين تخيليين مقترنين بسيطان ولنفرض الآن انهما مضاعفان بدرجة ز ونفرض لاجل الاختصار أن $\text{س}^2+\text{ح}\,\text{س}+\text{ك}$ حاصل الضرب $(\text{س}-\text{ل})^2+\text{ح}^2$ للعاملين ذوي الحدين اللذين بدرجة أولى ولنثبت على أن الجزء الذي يطابق في التحليل لهذين الجذرين التخيليين المقترنين اللذين درجة تضعيفهما ز يمكن ايلولته الى مجموع كسور عددها ز بالصورة

$$\frac{\text{م}_0\,\text{س}+\text{ن}_0}{(\text{س}^2+\text{ح}\,\text{س}+\text{ك})^{\text{ز}}}+\frac{\text{م}_1\,\text{س}+\text{ن}_1}{(\text{س}^2+\text{ح}\,\text{س}+\text{ك})^{\text{ز}-1}}+\cdots+\frac{\text{م}_{\text{ز}-1}\,\text{س}+\text{ن}_{\text{ز}-1}}{\text{س}^2+\text{ح}\,\text{س}+\text{ك}}$$

بسوطها

بسوطها حقيقية وبدرجة أولى

ولنضع ء(س)=(س^{2}+ح س+ك) ء$_{1}$(س) فيمكن تعيين الثابتين م و ن بحيث تكون الكمية

د(س)−(م س+ن) ء$_{1}$(س) (١)

قابلة للقسمة على س^{2}+ح س+ك ويكفى لذلك انه تنعدم هذه الكمية حينما يجعل فيها س=ل+ى ء وحينما يجعل فيها س=ل−ى ء فاذا عوضنا س بكل من هذين المقدارين وفرضنا أن ق±ر ء و ق$_{1}$±ر$_{1}$ ء هما مقدار الدالتين د(س) و ء$_{1}$(س) المطابقان لهذين المقدارين نجد الارتباطين

(ق+ر ء)−{م(ل+ى ء)+ن}(ق$_{1}$+ر$_{1}$ ء)=٠ و

(ق−ر ء)−{م(ل−ى ء)+ن}(ق$_{1}$−ر$_{1}$ ء)=٠

وبمساواة كل من الجزء الحقيقي والجزء التخيلي بصفر ينتج أن

(ى ر$_{1}$−ل ق$_{1}$)م−ق$_{1}$ ن=−ق و

(ى ق$_{1}$+ل ر$_{1}$)م+ر$_{1}$ ن=ر

وهاتان المعادلتان المشتملتان على م و ن هما بدرجة أولى والمقام المشترك للمجهولين م و ن وهو ى(ق$_{1}^{2}$+ر$_{1}^{2}$) غير معدوم لانه اذا كان ى معدوما لا يكون الجذران تخيليين واذا كان ق$_{1}^{2}$+ر$_{1}^{2}$ معدوما تشتمل كثيرة الحدود ء$_{1}$(س) على العامل س^{2}+ح س+ك أيضا وحينئذ توجد الكميتين م و ن مقداران حقيقيان ومحدودان ومعينان

وحيث انه بهذه الكيفية تصير كثيرة الحدود (١) قابلة للقسمة على س^{2}+ح س+ك فلو رمزنا للخارج الصحيح بالرمز ء$_{2}$(س) يكون

د(س)−(م س+ن)ء$_{1}$(س)=(س^{2}+ح س+ك)ء$_{2}$(س)

ومن هنا يستنتج أن

$$\frac{د(س)}{ء(س)} = \frac{م\,س + ه}{(س^{٢} + ح\,س + ك)^{ر}} + \frac{ء_{٢}(س)}{(س^{٢} + ح\,س + ك)^{ر-١}\,ء_{١}(س)}$$

وبمثل ذلك يكون

$$\frac{ء_{٢}(س)}{(س^{٢} + ح\,س + ك)^{ر-١}\,ء_{١}(س)} = \frac{م_{١}\,س + ه_{١}}{(س^{٢} + ح\,س + ك)^{ر-١}} + \frac{ء_{٤}(س)}{(س^{٢} + ح\,س + ك)^{ر-٢}\,ء_{١}(س)}$$

وهلم جرا

(مثالان)

(الاول) المطلوب تحليل الكسر

$$\frac{د(س)}{ء(س)} = \frac{س^{٣} + ٥}{س^{٤} + س^{٣} + س^{٢} + س} = \frac{س^{٣} + ٥}{س(س+١)(س^{٢}+١)}$$

فللمقام جذران حقيقيان وهما ٠ و -١ وجذران تخيليان وهما $+ء$ و $-ء$ فاذا لم يرد استعمال كميات تخيلية فى التحليل يكتب

$$\frac{د(س)}{ء(س)} = \frac{ح_{١}}{س} + \frac{ء_{١}}{س+١} + \frac{ه_{١}\,س + و_{١}}{س^{٢}+١}$$

ولاجل حساب البسوط يفضل فى هذه الحالة استعمال طريقة المعاملات الغير المعينة وذلك ان يضرب الطرفان فى $ء(س)$ فتؤول المتساوية السابقة الى

$$س^{٣} + ٥ = ح_{١}(س+١)(س^{٢}+١) + ء_{١}\,س(س^{٢}+١) + (ه_{١}\,س + و_{١})\,س(س+١)$$

فاذا جعل $س=٠$ و $س=-١$ على التوالى يوجد أن

$$ح_{١} = ٥ \quad ، \quad ء_{١} = -٢$$

ولم يبق الا تعيين الثابتين $ه_{١}$ و $و_{١}$ المطابقين للجذرين التخيليين ولذلك تساوى معاملات $س^{٣}$ و $س^{٢}$ من طرفى المتساوية السابقة ببعضها فيحصل الارتباطان

$$١ = ح_{١} + ء_{١} + ه_{١} \quad و$$

$$٠ = ح_{١} + ه_{١} + و_{١}$$

ومنهما

ومنهما يستنتج أن

$$ه_{١}=-٢ \quad \text{و} \quad و=-٣$$

وحينئذ يكون

$$\frac{س^{٣}+٥}{س^{٤}+س^{٣}+س^{٢}+س}=\frac{٥}{س}-\frac{٢}{س+١}-\frac{٢س+٣}{س^{٢}+١}$$

(الثانى) المطلوب تحليل الكسر

$$\frac{١}{س(س^{٢}+١)^{٢}}$$

فللمقام جذر بسيط وهو ٠ وجذران تخيليان مقترنان مزدوجان وهما $\pm ء$ وحينئذ يتحلل الكسر بهذه الصورة وهى

$$\frac{١}{س(س^{٢}+١)^{٢}}=\frac{ح_{١}}{س}+\frac{ء_{١}س+ه_{١}}{(س^{٢}+١)^{٢}}+\frac{ءَ_{١}س+هَ_{١}}{س^{٢}+١}$$

فاذا محيت المقامات توجد هذه المتساوية وهى

$$١=ح_{١}(س^{٢}+١)^{٢}+(ء_{١}س+ه_{١})س+(ءَ_{١}س+هَ_{١})س(س^{٢}+١)$$

فاذا جعل $س=٠$ يوجد أن $ح_{١}=١$ وبمساواة معاملات القوى المتحدة بحرف س من الطرفين تحصل الارتباطات

$$ح_{١}+ءَ_{١}=٠ \quad \text{و} \quad هَ_{١}=٠ \quad \text{و} \quad ٢ح_{١}+ء_{١}+ءَ_{١}=٠ \quad \text{و} \quad ه_{١}+هَ_{١}=٠$$

ومن هنا يستنتج أن

$$ءَ_{١}=-١ \quad \text{و} \quad هَ_{١}=٠ \quad \text{و} \quad ء_{١}=-١ \quad \text{و} \quad ه_{١}=٠$$

وحينئذ يكون

$$\frac{١}{س(س^{٢}+١)^{٢}}=\frac{١}{س}-\frac{س}{(س^{٢}+١)^{٢}}-\frac{س}{س^{٢}+١}$$

(تمرينات)

(الاول) $$\frac{٢س+٣}{(٢س-٣)(٥س-٤)}=\frac{\frac{١٢}{٧}}{٢س-٣}-\frac{\frac{٢٣}{٧}}{٥س-٤}$$

(الثانى) $\frac{س}{س^{٢}+١١س+٣٠}=\frac{٦}{س+٦}-\frac{٥}{س+٥}$

(الثالث) $\frac{س}{د^{٣}-س^{٣}}=\frac{١}{٣د(د-س)}+\frac{س-د}{٣د(س^{٢}+دس+د^{٢})}$

(الرابع) $\frac{١}{س(س+١)(س+٢)}=\frac{١}{٢س}-\frac{١}{س+١}+\frac{١}{٢(س+٢)}$

(الخامس) $\frac{٤+٣س}{س(س-١)(س^{٢}+١)}=-\frac{٤}{س}+\frac{٧}{٢(س-١)}+\frac{س-٧}{٢(س^{٢}+١)}$

(السادس) $\frac{٣+س}{(٥-س)^{٢}}=\frac{٨}{(٥-س)^{٢}}-\frac{١}{٥-س}$

(السابع) $\frac{٥+٦س-٢س^{٢}}{(٣+٢س)^{٣}}=-\frac{١٧}{٢(٣+٢س)^{٣}}+\frac{٦}{(٣+٢س)^{٢}}-\frac{١}{٢(٣+٢س)}$

(الثامن) $\frac{٢+٣س}{(٤-س)^{٣}}=\frac{١٤}{(٤-س)^{٣}}-\frac{٣}{(٤-س)^{٢}}$

(التاسع) $\frac{١+س+س^{٢}+٣س^{٣}}{(١-س-٥س^{٢})^{٢}}=\frac{١}{٢٥}\cdot\frac{١٧+١٨س}{(١-س-٥س^{٢})^{٢}}+\frac{١}{٢٥}\cdot\frac{٨+١٥س}{١-س+٥س^{٢}}$

(العاشر) $\frac{١}{١+س^{٤}}=\frac{١}{٢\sqrt{٢}}\left[\frac{\sqrt{٢}+س}{١+\sqrt{٢}\,س+س^{٢}}+\frac{\sqrt{٢}-س}{١-\sqrt{٢}\,س+س^{٢}}\right]$

(الحادى عشر) $\frac{٧٠-١١٤س+١٤٣س^{٢}+١٠٧س^{٣}+٤٦س^{٤}+٨س}{(س+١)^{٥}(س+٧)}$

$=\frac{٧}{س+٧}+\frac{٥}{(س+١)^{٥}}+\frac{٣}{(س+١)^{٣}}+\frac{١}{س+١}$



(الباب الثامن)

(فى الحذف)

(الفصل الاول)

(فى الدوال المتماثلة)

بـ٣١٣د يقال ان المقدار الجبرى المشتمل على عدة حروف متماثل بالنسبة لهذه الحروف متى لم يتغير اذا ابدل فيه حرفان حيثما اتفق ببعضهما فالدالتان

$$\text{ح}^2+\text{ء}^2+\text{هـ}^2 \quad \text{و} \quad \text{حء}+\text{حهـ}+\text{ءهـ}$$

متماثلتان للحروف ح و ء و هـ ولانشتغل الا بالدوال المتماثلة الجذرية وحيث ان أى دالة متماثلة يمكن اعتبارها خارج قسمة دالتين متماثلتين صحيحتين فيكفى اعتبار الدوال الصحيحة

ومن الواضح انه اذا أبدل حرفان حيثما اتفق ببعضهما فى أى حد من أى دالة متماثلة صحيحة يحصل اما نفس الحد واما حد آخر من الدالة المذكورة وحينئذ يمكن تقسيم كل دالة متماثلة صحيحة الى عدة سلاسل تشتمل كل سلسلة منها على الحدود التى تستنتج بعضها من البعض الآخر بابدال الحروف ولاجل الاختصار لانكتب الاحدا واحدا من كل سلسلة فنكتب مثلا

$$(\text{ح}+\text{ء}+\text{هـ}+\cdots+\text{ل})^2 = \text{مجـ}\,\text{ح}^2 + 2\,\text{مجـ}\,\text{حء}$$

وعلامة مجـ تدل على اجتماع عدة حدود كالحد المكتوبة امامه

(فى مجموع القوى المتشابهة لجذور أى معادلة)

بـ٣١٤د لنعتبر معادلة جبرية مثل

$$\text{س}=\text{س}^{\text{م}}+\text{ج}_1\,\text{س}^{\text{م}-1}+\text{ج}_2\,\text{س}^{\text{م}-2}+\cdots+\text{ج}_{\text{م}}=0$$

ولتكن ح و ء و هـ و ...ل جذورها التى عددها م ولنبحث عن تركيب دالة متماثلة وصحيحة لهذه الجذور التى عددها م بواسطة معاملات المعادلة فقد علمنا سابقا بعض دوال متماثلة بسيطة جدا وهى مجموع الجذور وحاصل ضرب الجذور مثنى مثنى وحاصل ضربها ثلاث ثلاث وهلم جرا (بـ٢٣٧د) وحينئذ يكون

مجـ ح = − ج١
مجـ ح ء = ج٢
مجـ ح ء هـ = − ج٣ (٢)
. . . .
ح ء هـ . . . ل = ± جم

ولنبحث الآن عن مجموع القوى المتشابهة لجذور المعادلة ولاجل الاختصار نرمز بالرمز عِ ق للمجموع مجـ حق فهاك الطريقة التي اتبعها نيوتون وهي ان مشتقة الطرف الاول من المعادلة هي

سَ = م سـ^(م−١) + (م−١) ج١ سـ^(م−٢) + (م−٢) ج٢ سـ^(م−٣) + . . . + جم−١

وباعتبار كثيرة الحدود س حاصل ضرب العوامل ذات الحدين المطابقة للجذور يحدث أيضا (بند ١٤٧)

سَ = س/(سـ−ح) + س/(سـ−ء) + . . . + س/(سـ−ل)

وبحساب كل من الخوارج يوجد أن

س/(سـ−ح) = سـ^(م−١) + ح | سـ^(م−٢) + ح² | سـ^(م−٣) + ح³ | سـ^(م−٤) + . . . + ح^(م−١)
+ ج١ | + ج١ ح | + ج١ ح² | + ج١ ح^(م−٢)
+ ج٢ | + ج٢ ح | + ج٢ ح^(م−٣)
+ ج٣ | . . . .
+ جم−١

فاذا جمعت هذه الخوارج المختلفة يحدث

سَ = م سـ^(م−١) + ع١ | سـ^(م−٢) + ع٢ | سـ^(م−٣) + ع٣ | سـ^(م−٤) + . . . + عم−١
+ م ج١ | + ج١ ع١ | + ج١ ع٢ | + ج١ عم−٢
+ م ج٢ | + ج٢ ع١ | + ج٢ عم−٣
+ م ج٣ | . . . .
+ م جم−١

وبمقارنة مقدار المشتقة هذا بالاول تحصل الارتباطات الآتية وهي

ع١ + ج١

$$\left.\begin{array}{ll}\text{ع}_1+\text{ح}_1=0 & ,\\ \text{ع}_2+\text{ح}_1\text{ع}_1+2\text{ح}_2=0 & ,\\ \text{ع}_3+\text{ح}_1\text{ع}_2+\text{ح}_2\text{ع}_1+3\text{ح}_3=0 & ,\\ \cdots\cdots\cdots & ,\\ \cdots\cdots\cdots & ,\\ \text{ع}_{\text{م}-1}+\text{ح}_1\text{ع}_{\text{م}-2}+\text{ح}_2\text{ع}_{\text{م}-3}+\cdots+(\text{م}-1)\text{ح}_{\text{م}-1}=0 & \end{array}\right\}(3)$$

ومن هذا يستنتج أن

$$\left.\begin{array}{ll}\text{ع}_1=-\text{ح}_1 & \\ \text{ع}_2=\text{ح}_1^2-2\text{ح}_2 & ,\\ \text{ع}_3=-\text{ح}_1^3+3\text{ح}_1\text{ح}_2-3\text{ح}_3 & ,\\ \text{ع}_4=\text{ح}_1^4-4\text{ح}_1^2\text{ح}_2+4\text{ح}_1\text{ح}_3+2\text{ح}_2^2-4\text{ح}_4 & ,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \end{array}\right\}(4)$$

بند ٣١٥ ولاجل ايجاد مجموع القوى التي تزيد درجتها عن م-١ نتصور اننا عوضنا عن س في كثيرة الحدود س^ه على التوالي بكل من الجذور ح , ء , ... , ل واضفنا النواتج الى بعضها فيحدث

$$\text{ع}_{\text{م}+\text{ه}}+\text{ح}_1\text{ع}_{\text{م}+\text{ه}-1}+\text{ح}_2\text{ع}_{\text{م}+\text{ه}-2}+\cdots+\text{ح}_\text{م}\text{ع}_\text{ه}=0$$

فاذا أعطى لحرف ه مقادير ٠ و ١ و ٢ و ... الخ ولوحظ ان $\text{ع}_0=\text{م}$ تحصل الارتباطات

$$\left.\begin{array}{ll}\text{ع}_\text{م}+\text{ح}_1\text{ع}_{\text{م}-1}+\text{ح}_2\text{ع}_{\text{م}-2}+\cdots+\text{م}\,\text{ح}_\text{م}=0 & ,\\ \text{ع}_{\text{م}+1}+\text{ح}_1\text{ع}_\text{م}+\text{ح}_2\text{ع}_{\text{م}-1}+\cdots+\text{ح}_\text{م}\text{ع}_1=0 & ,\\ \text{ع}_{\text{م}+2}+\text{ح}_1\text{ع}_{\text{م}+1}+\text{ح}_2\text{ع}_\text{م}+\cdots+\text{ح}_\text{م}\text{ع}_2=0 & ,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \end{array}\right\}(5)$$

التي يعلم باولها $\text{ع}_\text{م}$ وبثانيها $\text{ع}_{\text{م}+1}$ وبثالثها $\text{ع}_{\text{م}+2}$ وهكذا ولننبه على ان

المجموع $ع_{١}$ يساوى دالة صحيحة وبدرجة أولى لمعاملات المعادلة وان المجموع $ع_{٢}$ يساوى دالة صحيحة وبدرجة ثانية وعلى العموم ان المجموع $ع_{هـ}$ يساوى دالة صحيحة وبدرجة هـ لمعاملات المعادلة

(فى الدوال المتماثلة لجذور أى معادلة)

بند ٣١٦ قد عينا مجموع القوى المتشابهة لجذور أى معادلة أعنى الدوال المتماثلة والصحيحة التى لا يشتمل كل حد منها الا على حرف واحد ولنبحث الآن عن الدوال المتماثلة التى يشتمل كل حد منها على حرفين فنقول ان هذه الدوال تكون بالصورة $\text{مج}\,ح^{ل}\,د^{ى}$ فلنفرض فى أول الامر ان الاسين ل ، ى مختلفان فبضرب الدالتين $ع_{ل}$ و $ع_{ى}$ فى بعضهما يحدث

$$ع_{ل}\,ع_{ى} = \text{مج}\,ح^{ل}\,د^{ى} + ع_{ل+ى}$$

ومن هنا يكون

$$\text{مج}\,ح^{ل}\,د^{ى} = ع_{ل}\,ع_{ى} - ع_{ل+ى} \qquad (٦)$$

ومتى كان الاسان ل ، ى متساويين يصير المجموع $\text{مج}\,ح^{ل}\,د^{ى}$ مساويا ٢ $\text{مج}\,ح^{ل}\,د^{ل}$ ويكون

$$\text{مج}\,ح^{ل}\,د^{ل} = \frac{١}{٢}\left[(ع_{ل})^{٢} - ع_{٢}\right] \qquad (٧)$$

ولنعتبر الآن دالة متماثلة مثل $\text{مج}\,ح^{ل}\,د^{ى}\,هـ^{ط}$ يشتمل كل حد منها على ثلاثة حروف ولنفرض فى أول الامر ان الثلاثة اسس ل ، ى ، ط مختلفة فيكون

$$ع_{ط} \times \text{مج}\,ح^{ل}\,د^{ى} = \text{مج}\,ح^{ل}\,د^{ى}\,هـ^{ط} + \text{مج}\,ح^{ل+ط}\,د^{ى} + \text{مج}\,ح^{ل}\,د^{ى+ط}$$

ومن هنا يكون

$$\text{مج}\,ح^{ل}\,د^{ى}\,هـ^{ط} = ع_{ط}\,\text{مج}\,ح^{ل}\,د^{ى} - \text{مج}\,ح^{ل+ط}\,د^{ى} - \text{مج}\,ح^{ل}\,د^{ى+ط}$$

وبتعويض الدوال المتماثلة الداخلة فى الطرف الثانى بمقاديرها التى تعلم بواسطة القانون (٦) يحدث

$$\text{مج}\,ح^{ل}\,د^{ى}\,هـ^{ط}$$

$$مجـ\, ح^{ل} ء^{ے} هـ^{ط} = ع_{ل} ع_{ے} ع_{ط} - ع_{ل} ع_{ے+ط} - ع_{ے} ع_{ط+ل} - ع_{ط} ع_{ل+ے} + ٢ ع_{ل+ے+ط} \quad (٨)$$

ومتى كان اسان ولیکونا ل و ے متساويين يصير المجموع مجـ $ح^{ل} ء^{ے} هـ^{ط}$ مساويا ٢ مجـ $ح^{ل} ء^{ل} هـ^{ط}$

ومتى كانت الثلاثة اسس متساوية يؤل هذا المجموع الى ٦ مجـ $ح^{ل} ء^{ل} هـ^{ل}$ وحينئذ يكون

$$مجـ\, ح^{ل} ء^{ل} هـ^{ط} = \frac{١}{٢}\left[ع_{ل}^{٢} ع_{ط} - ع_{٢ل} ع_{ط} - ٢ ع_{ل+ط} ع_{ل} + ٢ ع_{٢ل+ط}\right] \quad و \quad (٩)$$

$$مجـ\, ح^{ل} ء^{ل} هـ^{ل} = \frac{١}{٦}\left[ع_{ل}^{٣} - ٣ ع_{٢ل} ع_{ل} + ٢ ع_{٣ل}\right] \quad (١٠)$$

ويمكن ان يدام العمل بهذه الكيفية الى مالانهاية ويستنتج من ذلك ان كل دالة متماثلة وصحيحة لجذور أى معادلة تتبين بدالة صحيحة لمعاملات هذه المعادلة وحيث تقدم أن أى دالة متماثلة جذرية يمكن اعتبارها خارج قسمة دالتين متماثلتين صحيحتين فيعلم من ذلك أن كل دالة متماثلة وجذرية لجذور أى معادلة تتبين بيانا جذريا بدلالة معاملات هذه المعادلة

(الفصل الثانى)

(فى الحذف)

بـ ٣١٧ لا نبتدئ بذكر بعض اعتبارات تتعلق بتطابق الدوال الصحيحة فنقول يقال ان أى دالتين صحيحتين ذاتى عدة حروف مثل ح ، ء ، هـ ، ... متطابقتان متى اختصرت الحدود المتشابهة فيهما ووجدتا مركبتين من حدود واحدة متحدة فى المعاملات والاشارات

واعلم أولا انه اذا تساوت دالتان صحيحتان بدرجة م لحرف مثل ح بمقادير عددها م+١ مثل ج ، $ج_{١}$ ، .... ، $ج_{م}$ معطية لهذا الحرف فان هاتين الدالتين تكونان متطابقتين

ولاثبات ذلك نفرض ان الدالتين هما

$$ب\, ح^{م} + ب_{١} ح^{م-١} + \ldots\ldots + ب_{م} \quad و$$

$$ب'\, ح^{م} + ب'_{١} ح^{م-١} + \ldots\ldots + ب'_{م}$$

فحيث ان الكميات ح و $\text{ح}_{\text{١}}$ و ... و $\text{ح}_{\text{م}}$ التي عددها م+١ جذور للمعادلة

$$(\text{ب}-\text{بَ})\,\text{ح}^{\text{م}}+(\text{ب}_{\text{١}}-\text{بَ}_{\text{١}})\,\text{ح}^{\text{م}-\text{١}}+\cdots+(\text{ب}_{\text{م}}-\text{بَ}_{\text{م}})=\text{٠}$$

فتكون جميع معاملات هذه المعادلة معدومة وحينئذ يكون

$$\text{بَ}=\text{ب} \;\text{و}\; \text{بَ}_{\text{١}}=\text{ب}_{\text{١}} \;\text{و}\; \ldots \;\text{و}\; \text{بَ}_{\text{م}}=\text{ب}_{\text{م}}$$

وبناء على ذلك تكون الدالتان متطابقتين

وثانيا اذا تساوت دالتان صحيحتان محتويتان على حرفين مثل ح و ء وبدرجة م بالنسبة الى ح وبدرجة ه بالنسبة الى ء بمجموعات المقادير التي عددها (م+١)(ه+١) والتي يتحصل عليها بأخذ مقادير عددها م+١ لحرف ح ومقادير عددها ه+١ لحرف ء فان هاتين الدالتين تكونان متطابقتين

ولاثبات ذلك نفرض أن الدالتين مرتبتان على حسب القوى التنازلية لحرف ح فتكون المعاملات ب و $\text{ب}_{\text{١}}$ و ... و $\text{ب}_{\text{م}}$ و بَ و $\text{بَ}_{\text{١}}$ و ... و $\text{بَ}_{\text{م}}$ دوال صحيحة لحرف ء وبدرجة ه فلنعط لحرف ء احد مقاديره فحيث كانت الدالتان دالتين بدرجة م لحرف ح ومتساويتين بمقادير لحرف ح عددها م+١ فتكون معاملاتهما متساوية على التناظر وحيث كانت كثيرتا الحدود ب و بَ متساويتين بمقادير عددها ه+١ لحرف ء فتكونان متطابقتين وبمثل ذلك تكون كثيرتا الحدود $\text{ب}_{\text{١}}$ و $\text{بَ}_{\text{١}}$ متطابقتين وهكذا وبناء على ذلك تكون الدالتان المفروضتان متطابقتين ويدام العمل بهذه الكيفية

ولا لزوم لمعرفة درجات الدوال من قبل بالنسبة للحروف المختلفة التي تحتوي عليها هذه الدوال بل يكفي معرفة ان هذه الدرجات أقل أو مساوية لاعداد ما مثل م و ه و ... الخ

(في الحذف بواسطة الدوال المتماثلة)

بند ٣١٨ حذف س من المعادلتين

$$\text{د}(\text{س})=\text{س}^{\text{م}}+\text{ب}_{\text{١}}\text{س}^{\text{م}-\text{١}}+\cdots+\text{ب}_{\text{م}}=\text{٠} \quad \text{و}$$

$$\text{د}_{\text{١}}(\text{س})=\text{س}^{\text{ه}}+\text{بَ}_{\text{١}}\text{س}^{\text{ه}-\text{١}}+\cdots+\text{بَ}_{\text{ه}}=\text{٠} \qquad (\text{١})$$

اللتين

الاتين مدرجتى م و ه عبارة عن أبعاد الشرط الذى يجب ان توفيه المعاملات ليكون للمعادلتين جذر مشترك

فلنرمز بحروف $س_1$ و $س_2$ و ... و $س_م$ لجذور المعادلة الاولى وبحروف $ى_1$ و $ى_2$ و ... و $ى_ه$ لجذور المعادلة الثانية فلاجل ان يكون أى جذر من جذور المعادلة الاولى محققا الثانية يلزم ويكفى ان تكون احدى الكميات $ء_1(س_1)$ و $ء_1(س_2)$ و ... و $ء_1(س_م)$ معدومة وبناء على ذلك يلزم ويكفى ان يكون حاصل ضربها وهو

$$ح=ء_1(س_1)ء_1(س_2)\ldots ء_1(س_م)$$

معدوما وحيث ان هذا الحاصل هو على حسب كيفية تكوينه دالة صحيحة وبدرجة م للمعاملات $ب_1$ و $ب_2$ و ... الخ التى هى معاملات المعادلة الثانية ومشتمل على كل منها بدرجة م فيكون أيضا دالة صحيحة ومتماثلة لجذور المعادلة الاولى وبناء على ذلك يكون بموجب خواص الدوال المتماثلة دالة صحيحة للمعاملات $ى_1$ و $ى_2$ و ... الخ التى هى معاملات المعادلة الاولى

وكذلك لاجل ان يكون اى جذر من جذور المعادلة الثانية محققا للمعادلة الاولى يلزم ويكفى ان تكون احدى الكميات $ى(ى_1)$ و $ى(ى_2)$ و ... و $ى(ى_ه)$ معدومة وبناء على ذلك يلزم ويكفى ان يكون حاصل ضربها وهو

$$ر=ى(ى_1)ى(ى_2)\ldots ى(ى_ه)$$

معدوما وحيث ان هذا الحاصل دالة صحيحة وبدرجة ه للمعاملات $ى_1$ و $ى_2$ و ... الخ التى هى معاملات المعادلة الاولى ومشتمل على كل منها بدرجة ه فيكون كذلك دالة صحيحة ومتماثلة لجذور المعادلة الثانية وبناء على ذلك يكون دالة صحيحة للمعاملات $ب_1$ و $ب_2$ و ... الخ التى هى معاملات المعادلة الثانية

ويشاهد بسهولة ان المقدارين الجبريين ح و ر يكونان اما متساويين أو متساويين فى المقدار ومختلفين فى الاشارة لان

$$د(س)=(س-س_{1})(س-س_{2})\cdots(س-س_{م}) \quad و$$

$$د_{1}(س)=(س-ك_{1})(س-ك_{2})\cdots(س-ك_{ه})$$

وإذن يكون

$$ح=(س_{1}-ك_{1})(س_{1}-ك_{2})\cdots(س_{1}-ك_{ه})$$
$$\times(س_{2}-ك_{1})(س_{2}-ك_{2})\cdots(س_{2}-ك_{ه})$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$\times(س_{م}-ك_{1})(س_{م}-ك_{2})\cdots(س_{م}-ك_{ه}) \quad و$$

$$ر=(ك_{1}-س_{1})(ك_{1}-س_{2})\cdots(ك_{1}-س_{م})$$
$$\times(ك_{2}-س_{1})(ك_{2}-س_{2})\cdots(ك_{2}-س_{م})$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$\times(ك_{ه}-س_{1})(ك_{ه}-س_{2})\cdots(ك_{ه}-س_{م})$$

فلاجل المرور من مقدار جبرى الى آخر يكفى تغيير اشارات العوامل ذوات الحدين التى عددها م ه ووضع عوامل صف واحد افقى فى عمود واحد رأسى

وينتج من ذلك ان المقدارين الجبريين ح و $(-1)^{مه}$ ر يكونان متساويين مهما كانت مقادير الجذور وبناء على ذلك مهما كانت مقادير المعاملات وحينئذ تكون هاتان الدالتان الصحيحتان للمعاملات مطابقتين لبعضهما وحيث اننا قد علمنا ان الدالة ح بدرجة م بالنسبة للمعاملات $ب_{1}$ و $ب_{2}$ و ... الخ وان الدالة ر بدرجة ه بالنسبة للمعاملات $ك_{1}$ و $ك_{2}$ و ... الخ فيستنتج من ذلك أن الدالة الصحيحة ح تكون بدرجة ه بالنسبة لمعاملات المعادلة الاولى وبدرجة م بالنسبة لمعاملات المعادلة الثانية

بند ٣١٩ الى الآن قد فرضنا ان العامل الاول لكل من المعادلتين مساو بالواحد ولنعتبر الآن معادلتين مثل

$$\left.\begin{array}{l} د(س)=ج_{0}س^{م}+ج_{1}س^{م-1}+\cdots+ج_{م}=0 \quad و \\ د_{1}(س)=د_{0}س^{ه}+د_{1}س^{ه-1}+\cdots+د_{م}=0 \end{array}\right\} (٢)$$

معاملاهما

معاملاتهما الاولين كميتان مخالفتان للصفر مثل $\text{ج}_{٠}$ و $\text{ء}_{٠}$ فبقسمة جميع حدود المعادلة الاولى على $\text{ج}_{٠}$ وجميع حدود المعادلة الثانية على $\text{ء}_{٠}$ وجعل

$$\text{ت}_{١}=\frac{\text{ج}_{١}}{\text{ج}_{٠}} \text{ ، } \text{ت}_{٢}=\frac{\text{ج}_{٢}}{\text{ج}_{٠}} \text{ ، } \ldots \text{ ، } \text{ت}_{\text{م}}=\frac{\text{ج}_{\text{م}}}{\text{ج}_{٠}} \text{ ، }$$

$$\text{ب}_{١}=\frac{\text{ء}_{١}}{\text{ء}_{٠}} \text{ ، } \text{ب}_{٢}=\frac{\text{ء}_{٢}}{\text{ء}_{٠}} \text{ ، } \ldots \text{ ، } \text{ب}_{\text{ه}}=\frac{\text{ء}_{\text{ه}}}{\text{ء}_{٠}}$$

ترجع هاتان المعادلتان الى الصورة (١) ويكفي تعويض المعاملات $\text{ت}_{١}$ و $\text{ت}_{٢}$ و ... الخ و $\text{ب}_{١}$ و $\text{ب}_{٢}$ و ... الخ في الدالة الصحيحة ع بمقاديرها وبضرب هذه الدالة في $\text{ج}_{٠}^{\text{ه}}\text{ء}_{٠}^{\text{م}}$ تحصل دالة صحيحة متجانسة بدرجة ه بالنسبة للمعاملات $\text{ج}_{٠}$ و $\text{ج}_{١}$ و ... و $\text{ج}_{\text{م}}$ التي هي معاملات المعادلة الاولى وهذه الدالة تكون متجانسة كذلك وبدرجة م بالنسبة للمعاملات $\text{ء}_{٠}$ و $\text{ء}_{١}$ و ... و $\text{ء}_{\text{ه}}$ التي هي معاملات المعادلة الثانية ونرمز بحرف ل للدالة الصحيحة $\text{ج}_{٠}^{\text{ه}}\text{ء}_{٠}^{\text{م}}$ ع لمعاملات المعادلتين المفروضتين ونطلق على هذه الدالة اسم كثيرة الحدود المحصلة فالشرط اللازم والكافي لاجل أن يكون للمعادلتين جذر مشترك هو ل = ٠.

مثلا لنبحث عن الشرط الذي به يكون للمعادلتين ذاتي الدرجة الثانية وهما

$$\text{ج}_{٠}\text{س}^{٢}+\text{ج}_{١}\text{س}+\text{ج}_{٢}=٠ \text{ و}$$

$$\text{ء}_{٠}\text{س}^{٢}+\text{ء}_{١}\text{س}+\text{ء}_{٢}=٠$$

جذر مشترك فهنا

$$\text{ع}=(\text{س}_{١}^{٢}+\text{ب}_{١}\text{س}_{١}+\text{ب}_{٢})(\text{س}_{٢}^{٢}+\text{ب}_{١}\text{س}_{٢}+\text{ب}_{٢})$$

$$=\text{س}_{١}^{٢}\text{س}_{٢}^{٢}+\text{ب}_{١}\text{س}_{١}\text{س}_{٢}(\text{س}_{١}+\text{س}_{٢})+\text{ب}_{٢}(\text{س}_{١}^{٢}+\text{س}_{٢}^{٢})+\text{ب}_{١}^{٢}\text{س}_{١}\text{س}_{٢}$$

$$+\text{ب}_{١}\text{ب}_{٢}(\text{س}_{١}+\text{س}_{٢})+\text{ب}_{٢}^{٢}$$

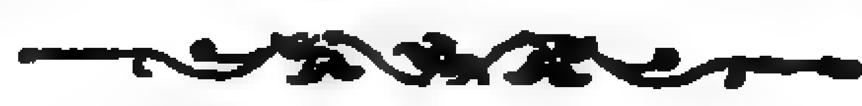
وبتعويض $\text{س}_{١}^{٢}+\text{س}_{٢}^{٢}$ بالكمية $(\text{س}_{١}+\text{س}_{٢})^{٢}-٢\text{س}_{١}\text{س}_{٢}$ يكون

$$ع = (ب_٢ - بَ_٢)^٢ - (ب_١ - بَ_١)(بَ_١ ب_٢ - ب_١ بَ_٢)$$

ومن ذلك يستنتج الشرط

$$ل = ج_{٠}^{٢} د_{٠}^{٢} ع = (ج_٠ د_٢ - د_٠ ج_٢)^٢ - (ج_٠ د_١ - د_٠ ج_١)(ج_١ د_٢ - د_١ ج_٢) = ٠ \qquad (٤)$$

ولنبين أنه يمكن تكوين كثيرة الحدود المحصلة ل بواسطة محدد فنقول



(طريقة سيلفستر)

بند ٣٣٢ لنبحث في أول الأمر عن الشرط الذي به يكون لمجموعة معادلات مثل

$$(٥)\left\{\begin{array}{l} ج_{١}^{١} + ج_{١}^{٢} س_١ + \cdots + ج_{١}^{ه-١} س_{ه-٢} + ج_{١}^{ه} س_{ه-١} = ٠ \text{ و} \\ ج_{٢}^{١} + ج_{٢}^{٢} س_١ + \cdots + ج_{٢}^{ه-١} س_{ه-٢} + ج_{٢}^{ه} س_{ه-١} = ٠ \text{ و} \\ \cdots \\ ج_{ه-١}^{١} + ج_{ه-١}^{٢} س_١ + \cdots + ج_{ه-١}^{ه-١} س_{ه-٢} + ج_{ه-١}^{ه} س_{ه-١} = ٠ \text{ و} \\ ج_{ه}^{١} + ج_{ه}^{٢} س_١ + \cdots + ج_{ه}^{ه-١} س_{ه-٢} + ج_{ه}^{ه} س_{ه-١} = ٠ \end{array}\right.$$

عددها ه وذات درجة أولى ومجاهيل $س_١$ و $س_٢$ و ... و $س_{ه-١}$ عددها ه−١ حل

فبتعويض $س_١$ و $س_٢$ و ... و $س_{ه-١}$ بالنسب $\frac{سَ_١}{سَ_ه}$ و $\frac{سَ_٢}{سَ_ه}$ و ... و $\frac{سَ_{ه-١}}{سَ_ه}$ التي فيها $سَ_ه$ كمية اختيارية تحصل مجموعة معادلات

$$(٦)\left\{\begin{array}{l} ج_{١}^{١} سَ_١ + ج_{١}^{٢} سَ_٢ + \cdots + ج_{١}^{ه} سَ_ه = ٠ \text{ و} \\ ج_{٢}^{١} سَ_١ + ج_{٢}^{٢} سَ_٢ + \cdots + ج_{٢}^{ه} سَ_ه = ٠ \text{ و} \\ \cdots \\ ج_{ه}^{١} سَ_١ + ج_{ه}^{٢} سَ_٢ + \cdots + ج_{ه}^{ه} سَ_ه = ٠ \end{array}\right.$$

متجانسة

متجانسة عددها $ه$ ذات درجة أولى ومجاهيل $سَ_{1}$ و $سَ_{2}$ و ... و $سَ_{ه}$ فاذا كانت مجموعة المعادلات الاولى محققة بمجموعة مقادير للمجاهيل $س_{1}$ و $س_{2}$ و ... و $س_{ه-1}$ تكون المجموعة الثانية محققة بمجموعة مقادير للمجاهيل $سَ_{1}$ و $سَ_{2}$ و ... و $سَ_{ه}$ لانهاية لعددها حيث ان الكمية $سَ_{ه}$ اختيارية ويستنتج من ذلك بـ٤٢ـد ان العدد النسبي لمجموعة المعادلات الثانية هذه أعني

$$\begin{vmatrix} ح^{1}_{1} & ح^{2}_{1} & \cdots & ح^{ه-1}_{1} & ح^{ه}_{1} \\ ح^{1}_{2} & ح^{2}_{2} & \cdots & ح^{ه-1}_{2} & ح^{ه}_{2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ ح^{1}_{ه-1} & ح^{2}_{ه-1} & \cdots & ح^{ه-1}_{ه-1} & ح^{ه}_{ه-1} \\ ح^{1}_{ه} & ح^{2}_{ه} & \cdots & ح^{ه-1}_{ه} & ح^{ه}_{ه} \end{vmatrix}$$

يكون معدوما

وانبه أيضا على انه متى كانت مجموعة معادلات متجانسة ذات درجة اولى عددها $ه$ ومحتوية على مجاهيل عددها $ه$ كالمعادلات (٦) محققة بمجموعة مقادير احدها بالاقل مخالف الصفر يكون لها حلول لانهاية لعددها لانه اذا ضربت مقادير المجاهيل فى عدد واحد اختياري يتحصل حل آخر

بـ٣٢١ـد ولنرجع الآن الى المسئلة المفروضة فنقول لاجل تسهيل تفهيم الطريقة نشرحها فى أول الامر على مثال فلتكن المعادلتان

$$(٧)\quad \begin{cases} ح_{٠}\,س^{٣}+ح_{١}\,س^{٢}+ح_{٢}\,س+ح_{٣}=٠ \quad و \\ ء_{٠}\,س^{٢}+ء_{١}\,س+ء_{٢}=٠ \end{cases}$$

اللتان احداهما بدرجة ثالثة والاخرى بدرجة ثانية فبضرب طرفى الاولى على التعاقب فى ١ و $س$ وطرفى الثانية فى ١ و $س$ و $س^{٢}$ تتحصل الخمس معادلات

$$(8)\begin{cases} \text{ح}_0\text{س}^4+\text{ح}_1\text{س}^3+\text{ح}_2\text{س}^2+\text{ح}_3\text{س}=0 \ , \\ \text{ح}_0\text{س}^3+\text{ح}_1\text{س}^2+\text{ح}_2\text{س}+\text{ح}_3=0 \ , \\ \text{ء}_0\text{س}^4+\text{ء}_1\text{س}^3+\text{ء}_2\text{س}^2=0 \ , \\ \text{ء}_0\text{س}^3+\text{ء}_1\text{س}^2+\text{ء}_2\text{س}=0 \ , \\ \text{ء}_0\text{س}^2+\text{ء}_1\text{س}+\text{ء}_2=0 \end{cases}$$

التى يمكن اعتبارها معادلات ذات درجة اولى وأربعة مجاهيل س و س^2 و س^3 و س^4 فاذا كانت المعادلتان (٧) متحققتين بمقدار واحد لمجهول س تكون مجموعة المعادلات (٨) متحققة بالمقادير المطابقة لمجاهيل س و س^2 و س^3 و س^4 وبناء على ذلك فعلى حسب القانون المقرر فى البند السابق يكون المحدد

$$(9)\quad \begin{vmatrix} \text{ح}_0 & \text{ح}_1 & \text{ح}_2 & \text{ح}_3 & 0 \\ 0 & \text{ح}_0 & \text{ح}_1 & \text{ح}_2 & \text{ح}_3 \\ \text{ء}_0 & \text{ء}_1 & \text{ء}_2 & 0 & 0 \\ 0 & \text{ء}_0 & \text{ء}_1 & \text{ء}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \text{ء}_0 & \text{ء}_1 & \text{ء}_2 \end{vmatrix}$$

معدوما

ب ــ ٣٢٢ ــ ولنعتبر الآن المعادلتين

$$(2)\begin{cases} \text{ء}(\text{س})=\text{ح}_0\text{س}^{\text{م}}+\text{ح}_1\text{س}^{\text{م}-1}+\cdots+\text{ح}_{\text{م}}=0 \ , \\ \text{ء}_1(\text{س})=\text{ء}_0\text{س}^{\text{ه}}+\text{ء}_1\text{س}^{\text{ه}-1}+\cdots+\text{ء}_{\text{ه}}=0 \end{cases}$$

اللتين احداهما بدرجة م واخراهما بدرجة ه فبضرب طرفى المعادلة الاولى على التعاقب فى الكميات التى عددها ه وهى ١ و س و س^2 و ... و $\text{س}^{\text{ه}-1}$ وطرفى المعادلة الثانية فى الكميات التى عددها م وهى ١ و س و س^2 و ... و $\text{س}^{\text{م}-1}$ تحصل المعادلات التى عددها م + ه وهى

$$
\left.
\begin{array}{ll}
\text{ج}_{0}\,\text{س}^{\text{م}+\text{ن}-1}+\text{ج}_{1}\,\text{س}^{\text{م}+\text{ن}-2}+\cdots\cdots=0 & \text{و}\\
\text{ج}_{0}\,\text{س}^{\text{م}+\text{ن}-2}+\cdots\cdots=0 & \text{و}\\
\cdots\cdots\cdots\cdots & \text{و}\\
\text{ج}_{0}\,\text{س}^{\text{م}+1}+\cdots+\text{ج}_{\text{م}}\,\text{س}=0 & \text{و}\\
\text{ج}_{0}\,\text{س}^{\text{م}}+\cdots+\text{ج}_{\text{م}-1}\,\text{س}+\text{ج}_{\text{م}}=0 & \text{و}\\
\text{د}_{0}\,\text{س}^{\text{م}+\text{ن}-1}+\text{د}_{1}\,\text{س}^{\text{م}+\text{ن}-2}+\cdots\cdots=0 & \text{و}\\
\text{د}_{0}\,\text{س}^{\text{م}+\text{ن}-2}+\cdots\cdots=0 & \text{و}\\
\cdots\cdots\cdots\cdots & \text{و}\\
\text{د}_{0}\,\text{س}^{\text{ن}+1}+\cdots+\text{د}_{\text{ن}}\,\text{س}=0 & \text{و}\\
\text{د}_{0}\,\text{س}^{\text{ن}}+\cdots+\text{د}_{\text{ن}-1}\,\text{س}+\text{د}_{\text{ن}}=0 &
\end{array}
\right\}\quad(١٠)
$$

التي يمكن اعتبارها معادلات ذات درجة اولى ومجاهيل عددها $\text{م}+\text{ن}-1$ فاذا كانت المعادلتان (٢) متحققتين بمقدار واحد للمجهول س تكون مجموعة المعادلات (١٠) متحققة بالمقادير المناظرة لها الكميات س ، س^{2} ، ... ، $\text{س}^{\text{م}+\text{ن}-1}$ وبناء على ذلك يكون المحدد

$$
\text{ع}=\left|
\begin{array}{ccccccc}
\text{ج}_{0} & \text{ج}_{1} & & \cdots\cdots & & 0 & 0\\
0 & \text{ج}_{0} & & \cdots\cdots & & 0 & 0\\
0 & 0 & & \cdots\cdots & & 0 & 0\\
0 & 0 & & \cdots\cdots & & \text{ج}_{\text{م}} & 0\\
0 & 0 & \cdots & \text{ج}_{0} & \cdots & \text{ج}_{\text{م}-1} & \text{ج}_{\text{م}}\\
\text{د}_{0} & \text{د}_{1} & \cdots & \text{د}_{\text{ن}} & \cdots & 0 & 0\\
0 & \text{د}_{0} & \cdots & \text{د}_{\text{ن}} & \cdots & 0 & 0\\
0 & 0 & & \cdots\cdots & & 0 & 0\\
0 & 0 & & \cdots\cdots & & \text{د}_{\text{ن}} & 0\\
0 & 0 & & \cdots\cdots & & \text{د}_{\text{ن}-1} & \text{د}_{\text{ن}}
\end{array}
\right|\quad(١١)
$$

معدوما وهذا المحدد دالة صحيحة متجانسة وبدرجة م+ه لمعاملات المعادلتين المفروضتين وحيث ان الصفوف الاول الافقية التي عددها ه تشتمل على المعاملات $ح_{٠}$ و $ح_{١}$ و ... و $ح_{ه}$ التي هي معاملات المعادلة الاولى وان الصفوف التالية لها التي عددها م تشتمل على المعاملات $ء_{٠}$ و $ء_{١}$ و ... و $ء_{ه}$ التي هي معاملات المعادلة الثانية فيكون المحدد متجانسا وبدرجة ه بالنسبة للمعاملات الاول ويكون كذلك متجانسا وبدرجة م بالنسبة للمعاملات الثانية

مبحث ٣٢٣ ويمكن بسهولة معرفة ان المحدد ع المتكون بهذه الكيفية يكون مطابقا لكثيرة الحدود المحصلة وهي د ولبيان ذلك ننبه في أول الامر على انه ليس معدوما بالمطابقة لانه يتكون من الاجزاء الموجودة على القطر الحد الغير قابل للاختصار وهو $ح_{٠}^{م} ء_{ه}^{ه}$ فاذا فرض ان المعاملين الاولين $ح_{٠}$ و $ء_{٠}$ مخالفان للصفر ووضع

$$ح_{١}=ح_{٠}ق_{١} ، ح_{٢}=ح_{٠}ق_{٢} ، .... ، ء_{١}=ء_{٠}ب_{١} ، ء_{٢}=ء_{٠}ب_{٢} ، ....$$

فبسبب التجانس بالنسبة لسلسلتي المعاملات تكون جميع الحدود مشتملة على $ح_{٠}^{م} ء_{٠}^{ه}$ كعامل لها ويكون $ع=ح_{٠}^{م} ء_{٠}^{ه} ج$ ($ج$ دالة صحيحة لسلسلتي الكميات $ق_{١}$ و $ق_{٢}$ و ... و $ق_{م}$ و $ب_{١}$ و $ب_{٢}$ و ... $ب_{ه}$ وبدرجة ه بالنسبة للكميات الاولى وبدرجة م بالنسبة للكميات الثانية) ولنرمز كما سبق بحروف $س_{١}$ و $س_{٢}$ و ... و $س_{م}$ و $ك_{١}$ و $ك_{٢}$ و ... و $ك_{ه}$ لجذور المعادلتين المفروضتين موضوعتين بالصورة (١) ولنعوض المعاملات ق و ب بمقاديرها بدلالة الجذور وهي

$$ق_{١}=-س_{١}-س_{٢}-....-س_{م} ، ب_{١}=-ك_{١}-ك_{٢}-...-ك_{ه} ،$$

$$ق_{٢}=س_{١}س_{٢}+... ، ب_{٢}=ك_{١}ك_{٢}+... ،$$

. . . . ، . . . .

فتصير الدالة الصحيحة $ج$ لهذه المعاملات دالة صحيحة لحروف $س_{١}$ و $س_{٢}$ و ... و $س_{م}$ و $ك_{١}$ و $ك_{٢}$ و ... و $ك_{ه}$ وحيث ان المقادير الجبرية للمعاملات ق تحتوى على كل من الجذور $س_{١}$ و $س_{٢}$ و ... و $س_{م}$ بدرجة أولى فقط فتكون الدالة

$ج_{١}$

$ح_1$ التي كانت بدرجة هـ بالنسبة لاجتماع المعاملات ر ح محتوية على كل من هذه الجذور بدرجة هـ في الغاية وبعد ذلك يعلم انها تحتوي على كل من الجذور $ك_1$ و $ك_2$ و ... و $ك_هـ$ بدرجة م في الغاية وحينئذ فقد عوضنا سلسلتي الكميات الاختيارية $ب_1$ و $ب_2$ و ... $ب_م$ و $ب_1$ و $ب_2$ و ... $ب_هـ$ بسلسلتي كميات $سـ_1$ و $سـ_2$ و ... $سـ_م$ و $ك_1$ و $ك_2$ و ... و $ك_هـ$ اختيارية مثلها

فلنتصور الآن ان الكمية الكثيرة الحدود $ح_1$ مرتبة على حسب القوى التنازلية لكمية $سـ_1$ التي نعتبرها متغيرا ونعتبر الكميات الاخرى ثوابت وغير متساوية بحيث انه متى كان المتغير $سـ_1$ مساويا لاحدى الكميات $ك_1$ و $ك_2$ و ... و $ك_هـ$ يكون للمعادلتين جذر مشترك فينعدم المحدد مح وبناء على ذلك تنعدم كثيرة الحدود $ح_1$ وحينئذ تكون هذه الكمية الكثيرة الحدود قابلة للقسمة على حاصل ضرب العوامل ذوات الحدين وهي $سـ_1 - ك_1$ و $سـ_1 - ك_2$ و .... و $سـ_1 - ك_هـ$ ويكون

$$ح_1 = (سـ_1 - ك_1)(سـ_1 - ك_2)\cdots(سـ_1 - ك_هـ)ح_2$$

والخارج $ح_2$ دالة صحيحة للكميات المختلفة ولنتصور كذلك ان كثيرة الحدود $ح_2$ مرتبة بالنسبة للمتغير $سـ_2$ وان الكميات الاخرى ثابتة وغير متساوية بحيث انه متى كان المتغير $سـ_2$ مساويا لاحدى الكميات $ك_1$ و $ك_2$ و ... و $ك_هـ$ يكون للمعادلتين جذر مشترك فيكون المحدد مح معدوما وبناء على ذلك تكون كثيرة الحدود $ح_2$ معدومة واذن تكون هذه الكمية الكثيرة الحدود قابلة للقسمة على حاصل ضرب العوامل ذات الحدين $سـ_2 - ك_1$ و $سـ_2 - ك_2$ و ... و $سـ_2 - ك_هـ$ ويكون

$$ح_2 = (سـ_2 - ك_1)(سـ_2 - ك_2)\cdots(سـ_2 - ك_هـ)ح_3$$

والخارج $ح_3$ دالة صحيحة للكميات المختلفة وباستمرار العمل بهذه الكيفية يتوصل الى كثيرة الحدود

$$ح_م=(س-ك_١)(س-ك_٢)...(س-ك_ن)ﻫ$$

والخارج ﻫ دالة صحيحة كذلك للكميات المختلفة وحينئذ يكون $ح_م=ح ﻫ$

وحيث كان الحاصل ح الذى هو حاصل ضرب العوامل ذات الحدين التى عددها م ن بدرجة ن بالنسبة لكل من الكميات $س_١$ و $س_٢$ و $س_٣$ و ... $س_م$ وبدرجة م بالنسبة لكل من الكميات $ك_١$ و $ك_٢$ و ... و $ك_ن$ ولا يجب أن تدخل هذه الكميات فى كثيرة الحدود $ح_م$ بدرجات أكثر ارتفاعا فينتج من ذلك ان الخارج الاخير ﻫ لا يشتمل عليها وبناء على ذلك يكون هذا الخارج ثابتا رقميا وحيث ان $مح=ح_ن^م$ ، $ح=ﻟ ﻫ$ فينتج من ذلك ان المحدد مح يساوى لكثيرة الحدود المحصلة وهى ﻟ مضروبا فى عامل رقمى وهو ﻫ غير ان هذا العامل مساو هنا للواحد لانه حيث كانت كثيرة الحدود ح مأخوذة بصورتها الاولى مشتملة على الحد الغير القابل للاختصار وهو $ب_ن^م$ فتشتمل كثيرة الحدود ﻟ على الحد $ح_ن^م$ الذى هو الحد الاول للمحدد وحينئذ توجد المتطابقة مح=ﻟ

(فى طريقة بيزو واولير)

بحث ٣٢٤ لنتوصل الى نفس النتيجة بطريقة حذف منسوبة الى الرياضيين الشهيرين بيزو واولير وهذه الطريقة مؤسسة على التنبيه الآتى وهو اذا كان لكميتين كثيرتى حدود صحيحتين مثل ى(س) ، د(س) وبدرجتى م و ن جذر مشترك وليكن $س_١$ أقول انه لابد من وجود كميتين كثيرتى الحدود ص ، ع صحيحتين وبدرجتى ن−١ ، م−١ بحيث يكون المقدار الجبرى صى(س)+ع د(س) معدوما بالمطابقة

ولاثبات ذلك نضع

$$ى(س)=(س-س_١)ى_١(س) \quad ، \quad د(س)=(س-س_١)د_١(س)$$

فاذا أخذنا $ص=ﻫ د_١(س)$ ، $ع=-ﻫ ى_١(س)$

(ﻫ ثابت اختيارى) فمن الواضح ان المقدار الجبرى صى(س)+ع د(س) يكون معدوما مطابقة

وانتصدى

ولنتصدى لتعيين هاتين الكثيرتي الحدود وهما ص و ع ولذلك نفرض أن

$$ص = و_{٠}\,س^{ه-١} + و_{١}\,س^{ه-٢} + \dots + و_{ه-١} \text{ ،}$$

$$ع = ز_{٠}\,س^{م-١} + ز_{١}\,س^{م-٢} + \dots + ز_{م-١}$$

فبمساواة معاملات كثيرة الحدود ص ى(سـ) + ع د(سـ) مرتبة على حسب القوى التنازلية لحرف سـ بصفر تحصل هذه المعادلات التي عددها م+ه

$$\left.\begin{array}{l} جـ_{٠}و_{٠} + ى_{٠}ز_{٠} = ٠ \text{ ،} \\ جـ_{١}و_{٠} + جـ_{٠}و_{١} + ى_{١}ز_{٠} + ى_{٠}ز_{١} = ٠ \text{ ،} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \text{ ،} \\ جـ_{م}و_{ه-٢} + جـ_{م-١}و_{ه-١} + ى_{ه}ز_{م-٢} + ى_{ه-١}ز_{م-١} = ٠ \text{ ،} \\ جـ_{م}و_{ه-١} + ى_{ه}ز_{م-١} = ٠ \end{array}\right\} (١٢)$$

والمتجانسة والتي بدرجة أولى وتشتمل على مجاهيل عددها م+ه وهي

$$و_{٠} \text{ ، } و_{١} \text{ ، } \dots \text{ ، } و_{ه-١} \text{ ، } ز_{٠} \text{ ، } ز_{١} \text{ ، } \dots \text{ ، } ز_{م-١}$$

وحيث يجب أن تكون هذه المعادلات محققة بمقادير للمجاهيل بحيث يكون أحد هذه المقادير بالأقل مخالفا للصفر فيكون المحدد النسبي لمجموعة المعادلات هذه معدوما (بـ٣٢٠ د) وهذا المحدد ليس الا المحدد (١١) مغيرة فيه الصفوف الافقية بصفوف رأسية (بـ٣٣ د)

مثلا اذا كانت احدى المعادلتين المفروضتين بدرجة ثالثة والاخرى بدرجة ثانية توجد هذه الخمس معادلات

$$\begin{array}{l} جـ_{٠}و_{٠} + ى_{٠}ز_{٠} = ٠ \text{ ،} \\ جـ_{١}و_{٠} + جـ_{٠}و_{١} + ى_{١}ز_{٠} + ى_{٠}ز_{١} = ٠ \text{ ،} \\ جـ_{٢}و_{٠} + جـ_{١}و_{١} + ى_{٢}ز_{٠} + ى_{١}ز_{١} + ى_{٠}ز_{٢} = ٠ \text{ ،} \\ جـ_{٣}و_{٠} + جـ_{٢}و_{١} + ى_{٢}ز_{١} + ى_{١}ز_{٢} = ٠ \text{ ،} \\ جـ_{٣}و_{١} + ى_{٢}ز_{٢} = ٠ \end{array}$$

التي يناظرها هذا المحدد

$$\left|\begin{array}{ccccc} ٠ & ٠ & ء_{٠} & ٠ & ج_{٠} \\ ٠ & ء_{٠} & ء_{١} & ج_{٠} & ج_{١} \\ ء_{٠} & ء_{١} & ء_{٢} & ج_{١} & ج_{٢} \\ ء_{١} & ء_{٢} & ٠ & ج_{٢} & ج_{٣} \\ ء_{٢} & ٠ & ٠ & ج_{٣} & ٠ \end{array}\right|$$

المطابق للمحدد (٩)

(طريقة مختصرة لبيزو)

بند ٣٢٥ قد بينا كثيرة الحدود المحصلة وهى ل بواسطة محدد برتبة م+ه واجزاؤه هى نفس معاملات المعادلتين المفروضتين مع تكملة الجدول باصفار وهناك طريقة حذف اخرى منسوبة كذلك الى بيزو بها يمكن متى كان ه مساويا الى م او اقل منه بيان نفس هذه الكمية بواسطة محدد برتبة م لا تكون اجزاؤه معاملات المعادلتين بل تكون دوال صحيحة ومتجانسة وبدرجة اولى بالنسبة لمعاملات احدى المعادلتين او اخراهما فلنتصور فى أول الامر معادلتين متحدتين فى الدرجة ولتكونا

$$(١٢)\left\{\begin{array}{l} ج_{٠}س^{م}+ج_{١}س^{م-١}+\cdots+ج_{م}=٠ \quad ، \\ ء_{٠}س^{م}+ء_{١}س^{م-١}+\cdots+ء_{م}=٠ \end{array}\right.$$

ولنقسم الطرف الاول من كل من المعادلتين الى سلسلتين تشتمل أولاهما على الحدود التى بدرجة مساوية او اكبر من عدد وليكن ع وتشتمل ثانيتهما على الحدود التالية ولنكتب المعادلتين المذكورتين هكذا

$$س^{ع}\left(ج_{٠}س^{م-ع}+ج_{١}س^{م-ع-١}+\cdots+ج_{م-ع}\right)$$

$$+\left(ج_{م-ع+١}س^{ع-١}+\cdots+ج_{م}\right)=٠ \quad ،$$

$$س^{ع}\left(ء_{٠}س^{م-ع}+ء_{١}س^{م-ع-١}+\cdots+ء_{م-ع}\right)$$

$$+\left(ء_{م-ع+١}س^{ع-١}+\cdots+ء_{م}\right)=٠$$

أو

أو

$$\text{ط}\,\text{س}^{\text{ح}} + \text{ى} = ٠ \quad \text{و} \quad \bar{\text{ط}}\,\text{س}^{\text{ح}} + \bar{\text{ى}} = ٠$$

وذلك بالرمز بحروف ط و ى و طَ و ىَ لمتغيرات الحدود الموضوعة بين الاقواس وبتوافق هاتين المعادلتين بعملية جمع بعد ضربهما على التناظر في ‑طَ و ط تستنتج منهما هذه المعادلة

$$\text{ط}\,\bar{\text{ى}} - \bar{\text{ط}}\,\text{ى} = ٠ .$$

أي هذه المعادلة

$$\left.\begin{aligned} &(\text{جـ}\,\text{س}^{\text{م}-\text{ح}} + \dots + \text{جـ}_{\text{م}-\text{ح}})(\text{ى}_{\text{م}-\text{ح}+١}\,\text{س}^{\text{ح}-١} + \dots + \text{ى}_{\text{م}}) \\ -&(\text{ى}\,\text{س}^{\text{م}-\text{ح}} + \dots + \text{ى}_{\text{م}-\text{ح}})(\text{جـ}_{\text{م}-\text{ح}+١}\,\text{س}^{\text{ح}-١} + \dots + \text{جـ}_{\text{م}}) = ٠ \end{aligned}\right\} \quad (١٤)$$

التي بدرجة م‑١ فاذا أعطيت المقادير ١ و٢ و٣ و ... وم التي عددها م لحرف ح على التوالي تحصل هذه المعادلات التي عددها م

$$\left.\begin{aligned} &(\text{جـ}\,\text{س}^{\text{م}-١} + \dots + \text{جـ}_{\text{م}-١})\,\text{ى}_{\text{م}} - (\text{ى}\,\text{س}^{\text{م}-١} + \dots + \text{ى}_{\text{م}-١})\,\text{جـ}_{\text{م}} = ٠ \quad \text{و} \\ &(\text{جـ}\,\text{س}^{\text{م}-٢} + \dots + \text{جـ}_{\text{م}-٢})(\text{ى}_{\text{م}-١}\,\text{س} + \text{ى}_{\text{م}}) \\ -&(\text{ى}\,\text{س}^{\text{م}-٢} + \dots + \text{ى}_{\text{م}-٢})(\text{جـ}_{\text{م}-١}\,\text{س} + \text{جـ}_{\text{م}}) = ٠ \quad \text{و} \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \text{و} \\ &\text{جـ}(\text{ى}_١\,\text{س}^{\text{م}-١} + \dots + \text{ى}_{\text{م}}) - \text{ى}(\text{جـ}_١\,\text{س}^{\text{م}-١} + \dots + \text{جـ}_{\text{م}}) = ٠ \end{aligned}\right\} \quad (١٥)$$

والتي نبينها هكذا

$$\left.\begin{aligned} &\text{ق}^{١}_{١}\,\text{س}^{\text{م}-١} + \text{ق}^{٢}_{١}\,\text{س}^{\text{م}-٢} + \dots + \text{ق}^{\text{م}}_{١} = ٠ \quad \text{و} \\ &\text{ق}^{١}_{٢}\,\text{س}^{\text{م}-١} + \text{ق}^{٢}_{٢}\,\text{س}^{\text{م}-٢} + \dots + \text{ق}^{\text{م}}_{٢} = ٠ \quad \text{و} \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\text{ق}^{١}_{\text{م}}\,\text{س}^{\text{م}-١} + \text{ق}^{٢}_{\text{م}}\,\text{س}^{\text{م}-٢} + \dots + \text{ق}^{\text{م}}_{\text{م}} = ٠ \end{aligned}\right\} \quad (١٦)$$

ونعتبرها معادلات ذات درجة أولى ومجاهيل س و $\text{س}^{٢}$ و ... و $\text{س}^{\text{م}-١}$ عددها م‑١

فاذا كانت المعادلتان المفروضتان (١٣) متحققتين بمقدار واحد لحرف سـ كانت المعادلات (١٦) التى عددها م متحققة بالمقادير المناظرة لها للكميات سـ و سـ^{2} و ... و $\text{سـ}^{\text{م}-1}$ التى عددها م-١ وبناء على ذلك يكون المحدد

$$\begin{vmatrix} \text{ع}_{1}^{1} & \text{ع}_{1}^{2} & \cdots & \text{ع}_{1}^{\text{م}} \\ \text{ع}_{2}^{1} & \text{ع}_{2}^{2} & \cdots & \text{ع}_{2}^{\text{م}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \text{ع}_{\text{م}}^{1} & \text{ع}_{\text{م}}^{2} & \cdots & \text{ع}_{\text{م}}^{\text{م}} \end{vmatrix} \qquad (١٧)$$

معدوما وحيث كانت الحروف ع المقرونة بدليلين دالة على دوال صحيحة ومتجانسة وبدرجة أولى للمعاملات جـ_{0} و ... و $\text{جـ}_{\text{م}}$ وكذلك للمعاملات ء_{0} و ... و $\text{ء}_{\text{م}}$ فيكون هذا المحدد دالة صحيحة ومتجانسة وبدرجة م لكل من سلاسل المعاملات وفى الحالة الخصوصية التى تكون فيها المعادلتان المفروضتان بدرجة ثانية تؤل مجموعة المعادلات (١٥) الى المعادلتين

$$(\text{جـ}_{0}\text{سـ}+\text{جـ}_{1})\,\text{ء}_{2}-(\text{ء}_{0}\text{سـ}+\text{ء}_{1})=0 \quad \text{و}$$

$$\text{جـ}_{0}(\text{ء}_{1}\text{سـ}+\text{ء}_{2})-\text{ء}_{0}(\text{جـ}_{1}\text{سـ}+\text{جـ}_{2})=0$$

أو

$$(\text{جـ}_{0}\text{ء}_{2}-\text{ء}_{0}\text{جـ}_{2})\text{سـ}+(\text{جـ}_{1}\text{ء}_{2}-\text{ء}_{1}\text{جـ}_{2})=0$$

$$(\text{جـ}_{0}\text{ء}_{1}-\text{ء}_{0}\text{جـ}_{1})\text{سـ}+(\text{جـ}_{0}\text{ء}_{2}-\text{ء}_{0}\text{جـ}_{2})=0$$

و بمساواة المحدد

$$(\text{جـ}_{0}\text{ء}_{2}-\text{ء}_{0}\text{جـ}_{2})^{2}-(\text{جـ}_{0}\text{ء}_{1}-\text{ء}_{0}\text{جـ}_{1})(\text{جـ}_{1}\text{ء}_{2}-\text{ء}_{1}\text{جـ}_{2})$$

بصفر نجد الشرط الذى تحصلنا عليه فى بـ ٣١٩ د

بـ ٣٢٦ د ولنعتبر الآن معادلتين بدرجتين مختلفتين ولتكونا

$$\left.\begin{aligned} &\text{جـ}_{0}\text{سـ}^{\text{م}}+\text{جـ}_{1}\text{سـ}^{\text{م}-1}+\cdots+\text{جـ}_{\text{م}}=0 \quad \text{و} \\ &\text{ء}_{0}\text{سـ}^{\text{ه}}+\text{ء}_{1}\text{سـ}^{\text{ه}-1}+\cdots+\text{ء}_{\text{ه}}=0 \end{aligned}\right\} \quad (٢)$$

وليكن

ولكن م > ه فبضرب كافة حدود المعادلة الثانية فى $\text{س}^{\text{م}-\text{ه}}$ نجد معادلتين متحدتين فى الدرجة وهما

$$\text{ج}_{0}\text{س}^{\text{م}}+\text{ج}_{1}\text{س}^{\text{م}-1}+\cdots+\text{ج}_{\text{ه}}\text{س}^{\text{م}-\text{ه}}+\cdots+\text{ج}_{\text{م}}=0\ ،$$

$$\text{د}_{0}\text{س}^{\text{م}}+\text{د}_{1}\text{س}^{\text{م}-1}+\cdots+\text{د}_{\text{ه}}\text{س}^{\text{م}-\text{ه}}=0$$

فنقسم الطرف الاول من كل من هاتين المعادلتين الى سلسلتين تشتمل أولاهما على الحدود التى بدرجة مساوية أو اكبر من عدد ع اكبر من م-ه ونضع المعادلتين المذكورتين هكذا

$$\left.\begin{array}{l}\text{س}^{\text{ع}}\left(\text{ج}_{0}\text{س}^{\text{م}-\text{ع}}+\text{ج}_{1}\text{س}^{\text{م}-\text{ع}-1}+\cdots+\text{ج}_{\text{م}-\text{ع}}\right)\\ +\left(\text{ج}_{\text{م}-\text{ع}+1}\text{س}^{\text{ع}-1}+\cdots+\text{ج}_{\text{م}}\right)=0\ ،\end{array}\right|\ ،$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{س}^{\text{ع}}\left(\text{د}_{0}\text{س}^{\text{م}-\text{ع}}+\text{د}_{1}\text{س}^{\text{م}-\text{ع}-1}+\cdots+\text{د}_{\text{م}-\text{ع}}\right)\\ +\left(\text{د}_{\text{م}-\text{ع}+1}\text{س}^{\text{ع}-1}+\cdots+\text{د}_{\text{ه}}\text{س}^{\text{م}-\text{ه}}\right)=0\end{array}\right|$$

وبتوافق هاتين المعادلتين بواسطة عملية جمع كما تقدم تستنتج منهما المعادلة

$$\left.\begin{array}{l}\left(\text{ج}_{0}\text{س}^{\text{م}-\text{ع}}+\cdots+\text{ج}_{\text{م}-\text{ع}}\right)\left(\text{د}_{\text{م}-\text{ع}+1}\text{س}^{\text{ع}-1}+\cdots+\text{د}_{\text{ه}}\text{س}^{\text{م}-\text{ه}}\right)\\ -\left(\text{د}_{0}\text{س}^{\text{م}-\text{ع}}+\cdots+\text{د}_{\text{م}-\text{ع}}\right)\left(\text{ج}_{\text{م}-\text{ع}+1}\text{س}^{\text{ع}-1}+\cdots+\text{ج}_{\text{م}}\right)=0\end{array}\right\}(18)$$

وغير ذلك فان هذه المعادلة تستنتج مباشرة من المعادلة (١٤) بان يفرض فيها ان المعاملات $\text{د}_{\text{ه}+1}$ ، ... ، $\text{د}_{\text{م}}$ معدومة فاذا أعطيت المقادير م-ه+١ ، م-ه+٢ ، ... ، م التى عددها ه لحرف ع تحصل هذه المعادلات التى عددها ه

$$(١٩)\left\{\begin{array}{l}
(\text{ح}_0\,\text{س}^{\text{ه}-1}+\cdots+\text{ح}_{\text{ه}-1})\,\text{ء}_{\text{ه}}\,\text{س}^{\text{م}-\text{ه}} \\
-(\text{ء}_0\,\text{س}^{\text{ه}-1}+\cdots+\text{ء}_{\text{ه}-1})(\text{ح}_{\text{ه}}\,\text{س}^{\text{م}-\text{ه}}+\cdots+\text{ح}_{\text{م}})=0\ \text{،} \\
(\text{ح}_0\,\text{س}^{\text{ه}-2}+\cdots+\text{ح}_{\text{ه}-2})(\text{ء}_{\text{ه}-1}\,\text{س}^{\text{م}-\text{ه}+1}+\text{ء}_{\text{ه}}\,\text{س}^{\text{م}-\text{ه}}) \\
-(\text{ء}_0\,\text{س}^{\text{ه}-2}+\cdots+\text{ء}_{\text{ه}-2})(\text{ح}_{\text{ه}-1}\,\text{س}^{\text{م}-\text{ه}+1}+\cdots+\text{ح}_{\text{م}})=0\ \text{،} \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \text{،} \\
\text{ح}_0(\text{ء}_1\,\text{س}^{\text{م}-1}+\cdots+\text{ء}_{\text{ه}}\,\text{س}^{\text{م}-\text{ه}})-\text{ء}_0(\text{ح}_1\,\text{س}^{\text{م}-1}+\cdots+\text{ح}_{\text{م}})=0
\end{array}\right.$$

والتي تبين هكذا

$$(٢٠)\left\{\begin{array}{l}
\text{ن}_1^{1}\,\text{س}^{\text{م}-1}+\text{ن}_1^{2}\,\text{س}^{\text{م}-2}+\cdots\cdots+\text{ن}_1^{\text{م}}=0\ \text{،} \\
\text{ن}_2^{1}\,\text{س}^{\text{م}-1}+\text{ن}_2^{2}\,\text{س}^{\text{م}-2}+\cdots\cdots+\text{ن}_2^{\text{م}}=0\ \text{،} \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \text{،} \\
\text{ن}_{\text{ه}}^{1}\,\text{س}^{\text{م}-1}+\text{ن}_{\text{ه}}^{2}\,\text{س}^{\text{م}-2}+\cdots\cdots+\text{ن}_{\text{ه}}^{\text{م}}=0
\end{array}\right.$$

وينبغي ان تصحب هذه المعادلات بهذه المعادلات التي عددها $\text{م}-\text{ه}$

$$(٢١)\left\{\begin{array}{l}
\text{ء}_0\,\text{س}^{\text{م}-1}+\text{ء}_1\,\text{س}^{\text{م}-2}+\cdots\cdots=0\ \text{،} \\
\text{ء}_0\,\text{س}^{\text{م}-2}+\cdots\cdots=0\ \text{،} \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \text{،} \\
\text{ء}_0\,\text{س}^{\text{ه}}+\cdots+\text{ء}_{\text{ه}}=0
\end{array}\right.$$

التي تكون بضرب طرفي المعادلة الثانية من المعادلتين (٢) على التوالي في الكميات 1 و س و س^2 و ... و $\text{س}^{\text{م}-\text{ه}-1}$ فتتكون مجموعة معادلات عددها م تعتبر كمعادلات ذات درجة اولى ومجاهيل س و س^2 و ... و $\text{س}^{\text{م}-1}$ عددها $\text{م}-1$ فاذا كانت المعادلتان المفروضتان (٢) متحققتين بمقدار واحد لحرف س تكون المعادلات (٢٠) و (٢١) التي عددها م متحققة بالمقادير المناظرة لها للكميات س و س^2 و ... و $\text{س}^{\text{م}-1}$ التي عددها $\text{م}-1$ وبناء على ذلك يكون المحدد

ن_1^{1}

$$ع = \begin{vmatrix} \text{ا}\,\text{ب}_{١} & \text{ب}^{٢}_{١} & \cdots & \text{ب}^{م}_{١} \\ \text{ا}\,\text{ب}_{٢} & \text{ب}^{٢}_{٢} & \cdots & \text{ب}^{م}_{٢} \\ & & \cdots & \\ \text{ا}\,\text{ب}_{ه} & \text{ب}^{٢}_{ه} & \cdots & \text{ب}^{م}_{ه} \\ \text{ء}_{٠} & \text{ء}_{١} & \cdots\ \text{ء}_{ه}\ \cdots & ٠ \\ ٠ & \text{ء}_{٠} & \cdots\ \text{ء}_{ه}\ \cdots & ٠ \\ & & \cdots & \\ ٠ & ٠ & \cdots & \text{ء}_{ه} \end{vmatrix} \qquad (٢٢)$$

معدوما وهذا المحدد دالة صحيحة متجانسة وبدرجة ه للمعاملات د وهو كذلك دالة صحيحة متجانسة وبدرجة م للمعاملات ء

ويثبت كما فى بـ ٣٢٣ د ان هذا المحدد مساو لكثيرة الحدود المحصلة ل مضروبة فى عامل رقمى وهذا العامل يساوى كذلك للواحد لانه اذا فرض ان جميع معاملات المعادلتين المفروضتين معدومة ماعدا جـ و $ء_{ه}$ تنعدم جميع معاملات المعادلات (٢٠) ماعدا المعاملات الموضوعة على القطر فانها تصير مساوية للكمية جـ $ء_{ه}$ ويؤل المحدد الى حده الاول وهو $جـ^{م} ء_{ه}$ الذى هو الحد الاول من كثيرة الحدود ل وحينئذ يكون المحدد (٢٢) مطابقا لكثيرة الحدود ل وبناء على ذلك يكون مطابقا للمحدد (١١)

مثلا لاجل تطبيق هذه الطريقة على المعادلتين (٧) اللتين احداهما بدرجة ثالثة والاخرى بدرجة ثانية نكون المعادلتين

$$(جـ\,س + جـ_{١})\,ء_{٢}\,س - (ء\,س + ء_{١})(جـ_{٢}\,س + جـ_{٣}) = ٠ \quad و$$

$$جـ_{١}(ء\,س^{٢} + ء_{٢}\,س) - ء_{١}(جـ\,س^{٢} + جـ_{٢}\,س + جـ_{٣}) = ٠$$

أعنى المعادلتين

$$(\text{ج}_0\text{ء}_2-\text{ء}_0\text{ج}_2)\text{س}^2+(\text{ج}_1\text{ء}_2-\text{ء}_1\text{ج}_2-\text{ء}_0\text{ج}_3)\text{س}-\text{ء}_1\text{ج}_3=0 \quad \text{و}$$

$$(\text{ج}_0\text{ء}_1-\text{ء}_0\text{ج}_1)\text{س}^2+(\text{ج}_0\text{ء}_2-\text{ء}_0\text{ج}_2)\text{س}-\text{ء}_0\text{ج}_3=0$$

اللتين نضربهما بالمعادلة

$$\text{ء}_0\text{س}^2+\text{ء}_1\text{س}+\text{ء}_2=0$$

وبهذه الكيفية يتحصل محدد برتبة ثالثة وهو

$$\begin{vmatrix} \text{ج}_0\text{ء}_2-\text{ء}_0\text{ج}_2 & \text{ج}_1\text{ء}_2-\text{ء}_1\text{ج}_2-\text{ء}_0\text{ج}_3 & -\text{ء}_1\text{ج}_3 \\ \text{ج}_0\text{ء}_1-\text{ء}_0\text{ج}_1 & \text{ج}_0\text{ء}_2-\text{ء}_0\text{ج}_2 & -\text{ء}_0\text{ج}_3 \\ \text{ء}_0 & \text{ء}_1 & \text{ء}_2 \end{vmatrix} \quad (٢٣)$$

وهذا المحدد مطابق للمحدد ذي الرتبة الخامسة (٩) الذي وجد بواسطة الطريقة الاولى (بـ ٣٢١ د)

(فى تتمة نظرية الحذف)

بـ ٣٢٧ د قد وجدنا الشرط اللازم والكافى لاجل أن يكون لمعادلتين جذر مشترك واحد بالاقل

ولنتصدى الآن لتكميل نظرية الحذف مع بيان الكيفية التى بها يعلم عدد الجذور المشتركة متى استوفى الشرط السابق وتكوين المعادلة التى يتحصل بها على هذه الجذور المشتركة ولذلك نعمم التنبيه المؤسسة عليه طريقة بيزو وأولير (بـ ٣٢٤ د) وهو متى كان لكميتين كثيرتى الحدود صحيحتين بدرجتى م , ه وليكونا ء(س) و ء_1(س) جذور مشتركة عددها ح أعنى متى كان لهما قاسم مشترك أعظم بدرجة ح وليكن ء_2(س) فانه يوجد ازدواج مركب من كميتين كثيرتى الحدود بدرجتى ه−ح , م−ح مثل ص , ع بحيث تكون الكمية ص ء(س) + ع ء_1(س) معدومة عدم مطابقة ولا يوجد سوى ازدواج واحد بصرف النظر عن عامل ثابت اختيارى فنقول انما لو وضعنا

$$\text{ء}(\text{س})=\text{ء}_2(\text{س})\,\text{ء}_3(\text{س}) \quad \text{و} \quad \text{ء}_1(\text{س})=\text{ء}_2(\text{س})\,\text{ء}_4(\text{س})$$

ورمزنا بحرفى ص , ع لكميتين كثيرتى الحدود صحيحتين حيثما اتفق يكون ص

ص ء(س) + ع ء١(س) = ء٢(س) [ص ء٣(س) + ع ء٤(س)]

وحيث ان كل مقدار لحرف س مخالف للجذور المشتركة وعادم للكمية ص ء(س) + ع ء١(س) لا يعدم العامل الاول وهو ء٢(س) من الطرف الثانى فيعدم العامل الثانى وهو ص ء٣(س) + ع ء٤(س) فاذا كانت الكمية الاولى معدومة عدم مطابقة تكون الكمية الثانية معدومة كذلك عدم مطابقة ويكون ص ء٣(س) = −ع ء٤(س) وحيث كانت كثيرتا الحدود ء٣(س) و ء٤(س) اوليتين مع بعضهما فتكون كثيرة الحدود ص قابلة للقسمة على ء٤(س) ومن ذلك يستنتج ان

ص = ء٤(س) ك ، ع = −ء٣(س) ك

ك كمية كثيرة حدود صحيحة حيثما اتفق وهاهو المقدار الجبرى العمومى لكثيرتى الحدود الصحيحتين ص ، ع اللتين تجعلان الكمية ص ء(س) + ع ء١(س) معدومة عدم مطابقة فاذا كانت درجة كثيرة الحدود ك هى ك َ تكون درجتا كثيرتى الحدود ص ، ع هما ه−ح+ك َ ، م−ح+ك َ ويحصل على كثيرتى الحدود اللتين بأقل درجة بجعل ك َ = ٠ أعنى بتعويض ك بثابت اختيارى وليكن ب واذن يكون

ص = ب ء٤(س) ، ع = −ب ء٣(س)

فبصرف النظر عن هذا العامل الثابت نقول انه يوجد ازدواج واحد لكثيرتى الحدود ص ، ع بدرجتى ه−ح ، م−ح فيه الخاصية المنطوق بها ولا يوجد ازدواج بدرجتين أقل الا انه توجد ازدواجات بدرجتين أكثر ازدواجات لانهاية لعددها حيث كانت كثيرة الحدود ك اختيارية

وبموجب ذلك ترجع عملية تعيين العدد ح الذى هو عدد الجذور المشتركة الى عملية تعيين الدرجتين ه−ح ، م−ح اللتين هما درجتا كثيرتى الحدود ص ، ع بحيث ان البحث عن هاتين الكميتين الكثيرتى الحدود يحدث حلا واحدا ولا يحدث حلا غيره وازدواجات كثيرتى الحدود ص ، ع التى معاملاتها متناسبة نعتبرها حلا واحدا وهاك كيفية العمل

بـ٣٣٨د لنفرض ان العدد ع المبين بالقانون (١١) والمطابق لكثيرة الحدود المحصلة ل معدوم فيكون للمعادلتين المفروضتين (٢) جـذر واحد مشترك بالاقل وبناء على ذلك يوجد بالاقل ازدواج الكثيرتى الحدود صه و ع بدرجتى هـ-١ و م-١ ولا يوجد ازدواج خلافه اذا لم يوجد الا جذر واحد مشترك وتوجد ازدواجات لا حصر لعددها اذا وجدت عدة جذور مشتركة وقد حسبنا هاتين الكثيرتى الحدود فى بـ٣٣٤د ونبهنا على ان العدد ع متكون من معاملات المعادلات (١٢) موضوعة صفوفا رأسية فبصرف النظر عن المعادلة الاخيرة من هذه المعادلات تحصل هذه المعادلات

جو. + ءز. = ٠

جو١ + جو. + ءز١ + ءز. = ٠ (٢٤)

. . . .

جم وهـ-٢ + جم-١ وهـ-١ + ءهـ زم-٢ + ءهـ-١ زم-١ = ٠

التى عددها م+هـ-١ وذات درجة اولى ومجاهيل عددها م+هـ-١ وهى

و١/و. ، و٢/و. ، ... ، ز/و. ، ز١/و. ، ... وقد نحصل على هذه المعادلات بمساواة

معاملات القوى المختلفة لحرف سه فى المقدار الجبرى وهو صه ء(سه) + ع ء١(سه)

بصفر وبكل حل للمعادلات (٢٤) يؤول هذا المقدار الجبرى الى ثابت هو الطرف الاول من المعادلة الاخيرة من المعادلات (١٢) غير أن هذا الثابت معدوم لانه حيث كان لكثيرتى ء(سه) و ء١(سه) جذر مشترك فلو أعطى هذا المقدار الى سه لانعدم المقدار الجبرى المذكور ويعلم من ذلك انه يطابق لكل حل للمعادلات (٢٤) ازدواج لكثيرتين كثيرتى الحدود صه و ع درجتاهما هـ-١ و م-١ وبالعكس فاذا كان عدد معاملات المجاهيل فى المعادلات (٢٤) مخالفا للصفر لا يحصل سوى حل واحد وبناء على ذلك لا يحصل سوى جذر واحد مشترك واذا كان هذا العدد معدوما فحيث ان الحل لا يكون مستحيلا فتوجد حلول لا نهاية لعددها (بـ٤١د) وبناء على ذلك يحصل على عدة جذور مشتركة

ولنعتبر

ولنختبر كيفية تكوين هذا المحدد فنقول انه يستنتج من المحدد الاصلى مح بحذف معاملات ؤ أعنى بحذف الصف الاول وحذف معاملات المعادلة الاخيرة من المعادلات (١٢) أعنى بحذف العمود الاخير واذن يكون هو المحدد الجزئى المنسوب للجزء الاول من العمود الاخير من المحدد مح (ب ٣٦ د) لكن أجزاء العمود الاول فى هذا المحدد الجزئى معدومة ماعدا ؤ فلو رتب بالنسبة لهذه الاجزاء لا يشتمل هذا المحدد

الاعلى الحد $(-1)^{\text{ه}-1}$ ؤ $\text{مح}^{(1)}$ الذى فيه $\text{مح}^{(1)}$ رمز للمحدد الجديد الجزئى المنسوب لهذا الجزء وهو ؤ أعنى للمحدد

$$
\text{مح}^{(1)} = \left|
\begin{array}{ccccc}
\text{ج}_{\text{ب}} & \text{ج}_{\text{ا}} & \cdots\cdots\cdots & \bullet & \bullet \\
\bullet & \text{ج}_{\text{ب}} & \cdots\cdots\cdots & \bullet & \bullet \\
 & & \cdots\cdots\cdots & & \\
\bullet & \bullet & \cdots\cdots\cdots & \text{ج}_{\text{م}-1} & \text{ج}_{\text{م}} \\
\bullet & \bullet & \cdots\cdots\cdots & \text{ج}_{\text{م}-2} & \text{ج}_{\text{م}-1} \\
\text{ء}_{\text{ب}} & \text{ء}_{\text{ا}} & \cdots\cdots\cdots & \bullet & \bullet \\
\bullet & \text{ء}_{\text{ب}} & \cdots\cdots\cdots & \bullet & \bullet \\
 & & \cdots\cdots\cdots & & \\
\bullet & \bullet & \cdots\cdots\cdots & \text{ء}_{\text{ه}-1} & \text{ء}_{\text{ه}} \\
\bullet & \bullet & \cdots\cdots\cdots & \text{ء}_{\text{ه}-2} & \text{ء}_{\text{ه}-1}
\end{array}
\right| \qquad (٢٥)
$$

يكون المحدد الاصلى مح متكونا من صفوف افقية عددها م+ه تحتوى الصفوف الاول منها التى عددها ه على المعاملات ح وتحتوى الصفوف التالية التى عددها م على المعاملات ء ويستنتج $\text{مح}^{(1)}$ من مح بحذف الصف الاول من كل سلسلة وكذا العمود الاول والعمود الاخير

فتى كان المحدد $\text{مح}^{(1)}$ مخالفا للصفر لا يوجد سوى جذر واحد مشترك ويحسب هذا الجذر المشترك بهذه الكيفية وهى لترجع الى المعادلات (١٠) من ب ٣٢٢ د فبحذف

المعادلة الاولى من كل سلسلة تتحصل معادلات عددها $\text{م}+\text{ه}-٢$ ذات درجة اولى ومجاهيل س و $\text{س}^{٢}$ و .... و $\text{س}^{\text{م}+\text{ه}-٢}$ عددها $\text{م}+\text{ه}-٢$ وهذه المعادلات المتصلة هى

$$\left.\begin{array}{l} \text{ح}_{٠}\,\text{س}^{\text{م}+\text{ه}-٢} + \text{ح}_{١}\,\text{س}^{\text{م}+\text{ه}-٣} + \cdots\cdots = ٠ \\ \text{ح}_{٠}\,\text{س}^{\text{م}+\text{ه}-٣} + \cdots\cdots = ٠ \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \text{ح}_{٠}\,\text{س}^{\text{م}+١} + \cdots + \text{ح}_{\text{م}}\,\text{س} = ٠ \\ \text{ح}_{٠}\,\text{س}^{\text{م}} + \cdots + \text{ح}_{\text{م}-١}\,\text{س} + \text{ح}_{\text{م}} = ٠ \\ \text{ى}_{٠}\,\text{س}^{\text{م}+\text{ه}-٢} + \text{ى}_{١}\,\text{س}^{\text{م}+\text{ه}-٣} + \cdots\cdots = ٠ \\ \text{ى}_{٠}\,\text{س}^{\text{م}+\text{ه}-٣} + \cdots\cdots = ٠ \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \text{ى}_{٠}\,\text{س}^{\text{ه}+١} + \cdots + \text{ى}_{\text{ه}}\,\text{س} = ٠ \\ \text{ى}_{٠}\,\text{س}^{\text{ه}} + \cdots + \text{ى}_{\text{ه}-١}\,\text{س} + \text{ى}_{\text{ه}} = ٠ \end{array}\right\} \quad (٢٦)$$

ويكون عدد معاملات المجاهيل هو $\text{ع}^{(١)}$ بالضبط ويكون مقدار س معلوما بهذه المعادلة ذات الدرجة الاولى

$$\text{ع}^{(١)}\,\text{س} + \text{ع}_{١}^{(١)} = ٠ \qquad (٢٧)$$

التى فيها $\text{ع}_{١}^{(١)}$ رمز للعدد الذى يتحصل عليه بتعويض أجزاء العمود الاخير من المحدد $\text{ع}^{(١)}$ بالحدود المعلومة وهى

$\text{ى}_{\text{ه}}$ و ٠ و ..... و ٠ و ٠ و $\text{ح}_{\text{م}}$ و ٠ و ..... و ٠

مثلا اذا علمت المعادلتان (٧) التى يدل القانون (٩) على عددهما الاصلى تكون المجموعة (٢٦) متكونة من الثلاث معادلات

$$\text{ج}_{0}\text{س}^{3}+\text{ج}_{1}\text{س}^{2}+\text{ج}_{2}\text{س}+\text{ج}_{3}=0 \quad \text{و}$$

$$\text{د}_{0}\text{س}^{3}+\text{د}_{1}\text{س}^{2}+\text{د}_{2}\text{س}=0 \quad \text{و}$$

$$\text{د}_{0}\text{س}^{2}+\text{د}_{1}\text{س}+\text{د}_{2}=0$$

ويكون

$$\text{ح}^{(1)}=\begin{vmatrix}\text{ج}_{0} & \text{ج}_{1} & \text{ج}_{2}\\ \text{د}_{0} & \text{د}_{1} & \text{د}_{2}\\ 0 & \text{د}_{0} & \text{د}_{1}\end{vmatrix} \quad \text{و} \quad \text{ح}_{1}^{(1)}=\begin{vmatrix}\text{ج}_{0} & \text{ج}_{1} & \text{ج}_{2}\\ \text{د}_{0} & \text{د}_{1} & 0\\ 0 & \text{د}_{0} & \text{د}_{2}\end{vmatrix}$$

بند ٣٢٩ لنفرض ان ح=٠ و $\text{ح}_{1}^{(1)}=0$ فبموجب ماذكرناه يكون للمعادلتين المفروضتين جذران مشتركان بالاقل وبناء على ذلك يوجد بالاقل ازدواج للكميتين الكثيرتي الحدود ص و ع تكون درجتاه ه−٢ و م−٢ ولا يوجد سوى ازدواج واحد اذا لم يوجد سوى جذران مشتركان وتوجد ازدواجات لاحصر لعددها اذا وجد أكثر من جذرين مشتركين

والحسب هاتين الكميتين الكثيرتي الحدود فنقول

ليكن

$$\text{ص}=\text{و}_{0}\text{س}^{\text{ه}-2}+\text{و}_{1}\text{س}^{\text{ه}-3}+\cdots+\text{و}_{\text{ه}-2} \quad \text{و}$$

$$\text{ع}=\text{ز}_{0}\text{س}^{\text{م}-2}+\text{ز}_{1}\text{س}^{\text{م}-3}+\cdots+\text{ز}_{\text{م}-2}$$

وبمساواة معاملات القوى المختلفة للمجهول س من المقدار الجبري وهو ص د(س) +ع د_{1}(س) بصفر تحصل هذه المعادلات

$$(28)\quad\left\{\begin{array}{l}\text{ج}_{0}\text{و}_{0}+\text{د}_{0}\text{ز}_{0}=0\\ \text{ج}_{0}\text{و}_{1}+\text{ج}_{1}\text{و}_{0}+\text{د}_{0}\text{ز}_{1}+\text{د}_{1}\text{ز}_{0}=0\\ \cdots\cdots\cdots\\ \text{ج}_{\text{م}}\text{و}_{\text{ه}-3}+\text{ج}_{\text{م}-1}\text{و}_{\text{ه}-2}+\text{د}_{\text{م}}\text{ز}_{\text{ه}-3}+\text{د}_{\text{ه}-1}\text{ز}_{\text{م}-2}=0\end{array}\right.$$

المتجانسة والتي بدرجة أولى ومجاهيل عددها م+ه−٢ وهي و_{0} و و_{1} و .... و $\text{و}_{\text{ه}-2}$

و $ز_٠$ و $ز_١$ و ... و $ز_{م-٢}$ ولا يكون محدد هذه المجموعة متى وضعت معاملات كل معادلة في عمود واحد الا صح[1] فاذا صرف النظر عن المعادلة الاخيرة من المعادلات (٢٨) تحدث معادلات عددها م+ه-٣ ذات مجاهيل $\frac{و_١}{و_٠}$ و $\frac{و_٢}{و_٠}$ و ... و $\frac{ز_٠}{و_٠}$ و $\frac{ز_١}{و_٠}$ و ... عددها م+ه-٣ ويحصل على هذه المعادلات بمساواة معاملات $س^{م+ه-٢}$ و $س^{م+ه-٣}$ و ... و $س^{٢}$ بصفر في المقدار الجبري ص ء(س) + ع $ء_١$(س) الذي يؤول حينئذ الى كمية كثيرة حدود بدرجة أولى ولتكن ه س + ر لكن حيث ان لكثيري الحدود ء(س) و $ء_١$(س) جذران مشتركان بالاقل أعني حيث كان لهما قاسم بدرجة ثانية فيكون ه=٠ و ر=٠ ويكون المقدار الجبري المذكور معدوما مهما كان مقدار س ويعلم من ذلك انه يطابق لكل حل للمعادلات ذات الدرجة الاولى ازدواج للكميتين الكثيري الحدود ص و ع درجتاه ه-٢ و م-٢ وبالعكس فاذا كان محدد معاملات المجاهيل في هذه المعادلات مخالفا للصفر لا يوجد سوى حل واحد وبناء على ذلك لا يكون للمعادلتين المفروضتين سوى جذران مشتركان واما اذا كان المحدد معدوما فحيث انه لا يمكن حصول الاستحالة فتوجد حلول لا حصر لعددها وبناء على ذلك يوجد أكثر من جذرين مشتركين

ويستنتج هذا المحدد من المحدد صح[1] المبين بالقانون (٢٥) بحذف معاملات $و_٠$ أعني بحذف الصف الاول ومعاملات المعادلة الاخيرة من المعادلات (٢٨) أعني العمود الاخير واذن يكون هو المحدد الجزئي المنسوب للجزء الاول من العمود الاخير من صح[1] الا ان جميع أجزاء العمود الاول تكون حينئذ معدومة ما عدا الجزء $ء_٠$ فاذا رتب بالنسبة لهذه الاجزاء لا يشتمل الا على الحد $(-١)^{ه-٢}$ $ء_٠$ صح[2] الذي فيه صح[2] رمز للمحدد الجزئي الجديد المنسوب لهذا الجزء وهو $ء_٠$ أعني رمز لهذا المحدد

$$\text{مح}^{(٢)} = \left| \begin{array}{cccccc} ح_{·} & ح_{١} & \cdots\cdots\cdots & · & · \\ · & ح_{·} & \cdots\cdots\cdots & · & · \\ & & \cdots\cdots\cdots & & \\ · & · & \cdots\cdots\cdots & ح_{م-٢} & ح_{م-١} \\ · & · & \cdots\cdots\cdots & ح_{م-٣} & ح_{م-٢} \\ د_{·} & د_{١} & \cdots\cdots\cdots & · & · \\ · & د_{·} & \cdots\cdots\cdots & · & · \\ & & \cdots\cdots\cdots & & \\ · & · & \cdots\cdots\cdots & د_{ن-٢} & د_{ن-١} \\ · & · & \cdots\cdots\cdots & د_{ن-٣} & د_{ن-٢} \end{array} \right| \qquad (٢٩)$$

ويستنتج $\text{مح}^{(٢)}$ من $\text{مح}^{(١)}$ كما يستنتج $\text{مح}^{(١)}$ من مح أعني بحذف الصف الاول من صفوف الجيمات والصف الاوّل من صفوف الدالات والعمودين الاوّل والاخير

فمتى كان المحدد $\text{مح}^{(٢)}$ مخالفا للصفر لا يكون للمعادلتين سوى جذران مشتركان ويحصل عليهما بهذه الكيفية وهي بحذف المعادلة الاولى من كل سلسلة من المجموعة (٢٦) تحصل هذه المعادلات ذات الدرجة الاولى

$$(٣٠) \left\{ \begin{array}{l} ح_{·} س^{م+ن-٣} + ح_{١} س^{م+ن-٤} + \cdots\cdots\cdots = ٠ \quad و \\ ح_{·} س^{م+ن-٤} + \cdots\cdots\cdots = ٠ \quad و \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad و \\ ح_{·} س^{م+١} + \cdots + ح_{م} س = ٠ \quad و \\ ح_{·} س^{م} + \cdots + (ح_{م-١} س + ح_{م}) = ٠ \quad و \\ د_{·} س^{م+ن-٣} + د_{١} س^{م+ن-٤} + \cdots\cdots\cdots = ٠ \quad و \\ د_{·} س^{م+ن-٤} + \cdots\cdots\cdots = ٠ \quad و \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad و \\ د_{·} س^{ن+١} + \cdots + د_{ن} س = ٠ \quad و \\ د_{·} س^{ن} + \cdots + (د_{ن-١} س + د_{ن}) = ٠ \end{array} \right.$$

التي عـددها م + ه − ٤ والتي تحتوي على مجاهيل عـددها م + ه − ٤ وهي سه، و $\text{سه}^{٢}$ و . . . و $\text{سه}^{م+ه-٣}$ وفيها الحـدود التي تحتوي على سه بدرجـة أولى معتبرة معلومة ومنضمة للحدود الاخيرة ويكون عـدد معاملات المجاهيل هو $\text{مح}^{(٢)}$ بالضبط فاذا حلت هذه المعادلات يستنتج منها المجهول $\text{سه}^{٢}$ مقـدار جبري بالصورة ع سه + ر واذن تكون الجذور المشتركة معلومة بهذه المعادلة ذات الدرجة الثانية

$$\text{مح}^{(٢)}\,\text{سه}^{٢} + \text{مح}^{(٢)}_{١}\,\text{سه} + \text{مح}^{(٢)}_{٢} = ٠ \qquad (٣١)$$

التي فيها $\text{مح}^{(٢)}_{١}$, $\text{مح}^{(٢)}_{٢}$ رمزان للمحددين اللذين يتحصـل عليهما بتعويض معاملات $\text{سه}^{٢}$ أعني اجزاء العمود الاخير من $\text{مح}^{(٢)}$ بمعاملات سه او بالحدود المعلومة

مثلا اذا كان م = ٤ , ه = ٣ يكون

$$\text{مح}^{(٢)} = \begin{vmatrix} \text{ح}_{٠} & \text{ح}_{١} & \text{ح}_{٢} \\ \text{ء}_{٠} & \text{ء}_{١} & \text{ء}_{٢} \\ ٠ & \text{ء}_{٠} & \text{ء}_{١} \end{vmatrix} ,\quad \text{مح}^{(٢)}_{١} = \begin{vmatrix} \text{ح}_{٠} & \text{ح}_{١} & \text{ح}_{٣} \\ \text{ء}_{٠} & \text{ء}_{١} & \text{ء}_{٣} \\ ٠ & \text{ء}_{٠} & \text{ء}_{٢} \end{vmatrix} ,\quad \text{مح}^{(٢)}_{٢} = \begin{vmatrix} \text{ح}_{٠} & \text{ح}_{١} & \text{ح}_{٤} \\ \text{ء}_{٠} & \text{ء}_{١} & ٠ \\ ٠ & \text{ء}_{٠} & \text{ء}_{٣} \end{vmatrix}$$

بند ٣٣٠ ولنفرض في آن واحد أن مح = ٠ , $\text{مح}^{(١)} = ٠$, $\text{مح}^{(٢)} = ٠$ فبموجب ما ذكرنا يكون للمعادلتين المفروضتين ثلاثة جـذور مشتركة بالاقل وبناء على ذلك يوجد بالاقل ازدواج لكثيرتي الحدود صه , ع بدرجتي ه − ٣ , م − ٣ ولا يوجد سوى ازدواج واحد اذا لم يوجـد الا ثلاثة جذور مشتركة وتوجد ازدواجات لا حصر لعددها اذا وجد أكثر من ثلاثة جـذور مشتركة فاذا حسبت هذه الكميات الكثيرة الحدود لتوصل الى اعتبار محدد $\text{مح}^{(٣)}$ يستنتج من $\text{مح}^{(٢)}$ كما يستنتج $\text{مح}^{(٢)}$ من $\text{مح}^{(١)}$ او كما يستنتج $\text{مح}^{(١)}$ من مح فاذا كان هذا المحدد الجديد وهو $\text{مح}^{(٣)}$ مخالفا للصفر لا يكون للمعادلتين المفروضتين سوى ثلاثة جذور مشتركة تتحصل بمعادلة ذات درجة ثالثة وهي

$$\text{مح}^{(٣)}\,\text{سه}^{٣} + \text{مح}^{(٣)}_{١}\,\text{سه}^{٢} + \text{مح}^{(٣)}_{٢}\,\text{سه} + \text{مح}^{(٣)}_{٣} = ٠ \qquad (٣٢)$$

واذا

واذا كان العدد المذكور مساويا للصفر يكون للمعادلتين المفروضتين أكثر من ثلاثة جذور مشتركة

ويدام العمل بهذه الكيفية الى ان يتوصل الى عدد مشتق $ع^{(ح)}$ مخالف للصفر ومن ذلك يستنتج انه اذا انعدمت العددات المتوالية التي عددها ح وهي

$$ع \text{ و } ع^{(١)} \text{ و } ع^{(٢)} \text{ و } \ldots \text{ و } ع^{(ح-١)}$$

والتي يستنتج كل منها من سابقه على حسب القانون المتقدم ذكره ولم يكن العدد التالي وهو $ع^{(ح)}$ معدوما يكون للمعادلتين المفروضتين جذور مشتركة عددها ح ولا يكون لهما جذور مشتركة يزيد عددها عن ح وتكون هذه الجذور المشتركة التي عددها ح معلومة بهذه المعادلة

$$ع^{(ح)} س^{ح} + ع^{(ح)}_{١} س^{ح-١} + \ldots + ع^{(ح)}_{ح} = ٠ \qquad (٣٣)$$

التي بدرجة ح والتي معاملاتها عددات برتبة م+ه-٢ح ومتجانسة وبدرجة ه-ح بالنسبة للمعاملات د ومتجانسة كذلك وبدرجة م-ح بالنسبة للمعاملات ق بـ٣٣١د واختم هذا الفصل بنظرية مهمة تنسب الى بيزو ولها ارتباط بمسئلة الحذف فنقول

اذا علمت كميتان كثيرتا الحدود صحيحتان ولتكونا ء(س) و د(س) وكانتا اوليتين مع بعضهما وكانت درجتاهما م و ه أقول انه يوجد كميتان كثيرتا حدود صحيحتان ص و ع بدرجتي ه-١ و م-١ بحيث يكون المقدار الجبري صء(س)+ع د(س) غير متعلق بحرف س

لانه متى كانت الكميتان الكثيرتا الحدود ء(س) و د(س) أوليتين مع بعضهما يكون العدد (١١) مخالفا للصفر ولا يتغير مقدار هذا العدد متى عوضت أجزاء العمود الاخير بالنواتج التي يتحصل عليها حينما يضاف اليها أجزاء العمود الذي قبل العمود الاخير من بعد ضربها في س وأجزاء العمود السابق للعمود الذي قبل العمود الاخير من بعد ضربها في $س^{٢}$ وهكذا الى أن يضاف اليها أجزاء العمود الاول من بعد ضربها في $س^{م+ه-١}$ (بـ٣٢٨د) الا ان هذه النواتج ليست الا الاطراف الاول من المعادلات (١٠) أعني

$$\text{س}^{\text{ه}-1}\,\text{ء}(\text{س}) \text{ ، } \text{س}^{\text{ه}-2}\,\text{ء}(\text{س}) \text{ ، } \ldots \text{ ، } \text{ء}(\text{س}) \text{ ، } \text{س}^{\text{م}-1}\,\text{د}(\text{س}) \text{ ، } \ldots \text{ ، } \text{د}(\text{س})$$

فاذا رتبنا الآن المحدد بالنسبة لاجزاء العمود الاخير يحدث (بـ٣٦ــد)

$$\text{ع} = (-1)^{\text{م}+\text{ه}-1}\left\{ \text{مح}_{1}^{\text{م}+\text{ه}}\,\text{س}^{\text{ه}-1} - \text{مح}_{2}^{\text{م}+\text{ه}}\,\text{س}^{\text{ه}-2} + \ldots + (-1)^{\text{ه}-1}\,\text{مح}_{\text{ه}}^{\text{م}+\text{ه}} \right\}\text{ء}(\text{س})$$
$$+ (-1)^{\text{م}-1}\left\{ \text{مح}_{\text{ه}+1}^{\text{م}+\text{ه}}\,\text{س}^{\text{م}-1} - \text{مح}_{\text{ه}+2}^{\text{م}+\text{ه}}\,\text{س}^{\text{م}-2} + \ldots + (-1)^{\text{م}-1}\,\text{مح}_{\text{م}+\text{ه}}^{\text{م}+\text{ه}} \right\}\text{د}(\text{س}) \qquad (٣٤)$$

فاذا رمز بحرفى ص ، ع لكثيرى الحدود الموضوعتين بين الاقواس واللتين أولاهما بدرجة $\text{ه}-1$ والاخرى بدرجة $\text{م}-1$ يتوصل الى الارتباط

$$\text{ص}\,\text{ء}(\text{س}) + \text{ع}\,\text{د}(\text{س}) = \text{مح} \qquad (٣٥)$$

الذى فيه مح كمية غير متعلقة بحرف س ومخالفة للصفر

ولننبه على ان كثيرى الحدود ص ، ع هما المحددان اللذان يتحصل عليهما متى عوضت أجزاء العمود الاخير فى المحدد مح بالكميات

$$\text{س}^{\text{ه}-1} \text{ ، } \text{س}^{\text{ه}-2} \text{ ، } \ldots \text{ ، } \text{س} \text{ ، } 1 \text{ ، } 0 \text{ ، } 0 \text{ ، } \ldots \text{ ، } 0 \text{ ، } 0$$

أو بالكميات

$$1 \text{ ، } \text{س} \text{ ، } \ldots \text{ ، } \text{س}^{\text{م}-1} \text{ ، } \text{س}^{\text{م}-2} \text{ ، } 0 \text{ ، } 0 \text{ ، } \ldots \text{ ، } 0 \text{ ، } 0$$

وعلى ان هاتين الكميتين الكثيرتى الحدود أوليتان مع بعضهما لانه لو فرض ان لهما جذر مشترك وأبدل س بهذا المقدار لكان $\text{مح} = 0$

(الفصل الثالث)

(فى تحويل المعادلات)

نمرة ٣٣٢ الغرض من مسئلة تحويل المعادلات ان تستنتج من معادلة معلومة مثل

$$\text{ء}(\text{س}) = \text{س}^{\text{م}} + \text{ح}_{1}\,\text{س}^{\text{م}-1} + \ldots + \text{ح}_{\text{م}} = 0 \qquad (1)$$

معادلة جديدة يكون بين جذورها وبين جذور المعادلة الاولى ارتباط معلوم فلنفرض فى أول الامر ان كل جذر ص من جذور المعادلة الجديدة يكون مساويا لدالة جذرية ولتكن

$$\text{ص} = \frac{\text{د}_{١}(\text{س})}{\text{د}_{٢}(\text{س})}$$

بجذر س للمعادلة الاولى ($\text{د}_{١}(\text{س})$, $\text{د}_{٢}(\text{س})$ كميتان كثيرتا الحدود صحيحتان أوليتان مع بعضهما) فيتحصل على المعادلة المطلوبة بحذف س من المعادلتين (١) و (٢) ومن المعلوم انه يطابق لكل مقدار للمجهول س مقدار واحد للمجهول ص فاذا كانت كثيرتا الحدود د(س) و $\text{د}_{٢}(\text{س})$ أوليتين مع بعضهما تكون مقادير ص التي عددها م محدودة وتكون المعادلة المحتوية على ص بدرجة م كذلك وأما اذا كان بين كثيرتي الحدود د(س) و $\text{د}_{٢}(\text{س})$ قاسم مشترك اعظم بدرجة ح فانه يكون للمجهول الجديد ص جذور لا نهائية عددها ح وتصير المعادلة الصادية بدرجة م − ح غير انه في هذه الحالة يقسم الطرف الاول من المعادلة (١) على هذا القاسم المشترك الاعظم بحيث تنخفض درجتها وتصير بدرجة م − ح وحينئذ يمكننا ان نفرض ان كثيرتي الحدود د(س) و $\text{د}_{٢}(\text{س})$ أوليتان مع بعضهما

ولنعتبر على الخصوص التحويل الخطي وهو

$$\text{ص} = \frac{\text{حس} + \text{ء}}{\text{حَس} + \text{ءَ}} \quad \text{فيكون} \quad \text{س} = \frac{\text{ء} - \text{ءَص}}{\text{حَص} - \text{ح}} \qquad (٣)$$

وتكون المعادلة الجديدة موضوعة بصورة صحيحة هي

$$(\text{حَص} - \text{ح})^{\text{م}}\ \text{د}\left(\frac{\text{ء} - \text{ءَص}}{\text{حَص} - \text{ح}}\right) = ٠ \qquad (٤)$$

ومن هذا التحويل تتفرع هذه التحويلات وهي الاول التحويل ص = حس الذي هو عبارة عن ضرب جذور المعادلة المفروضة في عدد ثابت ح وقد استعملناه لاجل تحويل البحث عن الجذور المنطقة الكسرية الى البحث عن الجذور الصحيحة (بـ ٢٧٨ د) ومتى كان ح = −١ تصير الجذور متغيرة فقط في الاشارة (بـ ٢٥٣ د) الثاني التحويل ص = س + ء الذي غايته زيادة الجذور بكمية ثابتة ء وقد توصلنا بواسطة هذا التحويل الفرعي الى محو الحد الثاني من المعادلة (بـ ٢٥٧ د) الثالث التحويل $\text{ص} = \frac{١}{\text{س}}$ الذي به تحدث المعادلة $\text{ص}^{\text{م}}\ \text{د}\left(\frac{١}{\text{ص}}\right) = ٠$ التي جذورها عكس جذور المعادلة المفروضة (بـ ٢٥٩ د)

بـ٣٣٣د يمكن بواسطة التحويل الخطي وهو

$$\text{ص}=\frac{\text{س}+\text{ح}}{\text{س}+\text{ء}}\quad \text{الذي فيه}\quad \text{س}=\frac{\text{ح}-\text{ء}\,\text{ص}}{\text{ص}-١}$$

تحويل المعادلة ذات الدرجة الثالثة الى معادلة ذات حدين ولبيان ذلك نأخذ المعادلة بالصورة

$$\text{س}^{٣}+\text{ع}\,\text{س}+\text{ك}=٠ \qquad (٥)$$

فبمساواة معاملي $\text{ص}^{٢}$, ص من المعادلة المحول اليها بصفر توجد الارتباطات

$$٣\text{ح}\,\text{ء}^{٢}+\text{ع}\,\text{ح}+٢\text{ع}\,\text{ء}-٣\text{ك}=٠\ ,\quad ٣\text{ح}^{٢}\text{ء}+٢\text{ع}\,\text{ح}+\text{ع}\,\text{ء}-٣\text{ك}=٠$$

وبحذف الحدين الاولين والحدين الاخيرين على التوالي والقسمة على الكمية ح − ء المخالفة للصفر يستنتج منهما أن

$$\text{ح}+\text{ء}=\frac{٣\text{ع}}{\text{ك}}\ ,\quad \text{ح}\,\text{ء}=-\frac{\text{ع}}{٣}$$

ويكون الثابتان ح , ء جذري معادلة ذات درجة ثانية وتؤول المعادلة المحول اليها الى

$$(\text{ء}^{٣}+\text{ع}\,\text{ء}-\text{ك})\,\text{ص}^{٣}-(\text{ح}^{٣}+\text{ع}\,\text{ح}-\text{ك})=٠ \qquad (٦)$$

ومنها يستخرج

$$\text{ص}=\sqrt[٣]{\frac{\text{ح}^{٣}+\text{ع}\,\text{ح}-\text{ك}}{\text{ء}^{٣}+\text{ع}\,\text{ء}-\text{ك}}} \qquad (٧)$$

وبهذه الكيفية يجرى العمل متى أريد حل المعادلة ذات الدرجة الثالثة

بـ٣٣٤د ويثبت بسهولة ان كل تحويل جذري (٢) يمكن ايلولته الى تحويل صحيح لانه اذا فرض ان م , ه درجتا كثيرتي الحدود $\text{ء}(\text{س})$ و $\text{ء}_{٢}(\text{س})$ يعلم (بـ٣٣١د) انه يوجد كميتان كثيرتا الحدود ص و ع بدرجتي ه − ١ و م − ١ بحيث يكون المقدار الجبري $\text{ص}\,\text{ء}(\text{س})+\text{ع}\,\text{ء}_{٢}(\text{س})$ مساويا بالكمية غير متعلقة بالمجهول س ومخالفة للصفر فاذا ضرب بسط الكسر ومقامه في ع يحدث

$$\text{ص}=\frac{\text{ع}\,\text{ء}_{١}(\text{س})}{\text{ع}\,\text{ء}_{٢}(\text{س})}=\frac{\text{ع}\,\text{ء}_{١}(\text{س})}{\text{م}-\text{ص}\,\text{ء}(\text{س})}$$

وبموجب المعادلة (١) يؤول هذا الكسر الى دالة صحيحة وهي

ص =

$$ص = \frac{ع_1(س)}{ع}$$

ويمكن ان يفرض أيضا ان هذه الدالة لا تشتمل على أى قوة للمجهول سه أعلا من م ـ ١ لانه يستنتج من المعادلة (١) أن

$$س^م = -ج_1 س^{م-1} - \cdots - ج_م$$

وبضرب الطرفين فى سه وتعويض سه^م بمقداره يتحصل المقدار الجبرى لكمية سه^{م+١} مبينا بكمية كثيرة حدود صحيحة بدرجة م ـ ١ وهلم جرّا وبوضع مقادير سه^م و سه^{م+١} و .... الخ فى الدالة الصحيحة لا يبقى الا القوى الاقل من م

ويستنتج من ذلك أن التحويل الجذرى الاعم يؤل الى هذا التحويل الصحيح الذى بدرجة م ـ ١

$$ص = ج س^{م-1} + ج_1 س^{م-2} + \cdots + ج_{م-1} \qquad (٨)$$

الذى يحتوى على معاملات اختيارية عددها م ويتحصل على المعادلة الصادية بحذف سه من المعادلة (١) والمعادلة (٨) موضوعة بالصورة

$$ج س^{م-1} + ج_1 س^{م-2} + \cdots + ج_{م-2} س + (ج_{م-1} - ص) = ٠ \qquad (٩)$$

وبالعمل كما أوضحنا فى بـ٣٢٣ـد يساوى المحدد ع الذى هو بدرجة م بالنسبة الى ص بصفر

وبواسطة المعادلة (٢٧) من بـ٣٢٨ـد يتحصل المقدار الجبرى للمجهول سه بكسر جذرى بالنسبة الى ص ومن هذا يتضح انه يمكن الرجوع من المعادلة الصادية الى المعادلة السينية بتحويل جذرى

بـ٣٣٥ـد المعادلة العكسية هى كل معادلة يكون $\frac{1}{س}$ جذرا لها اذا كان سه جذرا لها ولتكن

$$ج س^م + ج_1 س^{م-1} + \cdots + ج_{م-1} س + ج_م = ٠$$

المعادلة المفروضة فباجراء التحويل $ص = \frac{1}{س}$ تتحصل المعادلة

$$\text{ح}_{\text{م}}\,\text{ص}^{\text{م}}+\text{ح}_{\text{م}-1}\,\text{ص}^{\text{م}-1}+\cdots+\text{ح}_{1}\,\text{ص}+\text{ح}_{0}=0$$

وحيث انه يجب ان تكون جذور هاتين المعادلتين متحدة فتكون معاملاتهما متناسبة واذن يكون

$$\frac{\text{ح}_0}{\text{ح}_{\text{م}}}=\frac{\text{ح}_1}{\text{ح}_{\text{م}-1}}=\cdots=\frac{\text{ح}_{\text{م}}}{\text{ح}_0}$$

ومن تساوى النسبتين النهائيتين يحدث $\left(\frac{\text{ح}_0}{\text{ح}_{\text{م}}}\right)^2=1$ واذن يكون $\frac{\text{ح}_0}{\text{ح}_{\text{م}}}=\pm 1$ ويعلم من ذلك انه لاجل ان تكون أى معادلة عكسية يلزم ويكفى ان تكون معاملات الحدود المتساوية البعد عن الطرفين متساوية أو متساوية ومختلفة فى الاشارة

ويمكن ان يكون $+1$, -1 اللذين هما عكسا انفسهما جذرين عدة مرات فبعد محو عامل مثل $(\text{س}-1)^{\text{ع}}(\text{س}+1)^{\text{ك}}$ توجد معادلة تتناظر جذورها مثنى مثنى وبناء على ذلك تكون بدرجة مزدوجة وحيث كان حاصل ضرب الجذور مساويا $+1$ فيكون المعامل الاخير مساويا للمعامل الاول واذن تكون معاملات الحدود المتساوية البعد عن الطرفين متساوية وحينئذ تكون المعادلة بالصورة

$$\text{ح}_0\,\text{س}^{2\text{ه}}+\text{ح}_1\,\text{س}^{2\text{ه}-1}+\cdots+\text{ح}_1\,\text{س}+\text{ح}_0=0 \qquad (10)$$

وتنصف درجة هذه المعادلة بواسطة التحويل ذى الدرجة الثانية وهو $\text{ص}=\text{س}+\frac{1}{\text{س}}$ لانه يطابق لكل ازدواج للجذور العكسية مقدار واحد للمجهول ص فاذا قسمت جميع الحدود على $\text{س}^{\text{ه}}$ وسلسلت الحدود المتساوية البعد عن الطرفين مثنى مثنى تؤل المعادلة الى

$$\text{ح}_0\left(\text{س}^{\text{ه}}+\frac{1}{\text{س}^{\text{ه}}}\right)+\text{ح}_1\left(\text{س}^{\text{ه}-1}+\frac{1}{\text{س}^{\text{ه}-1}}\right)+\cdots+\text{ح}_{\text{ه}}=0 \qquad (11)$$

وحيث ان

$$\left(\text{س}^{\text{ع}}+\frac{1}{\text{س}^{\text{ع}}}\right)\left(\text{س}+\frac{1}{\text{س}}\right)=\left(\text{س}^{\text{ع}+1}+\frac{1}{\text{س}^{\text{ع}+1}}\right)+\left(\text{س}^{\text{ع}-1}+\frac{1}{\text{س}^{\text{ع}-1}}\right)$$

فيكون

$$\text{س}^{\text{ع}+1}$$

$$\text{س}^{ح+1}+\frac{1}{\text{س}^{ح+1}}=\left(\text{س}^{ح}+\frac{1}{\text{س}^{ح}}\right)\text{ص}-\left(\text{س}^{ح-1}+\frac{1}{\text{س}^{ح-1}}\right)$$

وبمساواة ح على التوالى بالمقادير ١ و ٢ و ٣ و ... الخ يوجد

$$\text{س}^{2}+\frac{1}{\text{س}^{2}}=\text{ص}^{2}-2 \quad \text{و}$$

$$\text{س}^{3}+\frac{1}{\text{س}^{3}}=\text{ص}^{3}-3\text{ص} \quad \text{و}$$

$$\text{س}^{4}+\frac{1}{\text{س}^{4}}=\text{ص}^{4}-4\text{ص}^{2}+2 \quad \text{و}$$

. . . .

وبوضع هذه المقادير فى المعادلة (١١) تحصل معادلة تحتوى على ص بدرجة ه ويطابق لكل مقدار من مقادير ص مقداران للمجهول س يعلمان بالمعادلة ذات الدرجة الثانية وهى $\text{س}^{2}-\text{ص}\,\text{س}+1=0$

بند ٣٣٦ ولنفرض الآن ان كل جذر ص للمعادلة الجديدة يكون مساويا لدالة جذرية مثل $\text{ء}(\text{س}_1 \text{ و } \text{س}_2)$ لجذرين مثل س_1 و س_2 من جذور المعادلة المفروضة فلاجل الحصول على المعادلة الجديدة يكفى حذف س_1 و س_2 من الثلاث معادلات

$$\text{ء}(\text{س}_1)=0 \quad \text{و} \quad \text{ء}(\text{س}_2)=0 \quad \text{و} \quad \text{ص}=\text{ء}(\text{س}_1 \text{ و } \text{س}_2) \qquad (١٢)$$

أعنى يكفى البحث عن الشرط الذى به تكون هذه الثلاث معادلات متحققة بمجموعة واحدة من مقادير س_1 و س_2

فاذا كانت درجة المعادلة المفروضة م يكون عدد مقادير ص مساويا لعدد تراتيب الجذور التى عددها م مثنى مثنى أعنى يكون مساويا م (م − ١) لكن لاشئ فى الحساب يدل على ان الجذر س_2 ليس عين س_1 بحيث ان المعادلة النهائية يمكن ان تقبل الحلول الغريبة $\text{ص}=\text{ء}(\text{س}_1 \text{ و } \text{س}_1)$ التى عددها م وتصير بدرجة م^{2} فيجتنب هذا الضرر بتعويض المعادلة $\text{ء}(\text{س}_2)=0$ بالمعادلة $\text{ء}(\text{س}_2)-\text{ء}(\text{س}_1)=0$

وقسمة الطرف الاول لهذه المعادلة الاخيرة على $س_٢ - س_١$ كى ينتهى الفرض $س_٢ = س_١$
ونجرى هذه القسمة بالتنبيه على انه يحدث مطابقة

$$د(س_٢) = د(س_١ + س_٢ - س_١) = د(س_١) + \frac{س_٢ - س_١}{١} دَ(س_١) + \cdots$$

$$+ \frac{(س_٢ - س_١)^م}{١ \times ٢ \cdots م} د^م(س_١)$$

ومن هنا يكون

$$\frac{د(س_٢) - د(س_١)}{س_٢ - س_١} = دَ(س_١) + \frac{س_٢ - س_١}{١ \times ٢} دً(س_١) + \cdots$$

$$+ \frac{(س_٢ - س_١)^{م-١}}{١ \times ٢ \cdots م} د^م(س_١) = ٠ \qquad (١٣)$$

ومتى كانت الدالة $د_٢(س_١ و س_٢)$ متماثلة بالنسبة الى $س_١$ و $س_٢$ يكون عدد مقادير ص مساويا العدد التوافيق مثنى مثنى للجذور التى عددها م أعنى يكون مساويا الى $\frac{م(م-١)}{١ \times ٢}$ وهذه هى درجة المعادلة النهائية

بـ٣٣٧د لنبحث مثلا عن المعادلة التى جذورها هى فروق جذور المعادلة المفروضة مثنى مثنى ولذلك يوضع $ص = س_٢ - س_١$ فبتعويض $س_٢ - س_١$ بمجهول ص فى المعادلة (١٣) يحتاج لحذف $س_١$ من هذه المعادلة والمعادلة $د(س_١) = ٠$ أعنى لحذف س من المعادلة

$$دَ(س) + \frac{ص}{١ \times ٢} دً(س) + \cdots + \frac{ص^{م-١}}{١ \times ٢ \cdots م} د^م(س) = ٠ \qquad (١٤)$$

والمعادلة المفروضة وهى $د(س) = ٠$ فتكون المعادلة الصادية بدرجة م (م-١) لكن حيث ان جذورها متساوية مثنى ومختلفة الاشارة فلا تشتمل الا على قوى مزدوجة لمجهول ص وبناء على ذلك تنصف درجتها بوضع $ص^٢ = ع$

وحيث انه يحدث من توافق كل جذرين حقيقيين مقدار حقيقى وموجب لمجهول ع

ويحدث

ويحدث من توافق كل جذرين تخيليين مقترنين مقدار حقيقى وسالب للمجهول غ فنستنتج من ذلك طريقة لايجاد الشروط التى بها تكون جميع جذور أى معادلة ذات معاملات حقيقية حقيقية لانه حيث يجب ان تكون جميع جذور المعادلة المحتوية على غ حقيقية وموجبة فتكون تامة ولا يشتمل طرفها الاول الاعلى مغايرات (بـ ٢٥١ د) وهذا الشرط كاف لانه متى كان مستوفيا لا يكون للمعادلة المحتوية على غ جذور سالبة وبناء على ذلك لا يكون للمعادلة المفروضة جذور تخيلية

فاذا كانت المعادلة المفروضة بدرجة ثالثة وبالصورة

$$\text{س}^{٣}+\text{ع}\,\text{س}+\text{ك}=٠ \qquad (١٥)$$

تكون المعادلة (١٤) هى

$$٣\text{س}^{٢}+٣\text{س}\,\text{ص}+(\text{ص}^{٢}+\text{ع}) \qquad (١٦)$$

وبضرب طرفى المعادلة الاولى فى ٣ وطرفى المعادلة الثانية فى س والطرح طرفا من طرف تحصل المعادلة

$$٣\text{ص}\,\text{س}^{٢}+(\text{ص}^{٢}-٢\text{ع})\,\text{س}-٣\text{ك}=٠ \qquad (١٧)$$

وحينئذ يحتاج لحذف س من المعادلتين ذاتى الدرجة الثانية (١٦) و (١٧) وبهذا توجد المعادلة (بـ ٣١٩ د)

$$\text{غ}^{٣}+٦\text{ع}\,\text{غ}^{٢}+٩\text{ع}^{٢}\text{غ}+(٤\text{ع}^{٣}+٢٧\text{ك}^{٢})=٠ \qquad (١٨)$$

ويكون الشرط الذى به تكون جميع جذور المعادلة المفروضة حقيقية هو

$$٤\text{ع}^{٣}+٢٧\text{ك}^{٢}<٠$$

وهذا هو ما وجدناه فى (بـ ٢٥٨ د وبـ ٢٦٤ د) بطرق أخرى

بـ ٣٣٨ د ولنبحث أيضا عن المعادلة التى جذورها مجموع جذور المعادلة المفروضة مثنى مثنى ولذلك نضع $\text{ص}=\text{س}_{١}+\text{س}_{٢}$ فبتعويض $\text{س}_{٢}$ بالكمية $\text{ص}-\text{س}_{١}$ فى المعادلة (١٣) يحتاج لحذف س من المعادلة

$$\text{د}(\text{س})+\frac{\text{ص}-٢\text{س}}{١\times٢}\,\text{د}''(\text{س})+\cdots+\frac{(\text{ص}-٢\text{س})^{\text{م}-١}}{١\times٢\cdots\times\text{م}}\,\text{د}^{\text{م}}(\text{س})=٠ \qquad (١٩)$$

والمعادلة المفروضة وحيث كان الارتباط $\text{ص}=\text{س}_{١}+\text{س}_{٢}$ متماثلا فتكون المعادلة

الصادية بدرجة $\frac{\text{م}(\text{م}-1)}{1\times 2}$

فاذا كانت المعادلة المفروضة هى المعادلة (١٥) ذات الدرجة الثالثة تكون المعادلة (١٩) هى

$$\text{س}^{2}-\text{ص}\,\text{س}+(\text{ص}^{2}+\text{ح})=0 \qquad (٢٠)$$

وبضرب طرفى هذه المعادلة فى س وطرحهما من المعادلة (١٥) طرفا من طرف يحدث

$$\text{ص}\,\text{س}^{2}-\text{ص}^{2}\text{س}+\text{ك}=0 \qquad (٢١)$$

وحيث انه يطابق للمقدار الواحد لمجهول ص مقداران س_{1} و س_{2} لمجهول س فيجب ان يكون للمعادلتين (٢٠) و (٢١) ذاتى الدرجة الثانية جذران مشتركان وبناء على ذلك تكون معاملاتهما متناسبة ومن ذلك ينتج الشرط

$$\text{ص}^{3}+\text{ح}\,\text{ص}-\text{ك}=0 \qquad (٢٢)$$

وجذور هذه المعادلة المحتوية على ص مساوية لجذور المعادلة المفروضة ومخالفة لها فى الاشارة وهذا ما يتضح من أول وهلة بسبب الارتباط $\text{س}_{1}+\text{س}_{2}+\text{س}_{3}=0$ الذى بواسطته يكون

$$\text{ص}=\text{س}_{1}+\text{س}_{2}=-\text{س}_{3}$$

ولنعتبر المعادلة ذات الدرجة الرابعة وهى

$$\text{س}^{4}+\text{ح}\,\text{س}^{2}+\text{ك}\,\text{س}+\text{ر}=0 \qquad (٢٣)$$

فتكون المعادلة الصادية بدرجة سادسة لكن حيث انه بسبب الارتباط

$$\text{س}_{1}+\text{س}_{2}+\text{س}_{3}+\text{س}_{4}=0$$

تكون مقادير ص متساوية مثنى مثنى ومختلفة الاشارة فتخفض درجتها الى الدرجة الثالثة بوضع $\text{ص}^{2}=\text{ع}$ وتكون المعادلة (١٩) هنا هى

$$2\text{ص}\,\text{س}^{2}-2\text{ص}^{2}\text{س}+(\text{ص}^{3}+\text{ح}\,\text{ص}+\text{ك})=0 \qquad (٢٤)$$

وبضرب طرفى المعادلة (٢٣) فى ٢ص وطرفى المعادلة (٢٤) فى س^{2} والطرح طرفا من طرف تستنتج المعادلة ذات الدرجة الثالثة وهى

$$2\text{ص}^{2}\text{س}^{3}-(\text{ص}^{3}-\text{ح}\,\text{ص}+\text{ك})\text{س}^{2}+2\text{ك}\,\text{ص}\,\text{س}+2\text{ر}\,\text{ص}=0 \qquad (٢٥)$$

وبتوفيق

ويتوفيق المعادلتين (٢٤) و (٢٥) توفيقا مشابها تحدث المعادلة ذات الدرجة الثانية وهي

$$(\text{ص}^{٣}+\text{ح}\,\text{ص}-\text{ى})\,\text{س}^{٢}-\text{ص}(\text{ص}^{٣}+\text{ص}-\text{ك})\,\text{س}+٢\,\text{ر}\,\text{ص}=٠ \qquad (٢٦)$$

وحيث انه يجب ان يكون للمعادلتين (٢٤) و (٢٦) جذران مشتركان فتكون معاملاتهما متناسبة وحينئذ توجد المعادلة

$$\text{ع}^{٣}+٢\,\text{ح}\,\text{ع}^{٢}+(\text{ح}^{٢}-٤\,\text{ر})\,\text{ع}-\text{ى}^{٢}=٠ \qquad (٢٧)$$

التي كنا وجدناها بطريقة اخرى (بند ٢٦٠) وبذلك يتحول حل المعادلة ذات الدرجة الرابعة الى حل معادلة ذات درجة ثالثة ويطابق لكل جذر للمعادلة (٢٧) جذران للمعادلة (٢٣) يعلمان بواسطة المعادلة (٢٤)

(الفصل الرابع)

في حل معادلتين بمجهولين

(في الكلام على استمرار الجذور)

بند ٣٣٩ (فائدة أولى) متى كانت المعاملات الاخيرة التي عددها ه من معادلة جبرية صحيحة مرتبة على حسب القوى التنازلية لمجهولها س صغيرة جدا يكون للمعادلة جذور صغيرة جدا عددها ه

ولاثبات ذلك نفرض ان المعادلة

$$\text{ى}(\text{س})=\text{ج}\,\text{س}^{\text{م}}+\text{ج}_{١}\,\text{س}^{\text{م}-١}+\dots+\text{ج}_{\text{م}-١}\,\text{س}+\text{ج}_{\text{م}}=٠ \qquad (١)$$

هي المعادلة المفروضة (ونسمي كمية صغيرة جدا كل كمية حقيقية أو تخيلية يكون مقياسها صغيرا جدا وكمية كبيرة كل كمية حقيقية أو تخيلية يكون مقياسها كبيرا جدا) ونفرض في أول الامر ان المعامل الاول وهو ج ليس صغيرا جدا كان يكون مساويا للواحد مثلا فيمكننا أن نضع الارتباطات التي توجد بين المعاملات الصغرى والجذور بالصورة

$$\text{س}_{١}\,\text{س}_{٢}\dots\text{س}_{\text{م}}=(-١)^{\text{م}}\,\frac{\text{ج}_{\text{م}}}{\text{ج}}\ ,$$

$$\text{س}_{٢}\text{س}_{٣}\ldots\text{س}_{م}+\text{س}_{١}\text{ع}^{م-١}_{م-٢}=(-١)^{م-١}\frac{\text{ج}_{م-١}}{\text{ج}_{٠}}\quad،$$

$$\text{س}_{٣}\text{س}_{٤}\ldots\text{س}_{م}+(\text{س}_{١}+\text{س}_{٢})\text{ع}^{م-٢}_{م-٣}+\text{س}_{١}\text{س}_{٢}\text{ع}^{م-٢}_{م-٤}=(-١)^{م-٢}\frac{\text{ج}_{م-٢}}{\text{ج}_{٠}}\quad،$$

. . . .

و $\text{ع}^{ك}_{ع}$ رمز لمجموع حواصل ضروب الجذور الاخيرة التى عددها ك حاء حاء) فاذا كان المعامل الاخير وهو $\text{ج}_{م}$ صغيرا جدا فحيث انه يكون لحاصل ضرب الجذور مقدار صغير جدا فيكون أحدهما وليكن $\text{س}_{١}$ صغيرا جدا فاذا كان المعامل السابق للمعامل الاخير صغيرا جدا كذلك فبموجب الارتباط الثانى من الارتباطات المتقدمة حيث انه يكون الحاصل $\text{س}_{٢}\text{س}_{٣}\ldots\text{س}_{م}$ صغيرا جدا فيكون جذر آخر $\text{س}_{٢}$ صغيرا جدا وهلم جرّا

و بالعكس متى كانت جذور عددها ه صغيرة جدا تكون المعاملات الاخيرة التى عددها ه صغيرة جدا

بـ ٣٤٠ د (فائدة ثانية) متى كانت المعاملات الاول التى عددها ه لمعادلة صغيرة جدا فان هذه المعادلة يكون لها جذور كبيرة جدا عددها ه

ولاثبات ذلك نفرض فى أول الامر ان الحد الاخير $\text{ج}_{م}$ ليس صغيرا جدا فلو وضعنا $\text{س}=\frac{١}{\text{ص}}$ تؤل المعادلة الى

$$\text{ج}_{م}\text{ص}^{م}+\text{ج}_{م-١}\text{ص}^{م-١}+\ldots+\text{ج}_{١}\text{ص}+\text{ج}_{٠}=٠ \qquad (٢)$$

وحيث ان هذه المعادلة الاخيرة لها جذور صغيرة جدا عددها ه فيكون للمعادلة الاولى جذور كبيرة جدا عددها ه

ولنفرض الآن ان الحد الاخير $\text{ج}_{م}$ صغير جدا كذلك فلو جعل $\text{س}=\text{سَ}+\text{د}$ ووضع

$$\left.\begin{aligned}&\text{جَ}_{١}=\frac{م}{١}\text{ج}_{٠}\text{د}+\text{ج}_{١}\quad،\\&\text{جَ}_{٢}=\frac{م(م-١)}{١\times٢}\text{ج}_{٠}\text{د}^{٢}+\frac{م-١}{١}\text{ج}_{١}\text{د}+\text{ج}_{٢}\quad،\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right\}\qquad(٣)$$

تؤل

تؤل المعادلة (١) الى

$$جَ سَ^{م} + جَ_{١} سَ^{م-١} + جَ_{٢} سَ^{م-٢} + \cdots + جَ_{م} = ٠ \qquad (٤)$$

وحيث ان المعاملات الاول التى عددها ه من هذه المعادلة الجديدة دوال صحيحة ومجانسة للمعاملات الاول التى عددها ه من المعادلة المفروضة فتكون تلك المعاملات صغيرة جدا وزيادة على ذلك فان الحد الثابت وهو د(ل) له مقدار اختيارى وهو $جَ_{م}$ (يكفى اخذ ل جذرا لمحدود المعادلة $د(ل) - جَ_{م} = ٠$) وحيث ان المجهول الجديد وهو سَ له مقادير كبيرة جدا عددها ه فيكون للمجهول س مقادير كبيرة جدا عددها ه كذلك

وينتج من ذلك انه اذا كانت المعاملات الاول التى عددها ه والمعاملات الاخيرة التى عددها ه صغيرة جدا فى معادلة ما فان هذه المعادلة يكون لها جذور كبيرة جدا عددها ه وجذور صغيرة جدا عددها ه وحيث ثبت الجزء الاول من هذه القضية فيستنتج الجزء الثانى منها بوضع $س = \frac{١}{ص}$

بند ٣٤١ (نظرية) متى كان لمعادلة جذور عددها ه مساوية لعدد ما ل أقول ان المعادلة التى يتحصل عليها بتغيير معاملات المعادلة المفروضة تغييرا يسيرا جدا يكون لها جذور عددها ه قريبة من العدد ل

لانه اذا كان للمعادلة (١) جذور عددها ه تساوى ل يكون للمعادلة (٤) التى يتحصل عليها بوضع $س = سَ + ل$ جذور عددها ه تساوى صفرا وحيث انه يجب ان يكون الطرف الاول قابلا للقسمة على $سَ^{ه}$ فتكون المعاملات الاخيرة التى عددها ه وهى $جَ_{م-ه+١}$ و ... و $جَ_{م-١}$ و $جَ_{م}$ معدومة وبموجب الارتباطات (٣) يعلم انه متى تغيرت المعاملات $ج$ و $ج_{١}$ و ... و $ج_{م}$ التى هى معاملات المعادلة المفروضة تغيرا صغيرا جدا تتغير المعاملات $جَ$ و $جَ_{١}$ و $جَ_{٢}$ و ... الخ التى هى معاملات المعادلة (٤) تغيرا صغيرا جدا كذلك وحيث كانت المعاملات الاخيرة معدومة قبل التغيير يكون لها مقادير صغيرة جدا وحينئذ يكون للمجهول سَ بعد تغيير المعاملات هذه مقادير صغيرة جدا عددها ه وبناء على ذلك يكون

للمجهول سه مقادير عددها ه قريبة من ل

وعلى الخصوص اذا كان ل جذرا بسيطا يكون للمعادلة الجديدة جذر واحد قريب من ل لاغير

وينتج من ذلك ان الجذور التى عددها م لاى معادلة تكون دوال مستمرة للمعاملات لاننا لو فرضنا اننا أعطينا للمعاملات مقادير مخصوصة بحيث تكون الجذور التى عددها م غير متساوية وغيرنا المعاملات بكيفية مستمرة بالابتداء من هذه المقادير فان الجذور التى عددها م تتغير بكيفية مستمرة ومتى أعطيت للمعاملات مقادير موفية لارتباطات ما معينة تصير عدة جذور متساوية ثم انها تنفصل بعد ذلك ثم تصير جذور أخر متساوية بمقادير أخر للمعادلات وهلم جرا

ومتى مالت المعاملات الاول التى عددها ه من الصفر تزيد جذور عددها ه الى ما لانهاية

(نتيجة) لنعتبر معادلة جبرية وصحيحة مثل $\text{د}(\text{سه}\,,\ \text{صه})=0$ بدرجة م رابطة للمتغيرين سه و صه فاذا رتبت هذه المعادلة بالنسبة الى صه تكون المعاملات دوال صحيحة للمتغير سه وبناء على ذلك تتغير بكيفية مستمرة عندما يتغير سه بكيفية مستمرة وحينئذ تكون مقادير صه التى عددها م دوال مستمرة للمتغير سه ويقال ان صه دالة غير محلولة للمتغير سه

(فى حل معادلتين بمجهولين)

بـ٣٤٢ د كل معادلتين جبريتين مشتملتين على مجهولين مثل سه و صه ومرتبتين على حسب القوى التنازلية للمجهول صه تكون بالصورة

$$\left.\begin{aligned} \text{ج}_0\,\text{صه}^{\text{م}}+\text{ج}_1\,\text{صه}^{\text{م}-1}+\text{ج}_2\,\text{صه}^{\text{م}-2}+\cdots+\text{ج}_{\text{م}}=0\,, \\ \text{د}_0\,\text{صه}^{\text{ه}}+\text{د}_1\,\text{صه}^{\text{ه}-1}+\text{د}_2\,\text{صه}^{\text{ه}-2}+\cdots+\text{د}_{\text{ه}}=0 \end{aligned}\right\}\ (0)$$

والمعاملات كميات كثيرة الحدود صحيحة بالنسبة للمجهول سه

فاللازم ايجاد مجموعات مقادير سه و صه التى تحقق المعادلتين المفروضتين فى آن واحد فليكن $\text{سه}=\text{سه}_1$ و $\text{صه}=\text{صه}_1$ حلا فاذا عوض سه فى المعادلتين (٥) بالمقدار سه_1 توجد معادلتان تحتويان على مجهول واحد صه ولهما جذر مشترك

وهو

وهو ص_1 وكما شاهدنا فى بـ٣٢٢د يكون الشرط اللازم والكافى لاجل أن يكون للمعادلتين (٥) جذر مشترك هو

$$\text{ح} = \begin{vmatrix} . & . & \cdots\cdots & \text{ج}_1 & \text{ج}_0 \\ . & . & \cdots\cdots & \text{ج}_0 & . \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ . & \text{ج}_\text{م} & \cdots\cdots & & \\ \text{ج}_\text{م} & \text{ج}_{\text{م}-1} & \text{ج}_0 & . & . \\ . & . & \cdots\cdots & \text{ء}_1 & \text{ء}_0 \\ . & . & \cdots\cdots & \text{ء}_0 & . \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ . & \text{ء}_\text{ه} & \cdots\cdots & . & . \\ \text{ء}_\text{ه} & \text{ء}_{\text{ه}-1} & \cdots\cdots & . & . \end{vmatrix} \qquad (٦)$$

فبهذه المعادلة ذات المجهول الواحد تحصل مقادير س_1

بـ٣٤٣د اذا كانت المعادلتان المفروضتان تامتين وفرض ان م درجة الاولى بالنسبة للمجهولين س و ص وفرض أن ه درجة الثانية يكون ج_0 و ء_0 معاملين ثابتين ويكون ج_1 و ء_1 كميتين كثيرتى الحدود بدرجة أولى بالنسبة الى س تشتمل كلتاهما على معاملين ويكون ج_2 و ء_2 كميتين كثيرتى الحدود بدرجة ثانية وهلم جرا ويكون $\text{ج}_\text{م}$ كمية كثيرة الحدود بدرجة م ويكون $\text{ء}_\text{ه}$ كمية كثيرة الحدود بدرجة ه وتكون درجة كل كمية من هذه الكميات كثيرة الحدود مبينة بدليل الحرف الدال عليها ولنفرض خلاف ذلك أن معاملاتهما مقادير اختيارية بالكلية فيكون أى حد من المحدد ح بالصورة

$$\pm\ \text{ج}_{\text{ل}_1}\ \text{ج}_{\text{ل}_2} \cdots\cdots \text{ج}_{\text{ل}_\text{ه}}\ \text{ء}_{\text{ك}_1}\ \text{ء}_{\text{ك}_2} \cdots\cdots \text{ء}_{\text{ك}_\text{م}}$$

و $\text{ج}_{\text{ل}_1}$ جزء من الصف الاول و $\text{ج}_{\text{ل}_2}$ جزء من الصف الثانى و ..... و $\text{ج}_{\text{ل}_\text{ه}}$ جزء

من الصف النونى و $ي_{ب_١}$ جزء من الصف الاول من السلسلة الثانية و $ي_{ب_٢}$ جزء من الصف الثانى من السلسلة الثانية و .... و $ي_{ب_م}$ جزء من الصف الاخير من السلسلة الثانية والادلة $ل_١$ و $ل_٢$ و $ل_٣$ .... و $ل_ه$ و $ب_١$ و $ب_٢$ و .... و $ب_م$ تدل على رتب العمد التى توجد بها هذه الاجزاء وبموجب ذلك يكون الجزء $ح_{ل_١}$ بدرجة $ل_١-١$ ويكون الجزء $ح_{ل_٢}$ بدرجة $ل_٢-٢$ .... ويكون الجزء $ح_{ل_ه}$ بدرجة $ل_ه-ه$ بالنسبة الى س وكذلك يكون الجزء $ي_{ب_١}$ بدرجة $ب_١-١$ ويكون الجزء $ي_{ب_٢}$ بدرجة $ب_٢-٢$ .... ويكون الجزء $ي_{ب_م}$ بدرجة $ب_م-م$ ويكون حاصل ضرب هذه الاجزاء بدرجة

$$(ل_١+ل_٢+\cdots+ل_ه+ب_١+ب_٢+\cdots+ب_م)-(١+٢+\cdots+ه)$$
$$-(١+٢+\cdots+م)$$

لكن حيث ان كل حد من المحدد يشتمل على جزء من كل من العمد فيكون المجموع

$$ل_١+ل_٢+\cdots+ب_١+ب_٢+\cdots$$

هو مجموع الاعداد الاول التى عددها $م+ه$ وحينئذ تكون درجة المحدد تساوى

$$\frac{(م+ه)(م+ه+١)}{٢}-\frac{ه(ه+١)}{٢}-\frac{م(م+١)}{٢}=م\,ه$$

أعنى تساوى حاصل ضرب درجتى المعادلتين المفروضتين وتكون معاملات المعادلة (٦) مرتبة على حسب قوى س دوال صحيحة لمعاملات المعادلتين المفروضتين ولنفرض ان الجذور التى عددها م ه للمعادلة (٦) غير متساوية لانه بدون ذلك تكون هذه المعاملات موفية لشرط ما

فمقادير ص المناظرة للمقادير المختلفة للمجهول س تكون معلومة بهذه المعادلة ذات الدرجة الاولى

$$ع^{(١)}ص+ع_{١}^{(١١)}=٠ \qquad (٧)$$

التى فيها $ع^{(١)}$ و $ع_{١}^{(١)}$ كميتان كثيرتا الحدود صحيحتان بالنسبة الى س (ب ٣٣٧ د)

ولنفرض

ولنفرض كذلك انه بمقادير س التي عددها م ن والمحققة للمعادلة (٦) يكون المقام مح^(١) مخالفا للصفر لانه بدون ذلك يكون للمعادلتين مح = ٠ و مح^(١) = ٠ جذر مشترك وهذا يستدعى أيضا أن المعاملات تحقق ارتباطا مّا ويعلم من ذلك انه في الحالة العمومية يطابق لكل مقدار للمجهول س مقدار واحد لمجهول ص ويكون للمعادلتين المفروضتين حلول عددها م ن وحينئذ يتكون من المعادلة (٦) ذات المجهول الواحد س ومن المعادلة (٧) مأخوذة معها مجموعة مكافئة لمجموعة المعادلتين (٥)

بـ ٣٤٤ د من المعلوم انه اذا غيرت معاملات المعادلتين المفروضتين بكيفية مستمرة فان معاملات المعادلة (٦) التي هي دوال صحيحة لهذه المعاملات تتغير كذلك بكيفية مستمرة وبناء على ذلك تتغير مقادير س التي عددها م ن ومقادير ص المناظرة لها بكيفية مستمرة كذلك فلنتصور ان جذرين س١ و س٢ صارا متساويين فيميل مقدارا ص المناظران لهما من المقدارين ص١ و ص٢ وتنعدم كثيرتا الحدود مح^(١) و مح١^(١) عندما يكون س = س١ ويكون مقدار ص معلومين بهذه المعادلة ذات الدرجة الثانية

$$مح^{(٢)} ص^{٢} + مح_{١}^{(٢)} ص + مح_{٢}^{(٢)} = ٠ \qquad (٨)$$

التي معاملاتها كميات كثيرة الحدود صحيحة بالنسبة الى س (بـ ٢٣٨ د)

وعلى العموم اذا تساوت جذور عددها ح من جذور المعادلة (٦) تكون مقادير ص التي عددها ح المناظرة لها معلومة بهذه المعادلة التي بدرجة ح

$$مح^{(ح)} ص^{ح} + مح_{١}^{(ح)} ص^{ح-١} + \cdots\cdots + مح_{ح}^{(ح)} = ٠ \qquad (٩)$$

والتي معاملاتها دوال صحيحة للمجهول س (بـ ٢٣٩ د)

فاذا انعدمت المعاملات الاول التي عددها ح للمعادلة (٦) مرتبة على حسب القوى التنازلية للمجهول س تزيد مقادير عددها ح من مقادير س الى ما لا نهاية وبعبارة أخرى تصير مقادير عددها ح من مقادير $\frac{١}{س}$ معدومة وهذه حالة خصوصية للجذور المتساوية وبواسطة المعادلة (٩) التي تقسم جميع حدودها على أعظم قوة الى س تشتمل عليها تحصل مقادير ص المناظرة التي عددها ح وعلى العموم يكون

المحدد الاخير بدرجة أكثر ارتفاعا من درجات المحدود الاخر وتكون مقادير صه التى عددها ح لانهائيه كذلك

بند ٣٤٥ ولنفرض الآن ان معاملات كثيرات المحدود $\text{ح}_{\cdot}$ و ح_{1} و .... $\text{ح}_{ح-1}$ و $\text{ء}_{\cdot}$ و ء_{1} و ... و $\text{ء}_{ك-1}$ المرتبة على حسب قوى سه تميل فى آن واحد من الصفر فتؤل المعادلتان المفروضتان الى

$$\left.\begin{array}{l} \text{ح}_{\cdot}\,\text{صه}^{م-ح} + \text{ح}_{ح+1}\,\text{صه}^{م-ح-1} + \cdots + \text{ح}_{م} = 0 \\ \text{ء}_{ك}\,\text{صه}^{ه-ك} + \text{ء}_{ك+1}\,\text{صه}^{ه-ك-1} + \cdots + \text{ء}_{ه} = 0 \end{array}\right\} \quad (10)$$

ولاجل الحصول على مقادير سه المناظرة للمقادير المحدودة للمجهول صه يلزم مساواة هذا المحدد وهو

$$\text{مد} = \left|\begin{array}{cccc} 0 & \cdots\cdots\cdots & \text{ح}_{ح+1} & \text{ح}_{ح} \\ 0 & \cdots\cdots\cdots & \text{ح}_{ح} & 0 \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ \text{ح}_{م} & \cdots\cdots\cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots\cdots\cdots & \text{ء}_{ك+1} & \text{ء}_{ك} \\ 0 & \cdots\cdots\cdots & \text{ء}_{ك} & 0 \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ \text{ء}_{ه} & \cdots\cdots\cdots & 0 & 0 \end{array}\right| \quad (11)$$

وكل حد من هذا المحدد يحتوى على أجزاء جيمية عددها ه ـ ك وعلى أجزاء دالية عددها م ـ ح فاذا انقصت درجة كل جزء جيمى بآحاد قدرها ح ونقصت درجة كل جزء دالى بآحاد قدرها ك فعلى حسب الدليل السابق تصير درجة المحدد مد هى (م ـ ح) (ه ـ ك) لكن حيث انه ينبغى اضافة آحاد قدرها (ه ـ ك) ح + (م ـ ح) ك فتكون الدرجة المذكورة هى م ه ـ ح ك وها هو عدد الحلول المحدودة وفى الحلول الاخر التى عددها ح ك يكون مقدار صه لانهائيا والحمد لله على كل حال والصلاة والسلام على سيدنا محمد والصحب والآل

يقول محمد عبد القادر مصحح مبانيه ومحرر تراكيبه ومعانيه مع بذل الجهد
في تقديم صعبه وسهله ومراجعته مرارا مع مؤلفه على أصله

تم طبع الجزء الثاني وهو غاية كتاب الكمالات التوفيقية في الاصول الجبرية لحضرة
مؤلفه احمد أفندي كمال بمطبعة ديوان عموم المعارف ومنبع العوارف وهي الطبعة
الاولى لهذا المؤلف المهذب على هذا الاسلوب المستعذب في ظل الساحة الخديوية
والحضرة المؤيدة التوفيقية أدام الله عزه وأبقى لنا حياته آمين فجاء بحمد الله عظيما
في بابه نافعا بحوله سبحانه لطلابه حريا بالانتظام في سلك عالي المدونات جديرا
بالظهور في دائرة المعارف على المؤلفات مشمولا بانظار صاحب السعادة رب المعارف
والسيادة سعادة احمد باشا خيري ناظر عموم المعارف وبادارة ذي الدراية والمعارف
السنية حضرة صادق بك ناظر مدرسة التجهيزية وبملاحظة من باحاسن
المطبوعات يدري حضرة حسين أفندي صبري لازالت همته
سامية بهية واخلاقه محمودة مرضية والحمد لله حمدا موفيا
بمزيد النوال مستمدا بدوام النفع وبلوغ الآمال
آمين وذلك في أواسط ذي القعدة
سنة ١٢٩٩ هجرية على
صاحبها أفضل الصلاة
وأزكى التحية
آمين

(جدول يشتمل على المواد التى يحتوى عليها هذا الكتاب)

(الباب الاول)

فى تتمة اصول علم الجبر وفيه ثمانية فصول

صحيفة

(الباب الثانى)

فى حساب المشتقات وفيه ستة فصول

(الباب الثالث)

فى المعادلات وفيه أربعة فصول

(تمت الفهرست)

(بيان الخطأ والصواب الواقع فى هذا الكتاب)

صحيفة	سطر	خطأ	صواب
١٦	٥	$\frac{\text{هـ}+١}{٢}$	$\frac{\text{م}+١}{٢}$
٨٧	٢	الرابع	الخامس
٩٧	١٣	تو	لو
١٠٩	١٩	$\text{لو}\ (١+\text{ب})^{\text{هـ}}-١$	$\text{لو}\ \{(١+\text{ب})^{\text{هـ}}-١\}$
١١٠	٥	$\text{لو}\ (١+\text{ب})^{\text{هـ}}-١$	$\text{لو}\ \{(١+\text{ب})^{\text{هـ}}-١\}$
١١٠	٦	$\text{لو}\ (١+\text{ب})^{\text{هـ}}-١$	$\text{لو}\ \{(١+\text{ب})^{\text{هـ}}-١\}$
١٤١	١٥	ق	ف ق
٢١٥	٧	١١٥	٢١٥
٣٤٣	١	الثامن	الخامس
٣٤٤	١٧	الجوارح	الخوارج